

Wissenschaftliche Nachrichten



Gewidmet von der
ZENTRALSPARKASSE
DER GEMEINDE WIEN

Nr. 4 - Jänner 1964

Inhalt:

Der Thermoionic-Generator
Das Neutrino als kosmischer Informationsträger
Eine neuerliche Überprüfung der Konstanz der
Lichtgeschwindigkeit
Die Funkenkammer

Relationen zwischen Masse, Geschwindigkeit, Impuls,
Energie in der relativistischen Mechanik
Astronomische Nachrichten
Optischer Transistor
Nachweis der Zeitdilatation mittels Mössbauereffekt
Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie

Der Thermoionic-Generator

Die unmittelbare Umwandlung von thermischer in elektrische Energie hat seit je das Interesse der Techniker in Anspruch genommen und ist im Prinzip, wenn auch in bescheidenem Umfang — man denke an die Thermoelemente — längst verwirklicht. Durch die Entwicklung der Raumfahrt hat das Problem in der letzten Zeit außerordentlich an Bedeutung gewonnen, denn die komplizierten elektrischen Einrichtungen eines kosmischen Flugkörpers erfordern die klaglose Bereitstellung elektrischer Energie auf längere Zeitspannen. Das wäre mit geringem Massenaufwand möglich, wenn ein thermischer Generator die Wärmestrahlung der Sonne, die Wärme von Flammgasen oder — in absehbarer Zeit — auch die Wärmestromung nuklearer Reaktionen transformieren könnte.

Die eingehenden Forschungen in dieser Richtung, welche von den führenden elektrotechnischen Unternehmungen in aller Welt unternommen werden, haben bereits beachtliche Erfolge zu verzeichnen, so daß begründete Hoffnung besteht, die neue Methode der Stromerzeugung zu einem namhaften Zweig der Starkstromtechnik auszubauen.

Um einem Elektron den Austritt aus einem Leiter zu ermöglichen, muß ihm eine Energie zugeführt werden, welche die Austrittsarbeit übertrifft. Bei den bis jetzt untersuchten Stoffen liegt das Austrittspotential zwischen 1 und 5 Volt und hängt von deren Natur ab. Die Wirkung eines thermoionischen Wandlers beruht auf der Ausnutzung der unterschiedlichen Austrittspotentiale verschiedener Substanzen.

Seien E und K zwei Leiter mit den Austrittspotentialen $V_E > V_K$. Durch ausreichende Erhitzung von E steigt die kinetische Energie der Elektronen schließlich über den Wert, der zur Überwindung des Potentialwalles der Höhe V_E erforderlich ist. Die Elektronen beginnen den Emitter E zu verlassen und gelangen auf den Kollektor K. E und K sind koaxiale Zylindermäntel, zwischen denen sich ein Vakuum befindet. Der Kollektor umschließt den Emitter. Die in K eintretenden Elektronen fallen in den Grundzustand zurück, der aber in K um $V_E - V_K$ Volt höher liegt als der Grundzustand des Emitters, wenn die Oberflächen der beiden Elektroden auf gleichem Potential gehalten werden. Stellt man nun zwischen E und K eine leitende Verbindung her, so fließt

in ihr ein elektrischer Strom, der bei entsprechender Belastung Arbeit leistet. Wählt man die Belastung gerade so groß, daß der von ihr bewirkte Spannungsabfall gleich $V_E - V_K$ ist, dann haben die Oberflächen von E und K dasselbe Potential und das Gerät arbeitet optimal.

Die Wärme wird im Inneren des Emitterhohlzylinders von Flammgasen oder Kernbrennstoffen zugeführt. Der Kollektor hingegen ist von Kühlschlangen umgeben, denn seine Elektronenemission muß durch Niedrighaltung der Temperatur möglichst unterbunden werden. Eine quantitative Vorstellung über einen solchen Generator vermitteln die folgenden Daten:

Die Arbeitstemperatur des Emitters liegt über 800°C . Bei Wolfram ist $V_{\text{Austr.}} = 4,5\text{ V}$, die Stromdichte der austretenden Elektronen beträgt bei

900°C	10^{-10} Ampere/cm ² ,
1100°C	10^{-7} A/cm ² ,
2700°C	10 A/cm ² .

Der gesamte Emitterstrom I_E berechnet sich (ohne Berücksichtigung anderer Einflüsse, etwa der sich bildenden Raumladung) gemäß der Formel

$$I_E = C \cdot F \cdot T^2 \cdot e^{-\epsilon V_E / k T}$$

(C = Materialkonstante, F = Oberfläche von E, T = abs. Temp. von E, k = Boltzmannsche Konstante, ϵ = Elektronenladung.)

Damit wären im Prinzip die Vorgänge im Thermoionic-Generator skizziert. Über seine technische Einsatzfähigkeit entscheidet jedoch der Wirkungsgrad τ , dem wir uns nun zuwenden. (Lebensdauer, Kosten usw. spielen natürlich ebenfalls eine wichtige Rolle.)

Die Untersuchungen zeigten zunächst bei wachsender Temperatur von E ein rasches Ansteigen von τ , das aber nach Erreichen eines maximalen Wertes τ_{max} bei noch höheren Temperaturen infolge der Ohmschen Verluste wieder langsam absinkt. Da man durch die Art der Wärmequelle an eine bestimmte Arbeitstemperatur gebunden ist, müssen solche Elektrodenmaterialien gewählt werden, die bei dieser Temperatur den höchstmöglichen Wirkungsgrad besitzen. Dabei zeigt sich, daß (gegen die Erwartung) Elektroden mit hohem V_E ziemlich schlecht abschneiden. Beispielsweise liegt der günstigste Wert von V_E für die

Temperatur 1700° C bei etwa 3 Volt. Die theoretischen Maximalwirkungsgrade betragen für

Lanthanborid	16%	wenn die Betriebstemperatur ca. 1900° C erreicht
Mischcarbid	24%	wenn die Betriebstemperatur ca. 2200° C erreicht
Wolframthorid	9%	wenn die Betriebstemperatur ca. 2100° C erreicht
Tantalcarbid	16%	wenn die Betriebstemperatur ca. 2300° C erreicht
Wolfram	6%	wenn die Betriebstemperatur ca. 2600° C erreicht

Der Verwendung höherer Wärmegrade ist durch die einsetzende Verdampfung des Emitters eine Grenze gesetzt. Leider wird V_E um so größer, je temperaturbeständiger das Emittermaterial ist. Durch teilweise Bedeckung der Emitteroberfläche mit einer einatomigen Cäsiumschicht gelingt jedoch die Senkung von V_E unter günstigen Umständen auf ein Drittel. Der Verflüchtigung der Cs-Schicht wird durch Füllung des Vakuums zwischen E und K mit geringen Mengen von Cs-Gas entgegengewirkt. Dieselbe Cs-Füllung kann bei zweckmäßiger Auswahl der Materialien auch V_K auf dem optimalen Wert halten und die nachteiligen Folgen einer Verschmutzung der Kollektoroberfläche weitgehend kompensieren. In einem Falle (Mo-Elektroden, 2 Torr Cs-Druck) wurde ein Wirkungsgrad von 15% erreicht, der sich kaum von dem der Dampfmaschine unterscheidet.

Eine weitere Schwierigkeit bereitet die sich zwischen E und K ansammelnde negative Raumladung, die (bei den erstreben Emissionsstromdichten in der Größenordnung von 10 A/cm²) sehr erheblich den weiteren Elektronenaustritt unterbindet. Sie wird derzeit durch Erzeugung positiver Ionen unschädlich gemacht. Letztere werden im Verlaufe einer zusätzlichen Gasentladung durch Stoß erzeugt. In den Raum zwischen den Elektroden ist zu diesem Zwecke Edelgas eingebracht. Edelgasdioden dieser Art steigerten η auf 20%, sind aber äußerst anfällig gegen Temperaturänderungen und Verunreinigungen.

Um die oben angeführten Vorteile der Verwendung von Cs zu nutzen, wurden sogenannte Cs-Dioden konstruiert, bei denen im Cs-Dampf (durch den das Edelgas ersetzt ist) durch Kontaktionisation Ionen entstehen, wodurch die Anbringung des Zusatzentladungssystems der Edelgasdiode wegfällt. Unter Kontaktionisation wird die Tatsache verstanden, daß Atome einer Substanz mit kleinerem Austrittspotential bei Reflexion an Stoffen höherer Austrittsarbeit eine Ionisierung erfahren. Die schädigende Wirkung der negativen Raumladung wird bereits ausgeschaltet, wenn der positive Ionenstrom 0,2% des Elektronenstroms erreicht.

Die beachtlichen Vorteile der Cs-Diode werden allerdings durch die starke chemische Aktivität von Cs beeinträchtigt. Es steht jedoch zu erwarten, daß die systematische Durchforschung der in Betracht kommenden Substanzen zu einer wesentlichen Steigerung des Wirkungsgrades führen wird.

In den USA wurden auch sonnenbeheizte Geräte erfolgreich entwickelt.

Literatur: Umschau in W. u. T., Heft 11 und 12, 1. 6. und 15. 6. 1963, S. 339 bzw. S. 376.

Dr. J. Bohdanský (Brown Boveri, Mannheim): Elektrische Energie direkt aus Wärme.

Das Neutrino als kosmischer Informationsträger

Die Energie, die das Heer der Sterne seit undenklichen Zeiten in verschwenderischer Fülle nach allen Richtungen aussendet, stammt, wie wir heute mit Sicherheit wissen, aus nuklearen Prozessen. Bei jedem von ihnen, der sich nicht in einem bloßen Zerfallen in oder Aufbauen aus sonst unverändert bleibenden Teilchen bzw. Teilchenkomplexen erschöpft, ereignet sich eine Umwandlung von Protonen in Neutronen und umgekehrt. Mit dieser geht

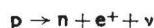
ausnahmslos die Emission bzw. Absorption von Neutrinos, Antineutrinos, Elektronen und Positronen einher. Da die erforderliche Temperatur in die Dutzende oder gar hunderte Millionen Grade geht, erfolgt die Neutrino-Produktion vorwiegend im innersten Teil der Sterne. Bei unserer Sonne macht der Durchmesser der heißen Region nur 1% ihres Gesamtdurchmessers aus. Infolge der nahezu völlig fehlenden Wechselwirkung zwischen Neutrinos und „normaler“ Materie durchdringen sie, mit Lichtgeschwindigkeit fliegend, den Sonnenball, als wäre er gar nicht vorhanden, für sie ist sogar die riesige Sonne durchsichtig. (Zur besseren Illustration: Obwohl in jeder Sekunde mindestens 50 Billionen Neutrinos den menschlichen Körper durchdringen, spielt sich in ihm während der ganzen Lebensdauer nur eine einzige Neutrino-reaktion ab.)

