

Wissenschaftliche Abhandlungen

von

Ludwig Boltzmann

Im Auftrage und mit Unterstützung der Akademien der
Wissenschaften zu Berlin, Göttingen, Leipzig, München, Wien

herausgegeben

von

Dr. Fritz Hasenöhl

Professor der theoretischen Physik an der k. k. Universität in Wien

I. Band

(1865—1874)



Leipzig

Verlag von Johann Ambrosius Barth

1909



1061/1

EX LIBRIS



DRIS STEFAN MEYER

Seinem lieben Freund Stefan Meyer
mit herzlichem Danke für bereits geleistete
und in Erwartung fernere freundschaftl.
bester Unterstützung überreicht vom
Herausgeber f. H.

Ludwig Boltzmann

Wissenschaftliche Abhandlungen

I. Band

1061 / 2. Ex



From Prof. Dr. F. Hasenöhrl

Wien IX/1

Wissenschaftliche Abhandlungen

von

Ludwig Boltzmann

Im Auftrage und mit Unterstützung der Akademien der
Wissenschaften zu Berlin, Göttingen, Leipzig, München, Wien

herausgegeben

von

Dr. Fritz Hasenöhl

Professor der theoretischen Physik an der k. k. Universität in Wien

I. Band

(1865—1874)



Leipzig

Verlag von Johann Ambrosius Barth

1909



1061/1

Vorwort des Herausgebers.

Die vorliegende Ausgabe der gesammelten Abhandlungen von Ludwig Boltzmann geschieht über Auftrag und mit Unterstützung der Akademien der Wissenschaften zu Berlin, Göttingen, Leipzig, München und Wien. Sie enthält sämtliche wissenschaftlichen Publikationen Boltzmanns mit Ausnahme der bereits in Buchform erschienenen. Zu den letzteren gehören die Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts (1891—93), über die Prinzipie der Mechanik (1897—1904) und über Gastheorie (1896—98), der Artikel über die Kinetische Theorie der Materie (gemeinsam mit J. Nabl verfaßt, Enzykl. d. math. Wiss. V, 8. 1907), sowie die Abhandlungen und Vorträge, welche noch von Boltzmann selbst in dem Bande Populäre Schriften vereint wurden. Zur Erleichterung der Übersicht sind die Titel der letztgenannten Schriften jedoch im Inhaltsverzeichnis dieser Sammlung an ihrer Stelle angeführt.

Einige Feuilletons aus Tagesblättern, sowie die zahlreichen Referate, die Boltzmann über seine eigenen, sowie über andere Arbeiten verfaßt hat, sind hier nicht aufgenommen worden. Eine einzige Ausnahme bildet die Besprechung von Maxwells Abhandlung „On Boltzmann's Theorem on the average distribution of energy in a system of material points“ im 5. Bande der Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, deren Bedeutung weit über die eines gewöhnlichen Referates hinausgeht.

Die Abhandlungen sind nach der Jahreszahl ihrer Herausgabe geordnet; die Reihenfolge des Erscheinens innerhalb

eines Jahres ist nicht immer berücksichtigt. Es war auf diese Weise in den meisten Fällen möglich, dem Zusammenhang der verschiedenen Arbeiten Rechnung zu tragen.

Dem Herausgeber stand eine Sammlung von Separat-
abdrücken aus dem Nachlasse Boltzmanns zur Verfügung,
in welchen zahlreiche Druckfehler verbessert sind und welche
an einigen Stellen Bemerkungen von Boltzmanns Hand trugen.
Wo es möglich war, sind die letzteren hier als Fußnoten mit
dem Vermerk „Bemerkung aus dem Nachlasse“ verwendet
worden. Die wenigen Anmerkungen, die der Herausgeber
hinzugefügt hat, sind ausschließlich Hinweise auf Berichtigungen,
welche die Abhandlungen in späteren Publikationen des Ver-
fassers gefunden haben; wo es wünschenswert schien, sind
dieselben durch die Buchstaben D. H. gekennzeichnet. Im Text
sind nur augenscheinliche Druckfehler verbessert worden.