Die Entstehung von Neutrinos wäre an sich nicht aufregender als die Bildung der mannigfaltigen anderen Partikeln bei Kernumwandlungen, wenn jene nicht einen namhaften Betrag der Energie auf Nimmerwiedersehen mit sich nähmen. Dadurch beeinflussen sie nämlich den Verlauf der Sternentwicklung entscheidend und dürften für das Verständnis der Novaausbrüche ebenso bedeutsam sein wie vielleicht für die Klärung mancher kosmologischer Fragen.

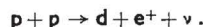
Welches sind nun die Neutrino-reaktionen in einem Stern?

1. p-p-Reaktionen

Bei der solaren Zentrumstemperatur von etwa 15 Millionen Grad stößt ein Proton ungefähr 10¹⁴mal je Sekunde mit anderen Protonen zusammen. (Die innersten Bereiche der Sonne sind von Protonengas hoher Dichte — etwa 100 g/cm³ — erfüllt.) Ganz selten erfolgt der Stoß zentral und mit so hoher Geschwindigkeit, daß trotz der namhaften Coulombabstoßung beide Protonen einander genügend nahe kommen, um Chancen für die Bildung eines Deuterons zu haben. Dazu ist überdies erforderlich, daß während dem winzigen Augenblick größter Annäherung das eine Proton gemäß



in ein Neutron übergeht. Das ereignet sich jedoch nur einmal unter 10 Millionen solchen engsten Kollisionen. Das neuentstandene Neutron verbleibt unter dem Einfluß der nur auf kleinste Distanzen wirksamen Kernkräfte an das unverwandelte Proton gebunden, sie haben sich zu einem Deuteron zusammengefügt:



Das Positron vereinigt sich fast augenblicklich mit einem der zahllosen herumschwirrenden Elektronen unter Emission zweier γ -Quanten, die alsbald von der Sonnenmaterie absorbiert werden. Das Neutrino hingegen verläßt die Sonne mit einem erheblichen Anteil der Reaktionsenergie. Da drei Teilchen entstanden, kann sich die Energie in jedem beliebigen Verhältnis auf sie verteilen. Bestünde die Möglichkeit einer Beobachtung des Energiespektrums dieser Neutrinos, so wäre es kontinuierlich.

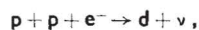
Trotz ihrer unerhört geringen Wahrscheinlichkeit findet die p-p-Reaktion dennoch in der Sonne häufig statt, denn diese enthält etwa 10⁵⁷ Nukleonen, von denen — vorsichtig geschätzt — 10⁵² in der heißen Region verweilen. Bei 10¹⁶ Kollisionen eines Nukleons pro Sekunde ereignen sich daher insgesamt 10⁶⁸ Zusammenstöße in jeder Sekunde im Core der Sonne. Bei dieser unvorstellbaren Zahl wiederholen sich selbst die unwahrscheinlichsten Konstellationen laufend.

Der weitere Ablauf des Geschehens ist bekannt: Durch Fusion zu He wird all die Energie frei, welche die Sonne seit Äonen mit unverminderter Kraft ausstrahlt. Dieser für unser irdisches Leben so bedeutungsvolle Vorgang müßte aber unterbleiben, wenn nicht die Emission eines Neutrinos zur rechten Zeit an der rechten Stelle erfolgte.

2. p-p-e-Reaktionen

Noch viel seltener kommt es zum gleichzeitigen Zusammentreffen zweier Protonen mit einem Elektron. In

einem solchen Falle folgt auf die Koinzidenz die Reaktion



welche lediglich zwei Partikeln produziert, ein Deuteron und ein Neutrino. Nach den klassischen Erhaltungssätzen der Mechanik müssen d und ν mit gleichgroßem aber entgegengesetztem Impuls auseinanderfliegen. Dann hat aber die Neutrinoenergie immer den gleichen Wert, und im Energiespektrum würde sich der p - p - e^- -Prozeß in einer scharfen Einzellinie manifestieren.

Es bedarf keiner großen Phantasie, um sich über die Bedeutung eines „Neutrinofernröhres“ klar zu werden. Mit ihm könnten die ausschlaggebenden Umwandlungen im Innersten der Sterne „gesehen“ werden und uns so viele neue Aufschlüsse geben, wie sie ein optisches Fernrohr einem eben erst sehend gewordenen Blinden vermittelt. Leider ist nicht einmal die Andeutung eines Weges zur Realisierung dieses Wunsches bekannt. Wer hier die Natur zu überlisten vermag, kann ewigen Ruhmes gewiß sein.

Die Sonne erschien im Neutrino teleskop als winziges Scheibchen von $18''$ scheinbarem Durchmesser, denn nur ihr Core, das 1% des Sonnendurchmessers bedeckt, emittiert Neutrinos.

3. e^-e^+ -Reaktionen

Im allgemeinen entstehen bei der Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares zwei Photonen. Aber einmal unter 10^{20} solchen Ereignissen bilden sich keine γ -Quanten, sondern statt dessen ein Neutrino-Antineutrino-Paar. Sein Entweichen bedeutet den unwiderruflichen Verlust von 1,02 MeV an Energie, denn das ist das Massenäquivalent des Paares e^- , e^+ . Bei hinreichend hohen Sternentemperaturen wird die Reaktion häufig genug, um das weitere Geschick des Sternes zu beeinflussen. Während die Neutrinos aus der Sonne (immerhin!) Energie im Ausmaß von 10% der Lichtenergie abführen, beträgt das Verhältnis der auf Neutrinos entfallenden zu der auf die elektromagnetische Strahlung entfallenden Energie

bei einer Sternentemperatur von $0,6 \cdot 10^9$ Grad 400,
bei einer Sternentemperatur von $1,0 \cdot 10^9$ Grad 10^4 ,
bei einer Sternentemperatur von $2,0 \cdot 10^9$ Grad 10^8 ,
bei einer Sternentemperatur von $4,0 \cdot 10^9$ Grad 10^{12} .

Die „Neutrinohelligkeit“ heißer Sterne übertrifft somit ihre optische Helligkeit um viele Größenordnungen.

Durch den hohen Energieverlust bei extremer Neutrinoemission beginnt der Stern in sich zusammenzustürzen. Die als Folge der Kontraktion freiwerdende Gravitationsenergie hält die Coretemperatur auf alter Höhe oder steigert sie sogar. Dadurch dauert die Neutrino flucht unvermindert oder verstärkt an, es geht immer mehr Energie verloren, bis der Zustand des Sternes nicht mehr stabil ist: am Himmel erscheint eine Supernova. Ihr Aufblitzen ist der letzte Akt einer Katastrophe, die sich, könnte man Neutrinos wie Licht beobachten, schon Jahre vorher durch beunruhigende Zunahme der Neutrinohelligkeit angekündigt hätte.

4. γ - γ -Reaktionen

Theoretisch müßten sich auch aus Photonenpaaren Neutrino paare bilden. Da das Neutrino um so eher mit der übrigen Materie in Wechselwirkung tritt, je höher seine Energie ist und die kosmische Höhenstrahlung eine ungemein kurzweilige elektromagnetische Komponente enthält, haben F. Reines (der 1956 maßgeblich am Neutrino nachweis beteiligt war) und sein Schüler C. C. Giamati in einem Bergwerk in Cleveland, USA, 600 m unter der Erdoberfläche ihre Geräte montiert und tatsächlich die γ - γ -Reaktion beobachtet. Ihr nächstes Vorhaben konzentriert sich auf den Nachweis der im Gefolge von Neutrinoabsorption auftretenden Lichtquanten. Die Absorption soll in einem Behälter mit über 1000 Tonnen reinsten Wassers erfolgen, der in solcher Tiefe aufgestellt ist, daß ihn keine geladenen Höhenstrahlteilchen erreichen können.

Einige Theoretiker erwägen sogar die Möglichkeit, daß eine gigantische Menge von Neutrinos niedriger Energie die Expansion des Weltalls verursachen könnten.

5. Erkennen von Antimaterie

Am Ende seiner 1959 gehaltenen Rede anlässlich der Verleihung des Nobelpreises kam E. Segrè, dessen Team 1956 als erstem die Erzeugung und der Nachweis des Antiprotons geglückt war, auf die sich nun abzeichnende Möglichkeit zu sprechen, bei Sternen Antimaterie von „normaler“ Materie zu unterscheiden.

Die ausschließlich optischen Methoden, mit denen wir heute die Natur der Himmelskörper erforschen, sind gegen Ladungskonjugation unempfindlich. D. h. wenn sämtliche geladenen Teilchen das Vorzeichen ihrer Ladung änderten (Antiwasserstoff bestünde dann aus einem Antiproton, um das ein Positron kreist), behielten die Energieniveaus ihre Werte bei und die elektromagnetische Strahlung, die vom Übergang zwischen diesen Niveaus rührt, wäre ganz dieselbe wie bei der uns vertrauten Materie. Spektroskopisch ist also Antimaterie nicht identifizierbar.

Ganz anders verhält sich die Sache bei Neutrinos. Aus der Sonne ergießt sich ununterbrochen ein Antineutrino strom in den Raum, der im Neutronenzerfall im Sonnen-core seine Quelle hat, wie schon oben dargelegt wurde. Ein Stern mit Antineutronen würde hingegen Neutrinos aussenden. Wären wir in der Lage, die Absorption der Neutrinos durch Neutronen, ferner die Absorption der Antineutrinos durch Protonen oder ähnliche Prozesse auch bei geringer Neutrino stromdichte zu registrieren, dann hätten wir das Mittel in der Hand, die Himmelskörper nach dem Vorzeichen der charakteristischen Quantenzahlen ihrer Bausteine zu klassifizieren. Vorläufig ist das nicht entfernt der Fall, der Nachweis der μ -Neutrinos erforderte z. B. monatelange Dauerbeobachtung.

Erst 1956 wurden die Zweifel an der Existenz des Neutrinos durch augenfällige Experimente beseitigt. Heute, nicht einmal ein Jahrzehnt später, steht vor unserem Geiste die Vision eines unermeßlichen Forschungsneulandes. Ob wohl die Vision von der Wirklichkeit abgelöst werden wird?

Literatur:

1. Scientific American, Bd. 207, August 1962, S. 91. P. Morrison: Neutrino Astronomy.
2. Phys. Blätter, Heft 6, 1960, S. 310. E. Segrè: Nukleare Eigenschaften von Antinukleonen.