Durch die Veranstaltung einer Gesamtausgabe der Werke
Boltzmanns wird zunächst dem Gebote der Dankbarkeit ent-
sprochen, die unsere Zeit dem großen Forscher schuldet.
Die einheitliche Herausgabe der in zahlreichen Zeitschriften
verstreuten Abhandlungen wird es ferner den Fachgenossen
erleichtern, sich ein anschauliches Bild seiner Lebensarbeit
zu verschaffen und so die Erkenntnis fördern, wie groß das
Verdienst Boltzmanns um die Vertiefung unserer Natur-
auffassung ist.

Inhaltsverzeichnis

des I. Bandes. (1865—74.)

	Seite
1865.	
1. Über die Bewegung der Elektrizität in krummen Flächen . . .	1
1866.	
2. Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmethorie	9
1867.	
3. Über die Anzahl der Atome in den Gasmolekülen und die innere Arbeit in Gasen	34
1868.	
4. Über die Integrale linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten	43
5. Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten	49
6. Lösung eines mechanischen Problems	97
1869.	
7. Über die Festigkeit zweier mit Druck übereinander gesteckter zylindrischer Röhren	106
8. Über die elektrodynamische Wechselwirkung der Teile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt	116
9. Bemerkung zur Abhandlung des Herrn R. Most: „Ein neuer Beweis des zweiten Wärmegesetzes“	137
1870.	
10. Erwiderung an Herrn Most	139
11. Über die von bewegten Gasmassen geleistete Arbeit	148
12. Noch einiges über Kohlrauschs Versuch zur Bestimmung des Verhältnisses der Wärmekapazitäten von Gasen	157
13. Über die Ableitung der Grundgleichungen der Kapillarität aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten	160
14. Über eine neue optische Methode, die Schwingungen tönender Luftsäulen zu analysieren, gemeinschaftlich mit A. Toepler	168

	Seite
1871.	
15. Boiling-Points of Organic Bodies	199
16. Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen	200
17. Zur Priorität der Auffindung der Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und dem Prinzip der kleinsten Wirkung	228
18. Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gas- molekülen	237
19. Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht	259
20. Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft	288
1872.	
21. Über das Wirkungsgesetz der Molekularkräfte	309
22. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas- molekülen	316
23. Resultate einer Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte	403
1873.	
24. Experimentelle Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Isolatoren	411
25. Experimentaluntersuchung über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper	472
Über Maxwells Elektrizitätstheorie. (Populäre Schriften S. 11.)	
1874.	
26. Experimentelle Bestimmung der Dielektrizitätskonstante einiger Gase	537
27. Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fern- wirkung dielektrischer Körper anzubringende Korrekturen .	556
28. Über die Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstante des kristallisierten Schwefels nach verschiedenen Richtungen .	587
29. Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte. (Auszug) .	607
30. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung	616
31. Über den Zusammenhang zwischen der Drehung der Polari- sationsebene und der Wellenlänge der verschiedenen Farben	645

Über die Bewegung der Elektrizität in krummen Flächen.¹⁾

(Wien. Ber. 52. S. 214—221. 1865.)

I. Bewegung der Elektrizität auf einer Kugelfläche.

Herr Prof. Stefan leitete in seinen Vorlesungen über die Theorie des elektrischen Stromes aus dem selbstverständlichen Satze, daß bei einer Kugelfläche, die an den Endpunkten eines Durchmessers mit den Poldrähnen einer Batterie berührt wird, die Kurven gleicher Spannung Parallelkreise sein müssen, das merkwürdige Resultat ab, daß der Widerstand dieser Kugelfläche gleich ist dem einer unendlichen Ebene, in der die Elektroden in derselben Distanz sich befinden. Er veranlaßte mich darauf hin, die Verteilung der elektrischen Spannung auf einer Kugeloberfläche ganz allgemein zu untersuchen, wobei sich der erwähnte Satz auch für jede andere Lage des Ein- und Ausströmungspunktes bestätigte. Nachdem ich meine Rechnungen bereits beendet hatte, erschien Beers „Einleitung in die Elektrostatik, Lehre vom Magnetismus und Elektrodynamik“, in welcher dieselbe Frage behandelt wird. Da jedoch die gegebene Lösung fehlerhaft ist, so glaube ich meine Untersuchungen hiermit der Öffentlichkeit übergeben zu sollen.