Eine neuerliche Überprüfung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Obwohl die leidenschaftliche Diskussion, die beim Bekanntwerden der Relativitätstheorie die Gemüter erregte, längst beigelegt ist, werden von Zeit zu Zeit durch aus ernst zu nehmende Stimmen in den Kreisen der Wissenschaft laut, die sich kritisch äußern. Das ist gut, denn nur im Feuer der sachlichen Kritik aus berufenem Munde, im ewigen Zweifel und im Bedürfnis nach Überprüfung unter immer neuen Aspekten — auch scheinbar solidester Auffassungen — schält sich die Wahrheit aus ihren Hüllen.

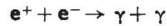
J. M. Fox äußerte 1962 im Am. J. Phys. S. 297 Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der Messungen, die zu der für die spezielle Relativitätstheorie grundlegenden Überzeugung von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit geführt hatten. Er wies darauf hin, daß das Licht, mit dem in den Versuchen von Michelson u. a. experimentiert wird, nicht direkt von der Lichtquelle — also den emittierenden Atomen des mehr oder weniger rasch bewegten Körpers — stammen, sondern erst durch Streuung an Elektronen usw. sekundär entstehen könnte. Gewisse Interferenzversuche mit ruhenden und bewegten Glasplatten schienen den Einwand zu stützen. In einem solchen Falle hätte man gar nicht den Versuch mit dem allein interessierenden Primärlichtstrahl angestellt und alle Folgerungen, angefangen

von der Deutung der Lorentztransformation, wären Illusionen gewesen.

D. Sadeh ersann daraufhin ein Experiment, das die Messung der Geschwindigkeit in und entgegengesetzt zu der Bewegungsrichtung ihrer Quelle fortschreitender γ -Strahlen aus den Flugzeiten zwischen Emission und Absorption gestattete.

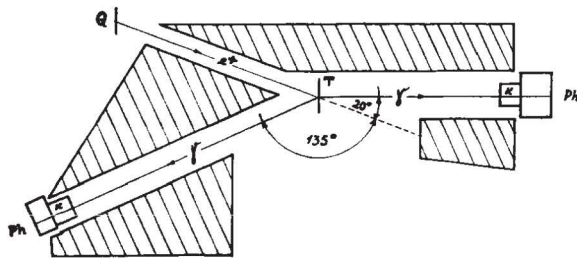
Die Versuchsanordnung war folgende:

Ein Scheibchen — 0,1 mm dick, 2 cm Durchmesser — aus Cu^{64} diente als Positronenquelle. Die Positronen flogen durch einen Pb-geschützten Kanal und trafen an dessen zweitem Ende auf das 1 mm starke Target aus Perspex, in dem sie gemäß



vernichtet wurden. Die beiden neugebildeten Photonen waren im Fluge entstanden und bewegten sich in nahezu diametraler Richtung weiter. Jedes von ihnen fiel 60 cm hinter dem Target auf je einen Photovervielfacher. Beide Vervielfacher standen mit einem Zeit-Amplituden-Wandler in Verbindung, der die Aufgabe übernahm, die Differenz der Ankunftszeiten der zwei Quanten in Impulshöhen zu verwandeln. Einzelkanäle stellten sicher, daß nur Photonen aus dem Energieintervall zwischen 0,511 und 0,65 MeV registriert wurden. (0,511 MeV ist das Massenäquivalent des Elektrons bzw. Positrons, das bei Zerstrahlen frei wird. Erfolgt die Vernichtung im Fluge, so erhöht sich der Betrag um die kinetische Energie, das ist im vorliegenden Versuch auf höchstens 0,65 MeV.)

Das elektronische System wurde unmittelbar vor und nach dem Versuch kontrolliert. Es erwies sich auf 0,25 nsek genau! (1 nsek = 1 Nanosekunde = 10^{-9} sek.) In 0,25 nsek schreitet das Licht um lächerliche 7,5 cm fort.



Q = Positronenquelle aus Cu^{64}
 T = Target (Perspex)
 K = NaJ-Kristall
 Ph = Photovervielfacher
 Schraffiert = Abschirmung

Die viermalige Wiederholung des Versuches mit geänderten Parametern führte stets zum gleichen Ergebnis: Die Geschwindigkeit der γ -Strahlen war in jeder Richtung dieselbe. D. h. die Geschwindigkeiten von Licht und Lichtquelle addieren sich nicht vektoriell, die Einsteinsche Auffassung deckt sich mit dem Experiment.

Als Zusatzkontrolle wurde der Versuch nach Entfernung des Targets nochmals ausgeführt. Der Effekt blieb aus, er stammte wirklich von den bewegten, nicht etwa von zufällig ruhenden Positronen.

Literatur: Phys. Rev. Lett., Bd. 10, Heft 7 v. 1. 4. 1963, S. 271. D. Sadeh: Experimental Evidence for the Constancy of the Velocity of Gamma Rays, Using Annihilation in Flight.

Die Funkenkammer

Die experimentelle Atomphysik steht und fällt mit den Geräten, welche die Teilchenbahnen in irgendeiner Weise erkennbar machen. Lange Zeit erfüllte die Wilsonsche Nebelkammer diese Forderung zufriedenstellend

und auch heute ist sie nicht aus dem Labor wegzudenken, besonders seit der kontinuierliche Betrieb möglich ist. Die Photoemulsion ist ein anderes, in ständigem Gebrauch stehendes Mittel dieser Art, dem wir viele Entdeckungen verdanken. Vor wenigen Jahren kam die Blaskammer auf, in der die Ionenspur eines Teilchens, welches eine überhitzte Flüssigkeit — etwa flüssigen Wasserstoff — durchfließt, zur Bildung einer Perlenkette von Gasbläschen Anlaß gibt. Die höhere Dichte der Flüssigkeit macht die Blaskammer bei hochenergetischen Partikeln der Nebelkammer überlegen. Zahlreiche neue Teilchen, von denen man in den letzten Jahren hörte, sind mit der Blaskammer aufgespürt worden.

Natürlich ist die Handhabung von flüssigem Wasserstoff kein reines Vergnügen, namentlich, wenn ein Versuch viele Wochen ununterbrochen andauert. Hiefür eignet sich die Funkenkammer hervorragend. Bei ihr handelt es sich um einen Satz vieler paralleler Metallplatten, die unter normalen Druckverhältnissen in einer Atmosphäre aus verschiedenen Edelgasen aufgestellt sind. Ein schnelles Teilchen erzeugt beim Durchfliegen des Plattensatzes in jedem Raumteil zwischen benachbarten Platten Ionen des Füllgases. Wird in dem Augenblick, in dem eben die Ionisierung stattfand, eine Spannung von mehreren kV angelegt, dann erfolgt die Funkenentladung an den Orten der Ionenbildung. Die Funkenkette, die auf diese Weise entsteht, wird von der Seite photographiert und markiert die Teilchenbahn. Der Zeitraum zwischen Ionisierung und Einschalten der Hochspannung darf nur wenige Mikrosekunden betragen. Das ist durch elektronische Steuerung ohne weiteres erreichbar.

Umgeben man die Funkenkammer mit Szintillationszählern in verschiedensten Schaltungen (gewöhnliche oder verzögerte Koinzidenz- oder Antikoinzidenzschaltung), so ist es möglich, energetisch sehr eng definierte Partikel zu registrieren.

Literatur: Umschau i. Wi. u. Te., Heft 13, 1. 6. 1963, S. 397/398.

Relationen zwischen Masse, Geschwindigkeit, Impuls, Energie in der relativistischen Mechanik

Ergänzend zu den in Nr. 3 der „Wiss. Nachr.“ gegebenen Formeln soll diesmal der Zusammenhang zwischen den mechanischen Größen

- m_0 = Ruhmasse
- m = Masse bei der Geschwindigkeit v
- v = Geschwindigkeit
- p = Impuls
- E = Gesamtenergie

eines Körpers (einer Partikel) formelmäßig festgehalten werden.

Aus je zwei der angeführten Größen ergeben sich die anderen durch elementare Auflösung des Gleichungssystems

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$p = m \cdot v$$

$$E = m \cdot c^2.$$

Nur in einem Falle mißlingt das, nämlich wenn m und E gegeben sind. Denn wegen der stets gültigen Beziehung $E = m \cdot c^2$ steckt in dem Paar m, E nur ein einziger wesentlicher Parameter. Das Ergebnis lautet:

Gegeben	m_0	m	v	p	E
m_0, m	*	*	$\frac{c}{m} \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}$	$c \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}$	$m \cdot c^2$
m_0, v	*	$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	*	$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	$\frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$
m_0, p	*	$\frac{1}{c} \cdot \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$	$\frac{c \cdot p}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$	*	$c \cdot \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$
m_0, E	*	$\frac{E}{c^2}$	$\frac{c}{E} \cdot \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$	$\frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$	*
m, v	$m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$	*	*	$m \cdot v$	$m \cdot c^2$
m, p	$\frac{1}{c} \cdot \sqrt{m^2 c^2 - p^2}$	*	$\frac{p}{m}$	*	$m \cdot c^2$
v, p	$\frac{p}{c} \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{v}\right)^2 - 1}$	$\frac{p}{v}$	*	*	$\frac{p \cdot c^2}{v}$
v, E	$\frac{E}{c^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$	$\frac{E}{c^2}$	*	$\frac{E v}{c^2}$	*
p, E	$\frac{1}{c^2} \cdot \sqrt{E^2 - p^2 c^2}$	$\frac{E}{c^2}$	$\frac{p \cdot c^2}{E}$	*	*

Astronomische Nachrichten

1. Überhelle Galaxien

Man hielt fünf Himmelsobjekte, die im 3. Cambridge Catalogue of Radiosources unter der Bezeichnung 3C-48, 3C-147, 3C-196, 3C-273, 3C-286 aufscheinen, für Sterne unserer eigenen Milchstraße, bis sich zwei von ihnen auf Grund genauerer Untersuchungen als ziemlich weit entfernte Galaxien von extremer Leuchtkraft erwiesen. Sie sind 10- bis 30mal heller als die hellsten bekannten Milchstraßen und etwa 100mal heller als unsere Milchstraße. Bei beiden stimmt die Radioposition mit der optischen am Himmel überein. Im Gegensatz zur Mehrheit der Radioquellen geht ihre Radiostrahlung von punktförmigen Quellen aus. Die Daten sind:

- a) 3C-273. Die Fluchtgeschwindigkeit beträgt

$$\frac{c}{6} = 50000 \text{ km/sek.}$$

Die Entfernung wird daher auf 2 Milliarden Lichtjahre geschätzt. Die scheinbare Größe ist $12,6^m$.

- b) 3C-48. Fluchtgeschwindigkeit $\frac{c}{3} = 100000 \text{ km/sek.}$

Entfernung 3,6 Milliarden Lichtjahre. (Der derzeitige Entfernungsrekord beträgt 5 Milliarden bis 6 Milliarden Lichtjahre.)

Die drei anderen angegebenen Objekte sollen nun gleichfalls genauer untersucht werden.

2. Der Wasserdampf in der Venusatmosphäre

Die Venussonde Mariner II enthielt zwei Mikrowellenradiometer, welche auf die Wellenlängen $\lambda = 13,5 \text{ mm}$

und $\lambda = 19 \text{ mm}$ ansprachen. Beide Frequenzen treten in der Wärmestrahlung der Venusoberfläche auf. Wäre in der Venusatmosphäre Wasserdampf in nennenswertem Maße vorhanden, so würde die $13,5\text{-mm}$ -Strahlung von ihm absorbiert werden und gelangte mehr oder weniger geschwächt in das eine Meßgerät. Die andere Welle wird vom Wasserdampf nicht absorbiert. Da beide Frequenzen ungeschwächt registriert wurden, befinden sich nur ganz geringe Wasserdampfmengen in der Gashölle der Venus.

Bei den Temperaturmessungen durch die Instrumente der Sonde ergab sich einigermaßen Übereinstimmung mit den von der Erde aus vorgenommenen Beobachtungen. Jedoch fiel ein Fleck in der Wolkenschicht der Venus auf, der um etwa 10° C kühler als seine Umgebung ist.

3. Höchstenergie von Höhenstrahlteilchen

Die ersten Kenntnisse von der Existenz anderer atomarer Partikeln als Elektronen, Protonen oder Neutronen erlangte man aus der Analyse der Spuren in Nebelkammern und Photoemulsionen, die von den primären Höhenstrahlteilchen hinterlassen wurden. Die ungeheure Energie, die sie mit sich führen, gibt nämlich zu den verschiedensten Materialisationen Anlaß. Als dieser Umstand erkannt war, schritt man zum Bau immer leistungsfähigerer Beschleunigungsmaschinen, um analoge Experimente anstellen zu können, ohne vom Zufall abhängig zu sein. Tatsächlich ist man heute in der Lage, Teilchenenergien bis zu $3,1 \cdot 10^{10} \text{ eV}$ labormäßig herzustellen und zur Verfügung zu haben. Dennoch wäre es falsch zu glauben, daß damit die höchsten in der Höhenstrahlung auftretenden Energien auch nur annähernd erreicht werden.

Wie in einem Aufsatz über Radiogalaxien in den „Phys. Blättern“, Heft 11, 1962, S. 489ff, hervorgeht, hat man neulich in der kosmischen Strahlung die unglaubliche Energie von 10^{19} eV festgestellt. Man vermutet, daß dieses

Teilchen aus der Radiogalaxis Virgo A stammt und durch Magnetfelder so enorm beschleunigt wurde. Einige kurze Rechnungen illustrieren die Bedeutung dieses Betrages.

a) Wäre die Energie eines einzigen derartigen Teilchens (vermutlich eines Protons) in einem Stoßakt von unten her auf einen Körper der Masse 1 kg vollständig übertragbar, dann würde dieser um 16 cm im Schwerfeld der Erde gehoben werden. Denn

$$10^{19} \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{19} \text{ erg} \div 0,16 \text{ kpm.}$$

b) Die Protonenmasse wächst bei 10^{19} eV auf das $n = 10^{19}$ -fache seiner Ruhmasse an. Nach Glg. (1) in Nr. 3 der „Wi. Nachr.“ ist $n = \frac{E^*}{E_0}$. Für E^* ist die Teilchenenergie 10^{19} eV, für E_0 die Ruheenergie $9,31 \cdot 10^8$ eV des Protons einzusetzen.

c) Die Geschwindigkeit eines 10^{19} -eV-Protons ist nur um 0,015 Å/sek kleiner als c . (Einsetzen in Glg. [3b] der Nr. 3 der „Wi. N.“.)

d) 1 g Wasserstoff (im Ruhezustand) enthält $6 \cdot 10^{23}$ Protonen. Besäße jedes von ihnen die Energie 10^{19} eV und würde wieder die Energie einer solchen Protonenwolke bei einem vom Erdmittelpunkt her erfolgenden Stoß verlustlos auf eine Gebirgsmasse von 10^6 km^3 — der Dachsteinblock dürfte ein Volumen von etwa 1000 km^3 besitzen; 10^6 km^3 kommen vielleicht den Alpen zu (?) — übergehen, dann wäre ein Emporschleudern der Masse um etwa 33 km die Folge. Bei einer Dichte von 3 g/cm^3 beläuft sich die Gebirgsmasse auf $3 \cdot 10^{18}$ kg. Andererseits wäre die Energie des Protonenbündels

$$6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{19} \text{ eV} = 6 \cdot 10^{42} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \div 10^{23} \text{ kpm.}$$

Daraus ergibt sich für die Schleuderhöhe $h = \frac{10^{23}}{3 \cdot 10^{18}}$ Meter = 33 km.

e) Stieße die Protonenwolke von d) unter den gleichen Umständen von der Sonne her gegen die Erde, dann träte eine Vergrößerung des Erdbahndurchmessers um etwa 28 Meter ein!

Die Anziehungskraft der Sonne auf die Erde ist

$$P = 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_e \cdot m_s}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} = 3,57 \cdot 10^{22} \text{ Newton} = 3,6 \cdot 10^{21} \text{ kp}$$

(Erdmasse $m_e = 6 \cdot 10^{24}$ kg, Sonnenmasse $m_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg, Erdbahnradius $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m.) Unter Berücksichtigung der Energie von 10^{23} kpm des Protonenklumpens ergibt sich

$$\Delta r = 10^{23} : 3,6 \cdot 10^{21} = 28 \text{ Meter.}$$

Literatur:

- Zu 1.: Scientific American, Mai 1963, S. 76/77.
Zu 2.: Scientific American, April 1963, S. 80/81.
Zu 3.: Phys. Blätter, Heft 11, Nov. 1962, S. 489ff.
Dr. Schmidt-Kahr: Die Natur der Radiogalaxien.

Optischer Transistor

Aus Galliumarsenid, das sich schon als Lasersubstanz bewährt hat, konnte R. F. Rutz (I.B.M.) einen optischen Transistor konstruieren, der hinsichtlich der Arbeitsgeschwindigkeit die konventionellen Transistoren übertrifft. Er besteht aus drei übereinander angeordneten Lagen. Das einlangende Signal bewirkt in der ersten Lage die Emission von Licht, welches die zweite Lage praktisch augenblicklich passiert und in der dritten Lage absorbiert wird. Die Absorption ist von einer Freisetzung von Elektronen begleitet, welche den ausgangsseitigen Strom konstituieren.

Bei den üblichen Transistoren muß zwecks Erzielung hoher Übertragungsgeschwindigkeiten die mittlere Schicht äußerst dünn angefertigt werden, was nicht nur technisch schwierig, sondern auch ziemlich teuer ist. Die Dicke der Mittelschicht des optischen Transistors ist hingegen angesichts der hohen Lichtgeschwindigkeit belanglos.

Literatur: Scientific American, April 1963, S. 84.

Nachweis der Zeitdilatation mittels Mössbauereffekt

Nachdem von Repka und Pound die Rotverschiebung der Spektrallinien im Schwerfeld unter Ausnutzung des Mössbauereffektes (siehe „Wiss. Nachr.“ Nr. 1) quantitativ in Übereinstimmung mit der Prognose der allgemeinen Relativitätstheorie gemessen worden war, ist man auch an die experimentelle Überprüfung des Uhrenparadoxons geschritten. Der Versuch wurde von J. J. Hay et al. im britischen Atomforschungsinstitut Harwell ausgeführt.

Bekanntlich geht eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr um den Faktor $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ langsamer als eine ruhende Uhr. Bei kleinen Werten von v bleibt die bewegte Uhr nach t sek um $\frac{t}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$ sek gegen die ruhende Uhr zurück. Verwendet man als Uhr radioaktive Atome, so muß ihre Zerfallsrate im Falle der Bewegung sinken.

J. J. Hay deponierte im Zentrum und am Rande einer Al-Drehscheibe (Durchmesser 19 cm) radioaktives Fe^{57} . Die Eisenatome in der Scheibenmitte waren die ruhende Uhr und dienten als Emittent der beim Zerfall freiwerdenden Photonen. Die am Rande sitzenden Eisenatome waren der bewegte Absorber. Der Mössbauereffekt ist bekanntlich schon bei minimalsten Unstimmigkeiten gestört.

Die Absorptionsakte wurden nun 30^{min} lang bei Drehzahlen von 50 und 500 Umdrehungen je Sekunde gezählt. Dem entspricht eine Absorbergeschwindigkeit von 90 bzw. 900 km/h. Die Verlangsamung des Zeitablaufes bei den zwei Geschwindigkeitsstufen hätte nach der obigen Formel im Beobachtungszeitraum $5 \cdot 10^{-10}$ sek ausmachen müssen. Innerhalb der Fehlergrenzen lieferte das Experiment denselben Wert.

Literatur: Scientific American, Februar 1963, S. 134—144. J. Bronowski: The Clock Paradoxon.

Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie

Die stürmische Entwicklung der Atomphysik bringt es mit sich, daß immer häufiger in Publikationen auf die Quantenfeldtheorie Bezug genommen wird. Es erscheint daher angezeigt, in größten Zügen über dieselbe zu berichten. Diese Absicht kann allerdings nur verwirklicht werden, wenn vorher die Grundgedanken der Quantenmechanik in Erinnerung gerufen werden.

A) Vorbemerkungen

1. **Variationsrechnung.** Bei der Variationsrechnung handelt es sich darum, im Integranden eines bestimmten Integrals für eine oder mehrere Variable Funktionen einzusetzen, die dem Integral einen extremen Wert verleihen. Die einfachste Gestalt, die ein solcher Ausdruck annehmen kann, ist

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} f(x, y, y') dx \rightarrow \text{Extr.}$$

Gesucht ist $y = \varphi(x)$. Die Bildkurve dieser Funktion heißt Extremale des Problems. Die Behandlung der Aufgabe führt in bekannter Weise zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung für y , der sogenannten Eulerschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Da die Extremalen häufig durch einen festen Anfangs- und Endpunkt $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ gehen müssen, also für y die Randwerte vorgeschrieben sind, ist mit der Lösung der Differentialgleichung die Lösung eines Randwertproblems verbunden.

Umgekehrt läßt sich jede Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' = F(x, y, y')$ als Eulersche Differentialgleichung eines Variationsproblems auffassen.

2. Das Hamiltonsche Prinzip. Die Benützung von Minimalprinzipien erwies sich in der Physik von großer Fruchtbarkeit. Besonders das Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung gestattet eine sehr elegante Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten, besonders wenn es durch allgemeine Koordinaten beschrieben wird.