Nehmen wir also eine Kugelschale von durchaus gleichem Leitungsvermögen k , verschwindend kleiner ebenfalls gleichförmiger Dicke δ und einem Radius R . Dieselbe werde in zwei Punkten, A und B , mit den Poldrähnen einer elektrischen Stromquelle berührt. Als Koordinaten eines Punktes D der Kugelfläche wählen wir seinen Winkelabstand φ von dem Halbierungspunkte C des A und B verbindenden größten Kreisbogens und den Winkel ϑ , den die Ebene des durch C und D

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 2. S. 128. 20. Juli 1865.

gelegten größten Kreises mit der Ebene ABC bildet. Den Winkel ϑ zählen wir vom Einströmungspunkt A zum Ausströmungspunkt B .

Lassen wir nun φ und ϑ um ihre Differentiale wachsen, so entsteht auf der Kugel ein rechteckiges Elementchen $DEGF$ und es ist die in der Verlängerung von CD liegende Seite desselben

$$DE = R d\varphi$$

und die senkrecht darauf stehende Seite

$$DF = R \sin \varphi d\vartheta;$$

die Elektrizitätsmenge aber, welche in der Zeiteinheit durch DE in der Richtung DF einströmt, findet man

$$s = -k \delta \frac{\Delta u}{DF} DE,$$

wo u die Spannung oder das Potential der Elektrizität in D , Δu dessen Zuwachs beim Übergang von D nach F bedeuten. Die Substitution der Werte für DE und DF ergibt:

$$s = -k \delta \left(\frac{du}{d\vartheta} \right) \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Ebenso findet man als Wert der durch DF einströmenden Elektrizitätsmenge

$$s' = -k \delta \frac{\Delta' u}{DE} \cdot DF = -k \delta \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \sin \varphi d\vartheta.$$

Die Elektrizitätsmengen, welche durch die DE und DF gegenüberliegenden Seiten FG und EG ausströmen, werden um die Differentiale der Größen s und s' nach ϑ und φ größer sein; die Summe dieser Differentiale gibt also den Zuwachs der Spannung im Flächenelement, der bei stationärer Strömung in allen Punkten außer A und B gleich der Null sein muß; die Spannung wird daher durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(1) \quad -k \delta d\vartheta d\varphi \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \sin \varphi \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} \right] = 0,$$

wobei natürlich bloß der eingeklammerte Faktor verschwinden kann. Auch in dieser Gleichung findet sich bei Beer eine Unrichtigkeit.

Eine spezielle Auflösung derselben ergibt sich, wenn man $du/d\varphi \sin \varphi$ gleich einer Konstanten A setzt, woraus durch Integration folgt:

$$u = A \log \tan \frac{\varphi}{2} + B.$$

Diese Funktion liefert jedoch für $\varphi = 0$, $u = -\infty$; für $\varphi = \pi$, $u = +\infty$; gilt also nur für den Fall, daß A und B Enden desselben Durchmessers sind. Um die allgemeine Lösung zu finden, wollen wir die Kosinus der Winkelabstände eines Punktes von A und B als neue Koordinaten einführen; sie sind, wenn wir den Winkel $COA = COB$ mit b , also den Winkelabstand der Elektroden mit $2b$ bezeichnen (O ist der Mittelpunkt der Kugel):

$$r = \cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi \cos \vartheta$$

$$\varrho = \cos b \cos \varphi - \sin b \sin \varphi \cos \vartheta.$$

Nach Einführung dieser neuen Variablen erhält die Differentialgleichung (1), nachdem die gehörigen Reduktionen durchgeführt sind, folgende Gestalt:

$$(2) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} (1-r^2) - 2r \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{d\varrho^2} (1-\varrho^2) - 2\varrho \frac{du}{d\varrho} + 2 \frac{d^2 u}{dr d\varrho} (1-r\varrho) = 0.$$

Man erkennt sogleich, daß man eine spezielle Auflösung dieser Gleichung erhält, indem man $u = \chi(r) + \psi(\varrho)$ setzt und $\chi(r)$ und $\psi(\varrho)$ als solche Funktionen von r und ϱ wählt, daß sie die Gleichungen

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} (1-r^2) - 2r \frac{d\chi}{dr} = A$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\varrho^2} (1-\varrho^2) - 2\varrho \frac{d\psi}{d\varrho} = -A$$

erfüllen, aus denen sich

$$\chi(r) = \frac{-A+C}{2} \log(1+r) - \frac{A-C}{2} \log(1-r) + B'$$

$$\psi(\varrho) = \frac{A+C'}{2} \log(1+\varrho) + \frac{A-C'}{2} \log(1-\varrho) + B''$$

$$u = \frac{-A+C}{2} \log(1+r) - \frac{A+C}{2} \log(1-r)$$

$$+ \frac{A+C'}{2} \log(1+\varrho) + \frac{A-C'}{2} \log(1-\varrho) + B$$

ergibt; A, B, B', B', C und C' sind willkürliche Konstanten.

Diese lassen sich so bestimmen, daß dieser Wert die Bedingungen der Aufgabe erfüllt; offenbar läßt er bloß für die vier Punkte $r = 1$, $r = -1$, $\varrho = 1$, $\varrho = -1$ Diskontinuität

zu; es sind dies die Punkte A und B und die ihnen gegenüberliegenden Pole der Kugel; um ihn auch für letztere kontinuierlich zu machen, brauchen wir bloß

$$C = A; C' = -A$$

zu setzen; der dadurch erhaltene neue Wert

$$(3) \quad u = A \log \frac{1 - \varrho}{1 - r} + B$$

erfüllt die Bedingungsgleichung (2) rücksichtlich der ganzen Kugelfläche, wenn nur A und B beständig bei unendlicher oder um sie mit sehr kleinen Radien beschriebene Kreise bei sehr großer Spannung erhalten werden. Führt man, wie Beer, statt der Kosinus direkt die Winkelabstände d' und d'' von A und B ein, so erhält man

$$(4) \quad u = 2A \log \frac{\sin \frac{d''}{2}}{\sin \frac{d'}{2}} + B$$

und man sieht, daß die Formel Beers nicht für zwei, sondern für vier Elektroden gilt, von denen die beiden positiven und die beiden negativen an je zwei entgegengesetzten Enden desselben Durchmessers liegen, wie denn auch klar ist, daß schon die ganze Ableitungsweise Beers, die er uns freilich größtenteils bloß vermuten läßt, vier in der besagten Weise gelegene Elektrodenpunkte voraussetzt.

Dasselbe Resultat könnte man auch mit Umgehung der Koordinatentransformation erhalten, indem man u gleich einer solchen Funktion von φ setzte, daß die linke Seite der Gleichung (1) einer Konstanten multipliziert mit der Größe des Flächenelementes $R^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta$ gleich würde; die Integration der resultierenden Differentialgleichung ergäbe dann, nachdem die Konstanten so bestimmt wurden, daß u nur für $\varphi = 0$ unendlich wird

$$u = 2A \log \sin \frac{\varphi}{2} + B;$$

φ kann hier den Winkelabstand von jedem beliebigen Punkte der Kugel vorstellen, den man als Elektrodenpunkt voraussetzt und es würde eine beliebige Summe von Gliedern von dieser Form die Differentialgleichung erfüllen, sobald nur die Summe

der Konstanten A gleich Null wäre; denn eben dieser Summe wäre der Zuwachs an Elektrizität in der Flächeneinheit proportional.

Um die Kurven gleicher Spannung zu finden, brauchen wir bloß in Formel (3) die Größe $(1 - \rho)/(1 - r)$ gleich einer Konstanten m zu setzen, woraus nach Einsetzung der Werte für r und ρ und geänderter Anordnung der Glieder folgt:

$$m(\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi \cos \vartheta) - (\cos b \cos \varphi - \sin b \sin \varphi \cos \vartheta) = m - 1$$

oder nach Einführung rechtwinkliger Koordinaten

$$x = R \sin \varphi \cos \vartheta$$

$$y = R \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$z = R \cos \varphi$$

und abermals veränderter Anordnung:

$$z + x \frac{m+1}{m-1} \operatorname{tang} b = R \sec b,$$

d. h. die Kurven gleicher Spannung sind Kreise, deren Ebenen sich insgesamt in der Durchschnittslinie der an A und B gelegten Tangentialebenen schneiden.