Seien $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}$ irgendwelche (Kartesische oder krummlinige) Koordinaten von N materiellen Punkten, t die Zeit, T, U ihre kinetische bzw. potentielle Gesamtenergie. Dann stimmen die Eulerschen Gleichungen der Variationsaufgabe

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0,$$

die man auch nach Einführung der Lagrangefunktion $L = T - U$ in der Gestalt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0$$

schreiben kann, mit den gesuchten Bewegungsgleichungen überein. (L ist eine Funktion der Koordinaten q_i sowie deren ersten Ableitungen nach der Zeit, da ja in T die Geschwindigkeiten, die von den \dot{q}_i abhängen, stecken.) Sie lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Die Beschreibung eines Teilchens erfordert neben der Kenntnis der Lagekoordinaten auch die der Impulskoordinaten. Man definiert die verallgemeinerten Impulskoordinaten durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

obwohl dadurch die Dimension eines Impulses verlorengeht. Das spielt jedoch keine Rolle, weil die eben definierten p_i zur Berechnung des Impulses $m_i \cdot v_i$ ausreichen. Die mathematische Handhabung der p_i ist bedeutend bequemer.

Führt man die Hamiltonsche Funktion

$$H = \sum_i p_i \cdot \dot{q}_i - L$$

ein, dann nehmen die Bewegungsgleichungen die symmetrische Gestalt

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

an. Dies sind die wichtigen Hamiltonschen kanonischen Gleichungen der Dynamik.

Im Falle eines konservativen Systems bedeutet H die (konstante) Gesamtenergie

$$H = T + U.$$

Für einen einzigen Massenpunkt ($N = 1$) und Kartesische Koordinaten ist

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U(x, y, z),$$

denn

$$T = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

3. Randwertaufgaben. Die Zurückführung dynamischer Probleme auf das Hamiltonsche Prinzip und die mit der Auflösung der zugehörigen Eulerschen Gleichungen verbundenen Randbedingungen $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ machen eingehendere Untersuchungen von Randwertaufgaben erforderlich.

Es ist bekannt, daß Randwertaufgaben nicht immer lösbar sind. Kommt aber in der Differentialgleichung ein veränderlicher Parameter λ vor, dann gibt es gewisse Werte von λ — die sogenannten Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ für die die Randbedingungen erfüllbar werden. Die zugehörigen Lösungen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ heißen Eigenlösungen des Problems.

Ein einfaches Beispiel ist die beiderseits eingespannte Saite der Länge l . Sie genügt der Schwingungsdifferentialgleichung

$$y'' + \lambda \cdot y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y = C_1 \cos x \cdot \sqrt{\lambda} + C_2 \sin x \cdot \sqrt{\lambda}.$$

Setzt man die Randbedingungen

$$y(0) = y(l) = 0$$

in dieselbe ein, so ergibt sich

$$C_1 = 0, \quad C_2 \cdot \sin l \cdot \sqrt{\lambda} = 0.$$

Die letzte Gleichung führt auf die Eigenwerte

$$l \cdot \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Das Problem besitzt unendlich viele Eigenwerte λ_n mit den Eigenlösungen

$$\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \dots, \quad \varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \dots$$

Man spricht in diesem Fall von einem diskreten Eigenwertspektrum, doch gibt es auch Aufgaben mit einem kontinuierlichen Eigenwertspektrum, auf die wir aber nicht eingehen wollen. Im weiteren behandeln wir nur die ersteren.

Bei homogenen Randwertaufgaben sind die Eigenlösungen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Er kann durch eine zusätzliche Normierungsbedingung festgelegt werden.

Wie sich zeigen läßt, bilden die Eigenlösungen $\varphi_n(x)$ in allen für die Quantenmechanik interessierenden Fällen ein orthogonales Funktionensystem. D. h.: Sind $x_1 = a, x_2 = b$ die Abszissen der Randpunkte, dann gilt

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m^*(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \neq 0 & \text{für } n = m \end{cases}$$

(Der Stern bedeutet den konjugiert komplexen Ausdruck.) Um den noch unbestimmten Faktor in $\varphi_n(x)$ zweckmäßig zu wählen, fügt man die Normierungsbedingungen

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_n^*(x) \cdot dx = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

hinzu. Mit Hilfe des Kroneckerschen „ δ “ können Orthogonalitäts- und Normierungsgleichungen in einem angeschriebenen werden:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m^*(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Die $\varphi_n(x)$ bilden jetzt ein orthonormales Funktionensystem.

Besonders wichtig ist der Umstand, daß sich jede Funktion $\varphi(x)$ einer sehr ausgedehnten Funktionenklasse, wenn sie dieselben Randwerte annimmt, durch eine nach den Eigenlösungen $\varphi_n(x)$ fortschreitende Reihe darstellen läßt

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x).$$

Die Koeffizienten c_n berechnen sich in Fourierscher Weise gemäß

$$c_n = \int_a^b \varphi(x) \cdot \varphi_n^*(x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \int_a^b \varphi_v(x) \cdot \varphi_n^*(x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \cdot \delta_{vn} = c_n.$$

4. Operatoren. Ein Operator \hat{A} ist das Symbol für ein Verfahren, durch das einer Funktion $f(x)$ eine andere Funktion $g(x)$ zugeordnet wird

$$g(x) = \hat{A} f(x).$$

(Das aufgesetzte Dach soll in Herkunft andeuten, daß es sich um einen Operator handelt.) Bedeute etwa

$$\hat{D} = \frac{d}{dx} \dots \dots \text{Differenzieren,}$$

$$\hat{Q} = (\dots)^2 \dots \dots \text{Quadrieren,}$$

$$\hat{x} = x \dots \dots \dots \text{Multiplizieren mit } x,$$

dann gelten z. B. die Gleichungen

$$\hat{D} \sin x = \cos x, \quad \hat{Q}(x+1) = x^2 + 2x + 1, \quad \hat{x} e^x = x \cdot e^x.$$

Uns interessieren nur lineare Operatoren. Das sind solche, bei denen die Bildfunktion einer Linearkombination der Urfunktionen dieselbe Linearkombination der einzelnen Bildfunktionen ist. In Zeichen

$$\hat{L}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \cdot \hat{L}f(x) + c_2 \cdot \hat{L}g(x).$$

Unter den drei angeführten Operatoren sind \hat{D} und \hat{x} linear.

Mehrere Operatoren werden zusammengesetzt („multipliziert“), indem in der angegebenen Reihenfolge die ihnen entsprechenden Rechenvorgänge hintereinander zur Ausführung gelangen. Das Ergebnis ist im allgemeinen von der Reihenfolge abhängig, die Multiplikation von Operatoren ist nur in speziellen Fällen kommutativ. Z. B.:

$$\hat{D}\hat{x}(1-x^2) = \hat{D}(x-x^3) = 1-3x^2,$$

$$\hat{x}\hat{D}(1-x^2) = \hat{x}(-2x) = -2x^2.$$

Allgemein

$$\hat{D}\hat{x}f(x) = f(x) + x \cdot f'(x),$$

oder

$$\hat{x}\hat{D}f(x) = x \cdot f'(x)$$

$$(\hat{D}\hat{x} - \hat{x}\hat{D})f(x) = f(x).$$

Führt man \hat{E} als identischen Operator ein, der jede Funktion unverändert läßt $\hat{E}f(x) = f(x)$, so kann die letzte Vertauschungsrelation als reine Operatorgleichung notiert werden:

$$\hat{D}\hat{x} - \hat{x}\hat{D} = \hat{E}.$$

Die Vertauschbarkeit zweier Operatoren findet in

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

ihren formalen Ausdruck.

In der Quantenmechanik spielen selbstadjungierte (= Hermitesche) Operatoren die Hauptrolle, weil nur zu ihnen reelle Meßwerte physikalischer Größe gehören. \hat{A} ist Hermitesch, wenn die Relation

$$\int f(x) \hat{A} g(x) dx = \int g(x) \hat{A}^* f(x) dx$$

erfüllt ist.

Ein Operator \hat{A} läßt sich aber auch in Matrixform darstellen. Sei $g(x) = \hat{A}f(x)$. Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ mögen sich durch ein bestimmtes orthonormales Funktionensystem

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

darstellen lassen

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots,$$

$$g(x) = d_1 \varphi_1(x) + d_2 \varphi_2(x) + \dots.$$

Trägt man diese Reihen in die Gleichung $g(x) = \hat{A}f(x)$ ein

$$\sum_n d_n \cdot \varphi_n(x) = \hat{A} \sum_n c_n \cdot \varphi_n(x),$$

multipliziert beiderseits mit $\varphi_m^*(x)$ und integriert, so erhält man wegen der Orthogonalität

$$d_m = \sum_n c_n \int \varphi_m^*(x) \cdot \hat{A} \varphi_n(x) dx = \sum_n A_{mn} \cdot c_n,$$

wenn

$$A_{mn} = \int \varphi_m^*(x) \hat{A} \varphi_n(x) dx$$

eingeführt wird. Die Größen A_{mn} bilden also die Elemente einer Matrix, durch die eine lineare Abbildung des „Vektors“ $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ auf den „Vektor“ $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ vermittelt wird. Zu jedem derartigen „Vektor“ des Hilbertschen Raumes gehört eine Funktion, deren Entwicklungskoeffizienten die Komponenten des Vektors sind.

Man hätte denselben Operator mit Hilfe eines zweiten Orthonormalsystems auf Matrixform bringen können, wobei die Matrixelemente natürlich andere — A'_{mn} — gewesen wären. \hat{A} läßt also so viele Matrixdarstellungen zu, als es Orthonormalsysteme gibt, nach deren Elementen Ur- und Bildfunktion entwickelbar sind. Zwischen zwei verschiedenen Matrixdarstellungen A_{mn} , A'_{mn} besteht eine sehr schöne Beziehung. Die beiden Matrizen gehen nämlich durch eine unitäre Transformation S gemäß

$$A' = S^{-1} A S$$

ineinander über. (Das Weglassen der Indizes bedeutet, daß in der letzten Gleichung die Matrizen selbst gemeint sind.) S heißt unitär, wenn man die inverse Matrix S^{-1} erhält, indem man zur konjugiert komplexen Matrix S^* übergeht und in ihr Zeilen und Spalten vertauscht (transponiert). Falls S reell ist, ist die unitäre Matrix eine Drehmatrix (orthogonale Matrix).

Wenn der Operator Hermitesch ist, dann auch seine Matrix. D. h. Elemente, die zur Hauptdiagonale symmetrisch liegen, sind konjugiert komplex

$$A_{mn} = A_{nm}^*.$$

B. Die Quantenmechanik

Nachdem M. Planck im Jahre 1900 anlässlich der Untersuchung der Strahlung des schwarzen Körpers den Begriff des Energiequantums einzuführen gezwungen war, dauerte es gar nicht lange, bis A. Einstein im Lichtquantengesetz eine der bedeutungsvollsten Anwendungen der neuen Gedankengänge fand. Der Widerspruch zwischen der höchsten Triumphe feiernden Maxwellschen Theorie und dem Rutherford'schen Atommodell, das strahlungsfreie Umläufe der Elektronen um den Kern vorsah, obwohl diese Bewegung keine gleichförmige ist, veranlaßte N. Bohr zum nächsten Schritt. Er bestand in der Formulierung der sogenannten Quantenbedingungen, die aus der Menge der möglichen Elektronenbahnen gewisse strahlungsfreie „Quantenbahnen“ aussonderten. Damit war einer sehr weitgehenden theoretischen Deutung der Spektren der Boden bereitet. Binnen 20 Jahren wuchs die Lehre von den Spektren fast ins Uferlose an und verschaffte uns tiefreichende Einblicke in den Aufbau der Materie.

Freilich, die Quantenbedingungen hingen theoretisch vollkommen in der Luft, der außerordentliche Erfolg bei der Anwendung ließ aber vermuten, daß Bohr einer fundamentalen Verhaltensweise der Natur auf die Spur gekommen war. Außerdem lernte man trotz allen stürmischen Erfolgen einsehen, daß gewisse grundsätzliche Schwierigkeiten bestanden. Obwohl sich das Licht z. B. in Kugelwellen ausbreitet, erfolgt die Absorption des ganzen Lichtquants innerhalb des winzigen vom Atom eingenommenen Volumens. Oder: Beim Comptoneffekt einnimmt sich das Photon wie ein elastischer Körper mit der Masse $\frac{h\nu}{c^2}$, ein Befund, der auf der Grundlage der Wellentheorie des Lichts unerklärlich bleibt.

Diese und andere Überlegungen veranlaßten L. de Broglie in den frühen zwanziger Jahren, für Licht und für Materie sowohl den korpuskularen als auch den undulatorischen Aspekt theoretisch anzuerkennen und mathematisch durchzuführen. Danach entsprach einem Teilchen (Masse m , Geschwindigkeit v , Impuls $p = mv$) eine Welle mit der sogenannten „de-Broglie-Wellenlänge“ $\lambda = \frac{h}{p} =$

$$= \frac{h}{mv}. \text{ Ein Photon der Energie } h\nu \text{ verhielt sich andererseits}$$

wie eine Korpuskel der Masse $m = \frac{h\nu}{c^2}$, der Geschwindigkeit c und dem Impuls $p = \frac{h\nu}{c}$.

Die Dualität des Wellen- und Teilchenbildes hatte in der Physik ihren legitimen Platz gefunden.

Wenige Jahre später wurde der de Brogliesche Ansatz in den berühmten Versuchen über die Beugung von Elektronenwellen von Davisson und Germer als in Einklang mit der Wirklichkeit stehend erkannt.

Das vorliegende Material erhielt in den Jahren 1925 bis 1927 durch W. Heisenberg und E. Schrödinger den längst fälligen großartigen theoretischen Überbau in Form der Quanten- bzw. Wellenmechanik. Beide Theorien wurden von Schrödinger als mathematisch äquivalent nachgewiesen, so daß es lediglich eine Sache der Rechenökonomie ist, von welcher Seite her man die Lösung eines anfallenden Problems in Angriff nimmt.

Beginnen wir mit einem der wichtigsten Begriffe der Quantenmechanik, der ψ -Funktion. Bewegt sich ein Teilchen, etwa ein Elektron, in einem Kraftfeld, dann wird nach später zu nennenden Regeln eine Differentialgleichung für die zugehörige ψ -Funktion aufgestellt, die unter dem Namen „Schrödingergleichung“ bekannt ist. Die Lösung dieser Gleichung konstituiert ein Randwertproblem, weil an die ψ -Funktion gewisse recht einleuchtende Randbedingungen gestellt werden, nämlich Eindeutigkeit, Verschwinden im Unendlichen und Regularitätsforderungen.

Der Parameter in der Schrödingergleichung, von dessen Größe die Lösbarkeit des Randwertproblems abhängt, ist die Energie E . D. h. nur für bestimmte Werte E_n derselben befindet sich das Teilchen in einem realisierbaren Zustand, der durch die zugehörige Eigenfunktion ψ_n charakterisiert wird. Damit ist aber die Quantisierung auf ganz natürliche Weise durchgeführt und die große diesbezügliche Arbeit Schrödingers in den Annalen der Physik trägt den bezeichnenden Titel: „Quantisierung als Eigenwertproblem“.

Die physikalische Deutung der komplexen ψ -Funktion wurde von M. Born vorgeschlagen und hat sich in allen Fällen glänzend bewährt. Danach ist die Norm von ψ , d. h. das Produkt $\psi \cdot \psi^*$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, das Teilchen in dem ψ entsprechenden Zustand am Orte (x, y, z) vorzufinden. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Gebiet vom Volumen V ist daher

$$w = \iiint_V \psi(x, y, z) \cdot \psi^*(x, y, z) dx \cdot dy \cdot dz.$$

(In Hinkunft unterdrücken wir y und z , um die Formeln einfacher zu gestalten.) Erstreckt sich V über den ganzen Raum, dann muß $w=1$ werden, woraus sich die Normierungsbedingung für die ψ -Funktion ergibt, die zunächst nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist.

Der Aufstellung der Schrödingergleichung muß die Erörterung der Verwendung von Operatoren in der Quantenmechanik vorangehen. Infolge der Bornschen Interpretation haben viele quantenmechanische Aussagen Wahrscheinlichkeitscharakter. Dann ist es aber wichtig, den Erwartungswert \bar{L} einer zu messenden physikalischen Größe L zu erkennen. Er wird mit Hilfe eines der Größe L zugeordneten Operators \hat{L} aus der Gleichung

$$\bar{L} = \int \psi^* \hat{L} \psi dx$$

berechnet. Dazu kommt man durch eine zu den in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Verfahren analoge Überlegung. Mit Hilfe einiger Umformungen ergibt sich die Zweckmäßigkeit der Einführung von Operatoren und damit die eben angeschriebene Gleichung für \bar{L} . Die Ermittlung von \hat{L} geschieht in folgender Weise. Die Größe L läßt sich durch die Lage- und Impulskoordinaten $x, y, z; p_x, p_y, p_z$ unter Berücksichtigung der jeweils herrschenden physikalischen Bedingungen ausdrücken:

$L = L(x, y, z; p_x, p_y, p_z)$. \hat{L} erhält man aus den einfachsten Operatoren $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}; \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$, wenn man diese algebraisch in der gleichen Weise zusammensetzt, wie es für die entsprechenden Größen x, \dots durch die Funktion $L(x, \dots)$ vorgeschrieben ist. Das Problem reduziert sich somit auf die Kenntnis von $\hat{x}, \dots \hat{p}_x, \dots$ Wie die Rechnung zeigt, haben diese Operatoren die Form

$$\hat{x} = \cdot x, \quad \hat{y} = \cdot y, \quad \hat{z} = \cdot z,$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Man beachte, daß einer Größe nicht schlechthin ein Operator zugeordnet ist, sondern in ihn auch der physikalische Zustand eingeht, da letzterer die Art der Funktion L beeinflusst.

Als Beispiel führen wir den Energieoperator \hat{E} eines kraftfreien Teilchens mit der Masse m und dem Impuls \mathbf{p} an. Wegen

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

ist

$$\hat{E} = \frac{1}{2m} \left(i^2 \hbar^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i^2 \hbar^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i^2 \hbar^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta.$$

Δ bezeichnet wie üblich den Laplaceoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Matrix, die zu einem selbstadjungierten Operator gehört, immer Hermitesch ist. Ferner folgt aus der Selbstadjungiertheit

$$\bar{L} = \int \psi^* \hat{L} \psi dx = \int \psi \hat{L}^* \psi^* dx = \bar{L}^*,$$

d. h. stets und nur in diesem Fall ist der physikalische Meßwert \bar{L} reell.

Zu wichtigen Folgerungen führt die Betrachtung des mittleren Schwankungsquadrates

$$\overline{\Delta L^2} = (\bar{L} - \bar{L})^2$$

von L . Da \bar{L} eine Zahl ist, gilt unter Benützung der Selbstadjungiertheit

$$\begin{aligned} \overline{\Delta L^2} &= \int \psi^* (\hat{L} L)^2 \psi dx = \int (\Delta \hat{L} \psi) (\Delta \hat{L}^* \psi^*) dx \\ &= \int |\Delta \hat{L} \psi|^2 dx > 0, \end{aligned}$$

denn rechts und links stehen keine negativen Größen. Wenn nun L in einem bestimmten Zustand lediglich einen Wert L_n anzunehmen vermag, ist $\overline{\Delta L^2} = 0$. Das ist nur möglich, wenn der Integrand identisch verschwindet. Also wird

$$\Delta \hat{L} \psi = \hat{L} \psi - L \psi = 0$$

und wir haben eine Differentialgleichung gewonnen, welche die Eigenwerte L_n von L liefert:

$$\boxed{\hat{L} \psi = L \psi}.$$

Die allgemeine Wellenfunktion ψ ist eine Linearkombination der ψ_n

$$\psi = \sum_n c_n \cdot \psi_n.$$

Setzt man dies in $\bar{L} = \int \psi^* \hat{L} \psi dx$ ein und berücksichtigt die Orthogonalität der ψ_n , so wird

$$\bar{L} = \sum_n |c_n|^2 \cdot L_n.$$

Auf Grund weiterer Überlegungen erlauben die Koeffizienten $|c_n|^2$ eine klare physikalische Interpretation: $|c_n|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei Messung der Größe L gerade den Wert L_n zu erhalten.

Zwei Größen nehmen genau dann gleichzeitig bestimmte Werte an, wenn ihre Operatoren \hat{L}, \hat{M} vertauschbar sind

$$\hat{L} \hat{M} - \hat{M} \hat{L} = 0.$$

Wenn diese Vertauschbarkeitsrelation nicht gilt, ist es unmöglich, L und M gleichzeitig mit beliebig hoher

Genauigkeit zu messen. Notwendig und hinreichend für $\hat{M} - \hat{M} = 0$ ist die Existenz eines gemeinsamen Systems von Eigenfunktionen und Eigenwerten für L und für M. Schließlich erhält man die für die Quantentheorie fundamentalen Heisenbergschen Unschärferelationen zwischen kanonisch konjugierten Größen (d. s. solche, deren Produkt die Dimension einer Wirkung hat)

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Eine interessante Konsequenz daraus ist die folgende. Die Gesamtenergie E eines Teilchens ist eine Funktion der Lage- und der Impulskoordinaten. Im Falle $E=0$ wäre sowohl die kinetische (Funktion der Impulse) als auch die potentielle Energie (Funktion der Koordinaten) Null. Somit wären Impulse und Koordinaten exakt gemessen. Dies widerspricht der Unschärferelation, also muß immer eine gewisse Nullpunktsenergie vorhanden sein.