Die Strömungslinien sind die senkrechten Transversallinien des Systems der Kurven gleicher Spannung; bezeichnen wir ihre Koordinaten mit Θ und Φ , so erhellt aus geometrischen Betrachtungen, daß

$$\frac{\sin \Theta d \Phi}{d \Theta} = - \frac{d \vartheta}{\sin \vartheta d \varphi}$$

sein muß. Die Differentiation der Gleichung der Kurven gleicher Spannung gibt

$$\frac{d \vartheta}{\sin \vartheta d \varphi} = - \frac{\sin b \sin \vartheta \sin \varphi}{\cos b - \cos \vartheta},$$

daher für die Strömungslinien, indem wir sogleich die großen Buchstaben wieder mit den kleinen vertauschen

$$\frac{d \varphi}{\sin \varphi} = \sin b \frac{d \vartheta}{\cos b - \cos \vartheta}$$

und durch Integration

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = n \frac{\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{tang} \frac{b}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{tang} \frac{b}{2}},$$

woraus zu ersehen ist, daß der durch A und B auf AOB senkrecht gelegte Parallelkreis auch eine Strömungskurve ist.

Um den Widerstand der Kugel zu finden, nennen wir die gegen den Radius der Kugel verschwindend klein vorausgesetzten Radien der Poldrähte a_1 und a_2 und die Spannungen an der Peripherie der Drähte u_1 und u_2 , so wird in Formel (4) für die erste Elektrode

$$d'' = 2b, \quad d' = \frac{a_1}{R},$$

daher wenn man den Sinus mit dem Bogen verwechselt

$$\sin \frac{d'}{2} = \frac{a_1}{2R}$$

$$u_1 = 2A \log \frac{2R \sin b}{a_1} + B.$$

Ebenso liefert die Formel (4) für die zweite Elektrode:

$$u_2 = 2A \log \frac{a_2}{2R \sin b} + B,$$

daher

$$u_1 - u_2 = 2A \log \frac{4R^2 \sin^2 b}{a_1 a_2}; \quad A = \frac{u_1 - u_2}{2 \log \frac{4R^2 \sin^2 b}{a_2 a_1}}.$$

Die durch den Umfang des positiven Poldrahtes und folglich durch die ganze Kugel in der Zeiteinheit strömende Elektrizitätsmenge wird gefunden, indem man den Differentialquotienten von u_1 nach a_1 mit $-k\delta$ und dem Umfang des Drahtes multipliziert; nennen wir sie s , so wird

$$s = 4\pi k \delta A = \frac{2\pi k \delta (u_1 - u_2)}{\log \frac{4R^2 \sin^2 b}{a_1 a_2}}.$$

Der Widerstand der Kugel ist also, weil $s = (u_1 - u_2)/w$ zu setzen ist:

$$w = \frac{1}{2\pi k \delta} \log \frac{4R^2 \sin^2 b}{a_1 a_2} = \frac{1}{2\pi k \delta} \log \frac{E^2}{a_1 a_2},$$

wo E die Entfernung der Elektroden, welche gleich $2R \sin b$ ist, bezeichnet. Da nun dieser Ausdruck den Radius der Kugel nicht enthält und der Widerstand der unendlichen Ebene durch eine vollkommen gleiche Formel gegeben wird, so läßt sich der bereits erwähnte von Prof. Stefan gefundene Satz dahin erweitern, daß der Widerstand einer Kugel unabhängig von ihrem

Radius jedesmal gleich ist dem Widerstande einer unendlichen Ebene (Kugel von unendlichem Radius), auf der sich die Elektroden in derselben Distanz befinden.

II. Bewegung der Elektrizität auf einer zylindrischen Fläche.

Wir wollen ferner noch die Verteilung der elektrischen Spannung auf einer unendlichen zylindrischen Fläche berechnen, in die an zwei oder mehr Punkten Elektrizität einströmt, z. B. in M und N . Zu diesem Zwecke beachten wir, daß die Elektrizität von M und N nach allen Richtungen, wie in der unendlichen Ebene ausströmen wird, bis die nach der einen Seite fließende Elektrizität, nachdem sie die Hälfte des Umfangs durchlaufen hat, mit der nach der andern Seite strömenden, etwa in der Linie CD zusammentrifft. Allein nach dem Principe der Superposition wird sich jede, ohne von der andern gestört zu werden, über CD hinaus weiter verbreiten und bei der zweiten Ankunft in CD von neuem usw.