Nunmehr sind wir in der Lage, die zeitabhängige Schrödingergleichung für die Wellenfunktion ψ anzugeben. Zur Hamiltonfunktion H (bei konservativen Systemen gleich der Summe $E_{kin} + E_{pot}$) gehört der Hamiltonoperator \hat{H} . Mit Benützung desselben lautet die Schrödingergleichung

$$i\hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi.$$

Bei Fehlen eines Magnetfeldes reduziert sie sich auf

$$i\hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \cdot \psi.$$

Abschließend untersuchen wir den Ausdruck für den Erwartungswert \bar{L} in der Matrixdarstellung. Wird $\psi = \sum_n c_n \cdot \psi_n$ in $\hat{L}\psi = L\psi$ substituiert, so erhält man nach

Multiplikation mit ψ_m^* und Integration

$$\sum_n L_{mn} \cdot c_n = L \cdot c_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Das ist ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen für die Koeffizienten c_k

$$\begin{aligned} (L_{11} - L) \cdot c_1 + L_{12} \cdot c_2 + \dots &= 0 \\ L_{21} \cdot c_1 + (L_{22} - L) \cdot c_2 + \dots &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

welches nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} L_{11} - L & L_{12} & \dots \\ L_{21} & L_{22} - L & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

verschwindet. Die Auflösung ergibt eine transzendente Gleichung für L. Die unendlich vielen Wurzeln $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n, \dots$ sind die Eigenwerte von L. Besonders einfach wird die Rechnung, wenn die Matrix (L_{mn}) in Diagonalform vorliegt

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & L_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ihre Diagonalelemente sind bereits die gesuchten Eigenwerte

$$L_{11} = L_1, L_{22} = L_2, \dots, L_{nn} = L_n, \dots,$$

denn sie sind die Lösungen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} L_{11} - L & 0 & \dots \\ 0 & L_{22} - L & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann die Auflösung der transzendenten Gleichung aber auch vermeiden. Wie bereits ausgeführt wurde, gehen die verschiedenen Darstellungsmatrizen, die zu

einer Größe L gehören, durch unitäre Transformationen ineinander über. Gelingt es, eine solche zu finden, die L_{mn} auf Diagonalform bringt, so ist das Problem der Ermittlung der Eigenwerte ebenfalls gelöst. Im Grunde genommen handelt es sich dabei um die Hauptachsentransformation im Hilbertschen Raum. Denn durch sie wird die quadratische Form mit abzählbar unendlich vielen Variablen

$$\sum_m \sum_n L_{mn} \cdot x_m \cdot x_n$$

in eine Summe reinquadratischer Glieder

$$\sum_n L_n \cdot y_n^2$$

verwandelt. Die ursprüngliche Koeffizientenmatrix (L_{mn}) der quadratischen Form nimmt danach die Gestalt

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & L_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

an. An diesem Beispiel vermag man besonders eindringlich zu erkennen, wie sich plötzliche und unerwartete theoretische Kontakte zwischen sehr entrückten Gebieten der Mathematik — hier der Theorie des Hilbertschen Raumes — und brennenden physikalischen Fragestellungen ergeben. Nach einem bekannten Wort ist eben die abstrakte Mathematik von heute die theoretische Physik von morgen und die Technik von übermorgen.

C) Die Quantenfeldtheorie

Ein Feld ist gegeben durch Feldfunktionen $\psi_n(x, t)$, die gewissen Differentialgleichungen 2. Ordnung, den sogenannten Feldgleichungen, genügen. (Wir erinnern an die früher getroffene Abmachung, daß x an Stelle von x, y, z stehen soll. Außerdem möge in Hinkunft mit h das durch 2π dividierte Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet werden.) In der Elektrodynamik sind die elektrischen und magnetischen Feldstärkekomponenten $E_1(x, t), E_2(x, t), E_3(x, t), H_1(x, t), H_2(x, t), H_3(x, t)$ die Feldfunktionen, die die aus den Maxwell'schen Gleichungen entspringende Wellengleichung erfüllen. In der Quantentheorie beschreibt die ψ -Funktion das Feld, als Feldgleichung ist die Schrödingergleichung anzusehen.

Die Feldgleichungen lassen sich mit der Hamiltonschen Theorie in enge Verbindung bringen. Man kann nämlich eine Funktion L_0 von $\psi_n, \dot{\psi}_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial t}, \frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ (der Punkt bedeutet stets die partielle Ableitung nach der Zeit)

$$L_0 \left(\psi_n, \dot{\psi}_n, \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) \quad (1)$$

derart aufstellen — sie wird differentielle Lagrange-funktion genannt —, daß die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial L_0}{\partial \psi_n} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\psi}_n} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\psi}_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

mit den ursprünglichen Feldgleichungen identisch werden, wenn man für L_0 den Ausdruck (1) einsetzt. (2) ist mit den ursprünglichen Feldgleichungen äquivalent. Die Gleichungen (2) können als Eulersche Differentialgleichungen des Variationsproblems

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx L_0 \rightarrow \text{Extr.}$$

aufgefaßt werden. Damit ist die gesuchte Verbindung hergestellt. Den Lagekoordinaten q_n und ihren zeitlichen Ableitungen \dot{q}_n der Punktdynamik entsprechen hier formal $\psi_n, \dot{\psi}_n$, allerdings mit einem wesentlichen Unterschied: Während die q_n nur von der Zeit abhängen, sind die ψ_n auch Funktionen von x. Um die Diskrepanz zu beseitigen, denkt man sich den Raum in kleine Zellen $\delta x^{(r)}$ unterteilt. $\psi_{nr}(t)$ sei der Mittelwert von ψ_n in der r-ten Zelle. Numeriert man alle $\psi_{n,r}(t)$ mit nur einem

Index durch, so erhält man Funktionen $\psi_k(t)$ von t allein. Der Grenzübergang $\delta x^{(x)} \rightarrow 0$ schließt das Verfahren ab. Schreiben wir statt $\psi_k(t)$ wieder $\psi_n(x, t)$, dann kommt der Variablen x die Rolle eines Index zu. Da der Grenzübergang die Zellenzahl über alle Grenzen steigert, haben wir es im Analogon der Punktdynamik mit einem System von unendlich vielen Massenpunkten (Freiheitsgraden) zu tun. An Stelle der über die Massenpunkte zu erstreckenden Summen der Hamiltonschen Theorie sind Integrationen (Riemannsche Summen!) vorzunehmen. Führen wir als integrale Lagrangefunktion

$$L = \int dx \cdot L_0$$

ein, so entspringen die Feldgleichungen dem Variationsprinzip

$$\int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt \rightarrow \text{Extr.}$$

Das weitere Verfahren stimmt formal mit dem Hamiltonschen überein. Da die ψ_n den Lagerkoordinaten q_n entsprechen, werden die Impulskoordinaten π_n (siehe Vorbemerkungen) durch

$$\pi_n = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\psi}_n} \quad (3)$$

definiert. Ferner wird völlig analog als differentielle Hamiltonfunktion

$$H_0 = \sum_n \pi_n \cdot \dot{\psi}_n - L, \quad (4a)$$

als integrale Hamiltonfunktion

$$H = \int H_0 \cdot dx \quad (4b)$$

eingeführt. Durch Elimination der $\dot{\psi}_n$ aus (3) und (4a) ergibt sich H_0 als Funktion der ψ_n und ihrer räumlichen Ableitungen (nicht der zeitlichen!)

$$H_0 = H_0 \left(\psi_n, \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right).$$

Es gelten die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\psi}_k = \frac{\partial H_0}{\partial \pi_k}, \quad \dot{\pi}_k = - \frac{\partial H_0}{\partial \psi_k}. \quad (5)$$

Zur Erläuterung des Gesagten ziehen wir die Schrödinger-Gordonsche Wellengleichung heran. Sie enthält angenehmerweise nur eine einzige Funktion ψ :

$$(\square - m^2) \psi \equiv \Delta \psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} - m^2 \psi = 0. \quad (6)$$

\square ist der Differentialoperator $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$, Δ der Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Die differentielle Lagrangefunktion, die den an sie gestellten Anforderungen genügt, ist hier

$$L_0 = \frac{1}{2} (\dot{\psi}^2 - c^2 |\text{grad } \psi|^2 - c^2 m^2 \psi^2). \quad (7)$$

Durch Substitution von (7) in (2) erhält man die Wellengleichung (6) wieder zurück. Dies verifiziert eine kurze Rechnung unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial L_0}{\partial \psi} = \dot{\psi}, \quad \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\psi}} = -c^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial L_0}{\partial \psi} = -c^2 m^2 \psi.$$

Gemäß (3) und (4a) wird ferner

$$\pi = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}, \quad H_0 = \frac{1}{2} (\pi^2 + c^2 |\text{grad } \psi|^2 + c^2 m^2 \psi^2). \quad (8)$$

Um auch auf den Boden der Quantentheorie zu gelangen, haben wir noch das Feld zu quantisieren. Das

geschieht durch Zuordnung solcher Hermitescher Operatoren \hat{q}_k, \hat{p}_k zu den Lage- und Impulskoordinaten q_k, p_k , daß zwischen ihnen überdies die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0, \quad [\hat{p}_j, \hat{q}_k] = -i\hbar \cdot \delta_{jk}. \quad (9)$$

gelten. In (9) bedeutet die eckige Klammer die Poissonklammer $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases} \text{ ist das Kroneckersche } \delta.$$

Die Funktionen ψ_n, π_n sind also durch Hermitesche Operatoren $\hat{\psi}_n, \hat{\pi}_n$ zu ersetzen. Auf der rechten Seite der dritten Vertauschungsrelation (9) muß ferner noch der Faktor $\delta(x - x')$ hinzugefügt werden. Dann schreibt sich (9)

$$[\hat{\psi}_n(x), \hat{\psi}_m(x')] = [\hat{\pi}_n(x), \hat{\pi}_m(x')] = 0, \\ [\hat{\pi}_n(x), \hat{\psi}_m(x')] = -i\hbar \cdot \delta_{nm} \cdot \delta(x - x'). \quad (10)$$

Die Abhängigkeit von der Zeit wird zunächst außer acht gelassen, man untersucht die Verhältnisse in einem festen Zeitpunkt.