Wir finden daher die Spannung im Zylinder, indem wir eine nach allen Seiten unendliche Ebene mit entsprechenden Ein- und Ausströmungspunkten um ihn aufwickeln. Jeder Punkt erhält dann die Summe der Spannungen aller in ihm übereinander fallenden Punkte der Ebene.

Bezeichnen wir daher den Umfang der Basis des Zylinders, deren Gestalt übrigens vollkommen willkürlich bleibt, mit a und zählen die Abszissen parallel der Achse des Zylinders, die Ordinaten aber in senkrechter Richtung um den Zylinder herum, so ist die Spannung irgendeines Punktes des Zylinders x, y gleich der Summe der Spannungen jener Punkte der Ebene, deren Abszissen x und deren Ordinaten $y, y+a, y+2a, \dots, y-a, y-2a, \dots$ sind; diese Summe ist aber, wenn ξ, η und x, y die Koordinaten des Ein- und Ausströmungspunktes sind:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A \log \frac{(x-\xi)^2 + (ak+y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (ak+y-\eta)^2} + B \\ &= A \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{(x-\xi)^2 + (ak+y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (ak+y-\eta)^2} + B. \end{aligned}$$

Wo H ein unendliches Produkt, A und B bekannte Konstanten bezeichnen. Weitere Transformationen ergeben

$$\begin{aligned}
u &= A \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{[ak + y - \eta + (x - \xi)i][ak + y - \eta - (x - \xi)i]}{[ak + y - \eta + (x - \xi)i][ak + y - \eta - (x - \xi)i]} + B \\
&= A \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\left[1 + \frac{y - \eta + (x - \xi)i}{ak}\right] \left[1 + \frac{y - \eta - (x - \xi)i}{ak}\right]}{\left[1 + \frac{y - \eta + (x - \xi)i}{ak}\right] \left[1 + \frac{y - \eta - (x - \xi)i}{ak}\right]} + B \\
&= A \log \frac{\sin \frac{\pi}{a} [y - \eta + (x - \xi)i] \cdot \sin \frac{\pi}{a} [y - \eta - (x - \xi)i]}{\sin \frac{\pi}{a} [y - \eta + (x - \xi)i] \cdot \sin \frac{\pi}{a} [y - \eta - (x - \xi)i]} + B \\
&= A \log \frac{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\xi)} + e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\xi)} - 2 \cos \frac{2\pi}{a}(y-\eta)}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\xi)} + e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\xi)} - 2 \cos \frac{2\pi}{a}(y-\eta)} + B.
\end{aligned}$$

Nachdem durch diese Formel die Spannung in jedem Punkte bestimmt ist, unterliegt es keiner Schwierigkeit mehr, nach den gewöhnlichen Methoden die Kurven gleicher Spannung, die Strömungskurven und den Widerstand zu bestimmen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Spannung, falls der Zylinder nach beiden Seiten durch Kurven begrenzt ist, deren Ebenen auf seine Achse senkrecht stehen, durch höhere Transzendente, und zwar die Jacobischen Θ -Funktionen, ausgedrückt wird.

Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie.¹⁾

(Wien. Ber. 53. S. 195—220. 1866.)

Bereits längst ist die Identität des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie mit dem Prinzip der lebendigen Kräfte bekannt; dagegen nimmt der zweite Hauptsatz eine eigentümliche exzeptionelle Stellung ein und wird sein Beweis auf hier und da nicht einmal sichern, keinesfalls aber klar vor Augen liegenden Umwegen geführt.

Es soll nun der Zweck dieser Abhandlung sein, einen rein analytischen, vollkommen allgemeinen Beweis des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zu liefern, sowie den ihm entsprechenden Satz der Mechanik aufzufinden.

I. Bestimmung des Begriffes der Temperatur.

Zunächst ist uns hierzu die Bestimmung eines Hauptbegriffes der gesamten Wärmelehre nötig, der bis jetzt noch nicht mit Schärfe und Einstimmigkeit definiert wurde, nämlich des Begriffes der Temperatur. Wir werden hierbei offenbar am meisten im Geiste der mechanischen Theorie der Wärme verfahren, wenn wir zuerst die experimentelle Definition der Temperatur aufstellen und dann untersuchen, welche Funktion der die Molekularbewegung bestimmenden Größen derartige Eigenschaften besitzt, um als Repräsentant dessen gelten zu können, was sich uns in der Natur als Temperatur kundgibt. Es ist aber das erste und notwendigste Bestimmungsstück der Temperatur, daß beliebige Körper von gleicher Temperatur, miteinander in Berührung gebracht, sich keine Wärme, also keine lebendige Kraft der Atombewegungen mitteilen und wir

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 3. S. 36. 8. Februar 1866.

haben die Bedingungen aufzusuchen, die zu diesem Gleichgewicht der Wärme erforderlich sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei beliebige sich berührende Körper, die aus Atomen bestehen sollen, zwischen denen Kräfte tätig sind, deren Intensität ganz allgemein eine Funktion der Entfernung zweier Atome sei. Außerdem soll die Berührung so geschehen, daß sie weder mit einer Verdichtung noch Verdünnung des einen oder anderen Körpers verbunden ist, indem solche jedesmal Temperaturänderungen erzeugen und dadurch das Gleichgewicht der Wärme stören würde, mit anderen Worten, es soll der Druck nach allen Richtungen gleich sein. Unterziehen wir nun speziell die Wechselwirkung eines Atoms des ersten Körpers mit der Masse m und der Geschwindigkeit c , sowie eines Atoms des zweiten Körpers mit der Masse M und der Geschwindigkeit C der Betrachtung. Wir setzen voraus, daß die Geschwindigkeiten der übrigen Atome bereits so gewählt seien, daß sie von den Atomen m und M durchschnittlich weder lebendige Kraft aufnehmen, noch an sie abgeben, sowie auch, daß sie die Projektion der progressiven Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes beider Atome auf eine beliebige Richtung im Durchschnitt nicht ändern, was in der Tat stattfinden muß, wenn eine Stabilität des Zustandes beider Körper in unserem Sinne vorhanden sein soll. (Für den Fall, daß beide Körper ruhen, ist die mittlere Bewegung des Schwerpunktes = 0; es ist jedoch nicht nötig, diese Beschränkung einzuführen.) Suchen wir nun die Bedingung dafür, daß das Atom m auch von M im Durchschnitt keine lebendige Kraft erhält; daß also auch zwischen ihnen Gleichgewicht der Wärme stattfindet. Es folgt aus unseren Annahmen, daß nach einer gewissen Zeit, deren Anfang und Ende mit t_1 und t_2 bezeichnet werden soll, die Summe der lebendigen Kräfte beider Atome, sowie die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes nach einer beliebigen Richtung wieder dieselben Werte annehmen werden; daß also, wenn wir mit v und V die Geschwindigkeiten nach dieser Zeit, mit φ und Φ die Winkel der Geschwindigkeiten c und C mit einer vorläufig noch willkürlich im Raume gelegenen Geraden G , mit ϑ und Θ die Winkel der durch die Richtungen von c und C und die Gerade G gelegten Ebenen mit einer ebenfalls willkürlich durch G gelegten Ebene, end-

Mit Berücksichtigung der neuen Gleichungen (5) und (6) verwandelt sich (1a) in:

$$(7) \quad \frac{mv^2 \cos^2 \varphi'}{2} + \frac{M V^2 \cos^2 \Phi'}{2} = \frac{mc^2 \cos^2 \varphi}{2} + \frac{MC^2 \cos^2 \Phi}{2};$$

und kann die dem Atom m zugeführte lebendige Kraft

$$l = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

auch ausgedrückt werden durch

$$(8) \quad l = \frac{mv^2 \cos^2 \varphi'}{2} - \frac{mc^2 \cos^2 \varphi}{2}.$$