Der Faktor $\delta(x - x')$ bedeutet die Diracsche δ -Funktion, eine Verallgemeinerung des Kroneckerschen δ . Letzteres ist lediglich für ganzzahlige Werte der Indizes n, m erklärt. Sobald aber die Indizes kontinuierlich veränderlich sind — etwa Koordinaten x, x' darstellen —, ist eine Neufestsetzung der Definition erforderlich:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x' \\ \text{für } x = x' & \text{nicht definiert,} \end{cases} \quad (11)$$

aber derart, daß

$$\int dx \cdot f(x) \cdot \delta(x - x') = f(x').$$

$\delta(x - x')$ ist somit keine Funktion im üblichen Sinne sondern ein äußerst verwendungsfähiges Symbol.

Da im folgenden $\psi_n, \dot{\psi}_n, \pi_n, \dot{\pi}_n$ ausnahmslos Operatoren bedeuten werden, ebenso H_0, H usw., wollen wir die Kennzeichnung derselben durch Aufsetzen des Daches in Hinkunft unterlassen. H_0 ist also ab jetzt der Operator der Energiedichte, H der Operator der Gesamtenergie, falls dieselbe zeitlich konstant ist. Seine Eigenwerte sind die Energien der möglichen Feldzustände.

Ungeachtet der Erhaltung der Gesamtenergie fluktuieren ihre Anteile im allgemeinen im Raum. Das äußert sich in Schwankungen der örtlichen Energiedichte verbunden mit einer Energieströmung, deren Operator S_0 sei. H_0 und S_0 erfüllen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + \text{div } S_0 = 0.$$

S_0 berechnet sich in einfacher Weise aus L_0 . Das Feld besitzt auch eine Impulsdichte G_0 . Der gesamte Feldimpuls ist

$$G = \int dx \cdot G_0.$$

Wie in der speziellen Relativitätstheorie lassen sich H_0, S_0, G_0 im Energieimpulstensor T_0 einheitlich zusammenfassen.

Durch die Möglichkeit, Impulse, Energien und andere physikalische Größen zu berechnen, fühlen wir wieder erleichtert in der sehr formalen Theorie den Boden der Wirklichkeit unter den Füßen. Außerdem stellt sich heraus, daß bei komplexen Feldfunktionen ψ — merkwürdigerweise nicht bei reellen — eine elektrische Ladungs- und Stromdichte definiert werden kann, für die ebenfalls eine Kontinuitätsgleichung besteht.

Reelle ψ -Funktionen gehören zu neutralen, komplexe zu ladungsbehafteten Feldern.

An den Formalismus muß noch eine wichtige Forderung gestellt werden, soll er nicht in Konflikt mit der relativistischen Dynamik geraten: Der Kalkül muß Lorentz-invariant sein. Die erste Voraussetzung dafür ist die Invarianz von L_0 . Wegen der Invarianz des Raum-Zeit-Elements $dx \cdot dt$ ist dann nämlich auch

$$I = \int dt \int dx \cdot L_0$$

Lorentzinvariant und damit alle aus dem Variationsprinzip hervorgehenden Umformungen. Weniger einfach ist das gequantelte Feld in dieser Richtung zu untersuchen. Dazu ist der Übergang zu zeitabhängigen Operatoren $\psi_n(x, t)$, $\pi_n(x, t)$ nötig. Bis jetzt wurden ja nur $\psi_n(x, 0) = \psi_n(x)$, $\pi_n(x, 0) = \pi_n(x)$ behandelt. Angesichts des beschränkten Rahmens dieses Aufsatzes möge die Feststellung genügen, daß es auf die Invarianz der Vertauschungsrelationen ankommt und diese tatsächlich zutrifft.

Als einfaches Beispiel wurde bereits die Schrödinger-Gordonsche Gleichung angeführt. In ihr tritt nur eine einzige (reelle) ψ -Funktion auf, weshalb das Feld als ein skalares angesprochen werden darf. Auf Grund der Rechnung sind die Eigenwerte der Energie nach Abzug der Nullpunktenergie $H_{NP} = \frac{h}{2} \cdot \sum_k \omega_k$ mit $\omega_k = c \cdot \sqrt{m^2 + k^2}$

$$H_{N_1 N_2 \dots} - H_{NP} = \sum_k N_k \cdot h \omega_k.$$

N_1, N_2, \dots sind Quantenzahlen, k ist ein Summationsindex, der nichts mit dem Index der ψ -Funktionen zu tun hat, es tritt ja nur eine einzige auf. Die Interpretation der letzten Gleichung liegt auf der Hand: Die Energie des Feldes ist ebenso groß, als wenn N_1 Teilchen der Energie $h\omega_1$, N_2 Teilchen der Energie $h\omega_2, \dots$ vorhanden wären. Die zugehörigen Teilchenimpulse sind bzw. $h, 2h, \dots$, denn für den gesamten Feldimpuls erhält man die Eigenwerte

$$G_{N_1 N_2 \dots} = \sum_k N_k \cdot h k$$

Wenn die Masse $m \neq 0$ ist, nennt man die Teilchen Mesonen, das ψ -Feld das skalare neutrale Mesonenfeld. Die Besetzungszahlen N_k ändern sich mit der Zeit nicht.

Von hohem Interesse ist die Wechselwirkung der Mesonen mit Materie, d. h. mit Protonen und Neutronen. Diese wird, ähnlich wie in der Wellentheorie des Lichts, durch Übergang der homogenen Schrödinger-Gordon-Gleichung zu einer inhomogenen Gleichung in Rechnung gezogen, auf der rechten Seite von (6) wird die Null durch ein Störglied ersetzt. In der Optik besteht die Wechselwirkung zwischen Photonen und Nukleonen in der Absorption und Emission der ersteren. Wir dürfen daher erwarten, über die Bildung und das Verschwinden von Mesonen Auskunft zu erhalten. In der Rechnung wird der Einfluß der Protonen als Störung des vorhin behandelten Vakuumfeldes mit den Methoden der quantenmechanischen Störungstheorie behandelt. Ein Hauptergebnis der Rechnung ist die Herleitung der Kernkräfte aus dem Yukawa-Potential

$$U(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Es ist nur für sehr kleine Entfernungen merklich und bewirkt die gegenseitige Anziehung aller Protonen. Bedauerlicherweise wird U für $r=0$ unendlich, was einer unendlichen Selbstenergie des Protons entspräche. Versucht man diese Schwierigkeit auszuschalten, indem man das Proton nicht mehr als punktförmig, sondern als über ein endliches Volumen verschmiert denkt, geht die Lorentzinvarianz verloren. Zur Behebung dieses Mangels wurde die Renormierungstheorie geschaffen, in der man gewisse Verbote ausspricht.

Weiter findet man, daß die Wechselwirkung zwischen Protonen durch virtuelle Emission und Absorption von Mesonen vermittelt wird: Das von einem Proton ausgestoßene Meson wird von einem anderen Proton (oder ihm selbst) absorbiert. Dabei erfährt das erste Proton eine Impulsänderung, das zweite einen Impulszuwachs. Darin besteht die Wechselwirkung der schweren Teilchen. Die auftretenden Mesonen müssen ungeladen sein, weil die ψ -Funktion reell ist.

Um das Verhalten geladener Mesonen zu beschreiben, muß ein Paar konjugiert komplexer ψ -Funktionen ψ, ψ^*

herangezogen werden, die den Gleichungen

$$(\square - m^2) \psi = 0, \quad (\square - m^2) \psi^* = 0$$

genügen. Bezeichnet man mit N_k, \bar{N}_k die Zahl der positiven bzw. negativen Mesonen vom Impuls hk bzw. $-hk$, dann ist

$$\begin{aligned} \text{die Energie} \dots H_{N_1 N_2 \dots \bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \\ - 2 \cdot H_{NP} = \sum_k h \omega_k (N_k + \bar{N}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{der Impuls} \dots G_{N_1 N_2 \dots \bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \\ = \sum_k h k (N_k - \bar{N}_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{die Ladung} \dots e_{N_1 N_2 \dots \bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \\ = h e \cdot \sum_k (N_k - \bar{N}_k). \end{aligned}$$

e ist die elektrische Elementarladung. Die physikalische Interpretation der Formeln bedarf keiner Erläuterung.

Die Wechselwirkung des geladenen Mesonenfeldes mit Nukleonen folgt ähnlich wie oben aus der inhomogenen Schrödinger-Gordon-Gleichung mit Hilfe der Störungsrechnung. Danach erfolgt die Streuung eines positiven Mesons $+\mu_k$ vom Impuls hk an einem Proton p gemäß

$$p + \mu_k \rightarrow n + \mu_k + \mu_j \rightarrow p + \mu_j.$$

Das Proton emittiert zuerst unter Umwandlung in ein Neutron ein weiteres Meson vom Impuls h_j . Dann wird das ursprüngliche Meson vom Neutron wieder absorbiert.

Die Theorie liefert sogar einen Ausdruck für den totalen Wirkungsquerschnitt der gestreuten Mesonen. Der Ladungsaustausch bei der Kollision Proton—Neutron ist ein Mesonenübergang von einer Partikel zur anderen, die auftretenden Kernkräfte sind Austauschkräfte. Wie die Photonen die Energiequanten des atomaren Coulombfeldes sind, sind die Mesonen die Quanten des Kernfeldes.

Natürlich wurde auch der Zustand untersucht, bei dem gleichzeitig geladene und neutrale Mesonen vorhanden sind, ebenso der Einfluß elektromagnetischer Felder, doch fehlt der Raum, um darauf näher einzugehen.

Erwähnung verdient noch das vektorielle Mesonenfeld. Von einem solchen wird gesprochen, wenn vier ψ -Funktionen

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$$

vorliegen, welche als Komponenten eines Vierervektors aufgefaßt werden, deren jede Gleichung (6) erfüllt. Läßt man obendrein die konjugiert komplexen Funktionen ψ_k^* zu, so erhält man ladungstragende Felder. Es stellt sich heraus, daß die zugehörigen „Vektormesonen“ sowohl ein mechanisches als auch ein magnetisches Spinmoment besitzen. Durch den Spin kommt der vektorielle Charakter des Feldes zustande.

Der hier unvollständig und nur in größten Zügen gegebene Bericht über die Quantenfeldtheorie, in dem die Quantenelektrodynamik ganz unerwähnt blieb, hat lediglich die Aufgabe, über die Grundgedanken dieses großartigen Versuches zur Aufklärung tiefliegender Zusammenhänge zu informieren. Abschließend muß aber nochmals auf die erheblichen theoretischen Schwierigkeiten verwiesen werden, die es verbieten, die gegenwärtigen Anschauungen als endgültig anzusehen.

Literatur:

1. D. I. Blochinzew, Grundlagen der Quantenmechanik. D.V.W. Berlin.
2. G. Wentzel, Einführung in die Theorie der Wellenfelder, Verl. Deuticke, Wien. (Vergriffen.)
3. A. Rubinowicz, Quantentheorie des Atoms, Verl. J. A. Barth, Leipzig.