Eliminiert man nun aus den Gleichungen (7) und (1b) einmal V , dann v , so erhält man für v und V folgende aus der Theorie des Stoßes bekannte Systeme von Bestimmungsgleichungen:

$$v \cos \varphi' = c \cos \varphi$$

$$V \cos \Phi' = C \cos \Phi$$

und

$$v \cos \varphi' = \frac{2MC \cos \Phi + (m - M)c \cos \varphi}{m + M}$$

$$V \cos \Phi' = \frac{2mc \cos \varphi + (M - m)C \cos \Phi}{m + M}.$$

Das erste System gibt die Werte vor der Zeit $t_2 - t_1$ und würde, falls es auch nach dieser Zeit gültig wäre, doch $l = 0$ liefern, daher das Wärmegleichgewicht nicht stören; der Wert von v des zweiten Systems jedoch in Gleichung (8) substituiert, gibt:

$$(9) \quad l = \frac{2mM}{(m+M)^2} [MC^2 \cos^2 \Phi - mc^2 \cos^2 \varphi + (m - M)cC \cos \Phi].$$

Nachdem m und M die Geschwindigkeiten v und V erhalten haben, wird der eben beschriebene Prozeß von neuem beginnen, wobei nun v und V die Rolle von c und C übernehmen und so fort bis ins Unendliche. Es fragt sich, wann die an m mitgeteilte lebendige Kraft im Mittel = 0 sein wird. Zuerst besprechen wir die Winkel φ und Φ ; offenbar besteht bei der Mannigfaltigkeit der auf m wirkenden Kräfte und der Willkürlichkeit der Bewegungsrichtung der Atome (denn von regelmäßigen Bewegungen ist hier nicht die Rede, da sich selbe nach ändern von ihrer Natur abhängigen Gesetzen fortpflanzen würden) keine diese Winkel bestimmende Relation; es

wird daher wohl die einzig sachgemäße Annahme sein, daß für die Geschwindigkeiten c und C jede beliebige Richtung im Raume bei einer gewissen Richtung von G gleich wahrscheinlich ist. Eine einfache Betrachtung lehrt, daß man alsdann das Mittel l' der mitgeteilten lebendigen Kraft bezüglich aller möglichen Richtungen findet, indem man den in Gleichung (9) gegebenen Wert von l mit $\sin \varphi d\varphi / 2$ multipliziert und bezüglich φ von 0 bis π integriert; dasselbe gilt von Φ . Führt man die Integrationen wirklich aus, so erhält man:

$$l' = \frac{4mM}{3(m+M)^2} \left(\frac{MC^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \right).$$

Ferner werden die Zeitmomente, in denen der erste der besprochenen Prozesse aufhört und der zweite beginnt, oder der zweite aufhört und der dritte beginnt usf. für jede Größe von

$$\frac{mc^2}{2} + \frac{MC^2}{2},$$

sowie jede Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung des beiden Atomen gemeinsamen Schwerpunktes, durch die man immer den Beginn der Prozesse charakterisieren mag, im allgemeinen derart im ganzen Verlauf der Zeit verteilt sein, daß eine Geschwindigkeit um so öfter von einem solchen Moment getroffen wird, je häufiger sie vorkommt und durch je längere Zeit sie andauert, oder umgekehrt: die verschiedenen Geschwindigkeiten entstehen eben dadurch, daß dem Atom unregelmäßig bald lebendige Kraft mitgeteilt, bald wieder entzogen wird und das Verhältnis der Zeit, während welcher eine gewisse Geschwindigkeit stattfindet, zur ganzen Zeit wird daher um so größer sein, nach je mehr Prozessen diese Geschwindigkeit wiederkehrt. Indem wir daher mit diesem Verhältnis den jeder Geschwindigkeit entsprechenden Wert l' multiplizieren und bezüglich aller Geschwindigkeiten integrieren, erhalten wir den Mittelwert von l' mit Rücksicht auf den Wechsel der Geschwindigkeiten; bezeichnen wir ihn mit L , so ist

$$(10) \quad L = \frac{4mM}{3(m+M)^2} \left(\frac{\int \frac{MC^2}{2} dt}{\int dt} - \frac{\int \frac{mc^2}{2} dt}{\int dt} \right),$$

wobei bloß jene Geschwindigkeiten mitzuzählen sind, für die

$$\frac{mc^2}{2} + \frac{MC^2}{2},$$

sowie die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes bestimmte, oder, wenn man will, zwischen zwei unendlich nahen Grenzen liegende Werte besitzen. Da es jedoch gleichgültig ist, welchen Wert ich hierzu auswähle, so muß L für jeden beliebigen verschwinden, wenn Gleichheit der Temperatur stattfinden soll; es muß daher auch unabhängig von $mc^2/2 + MC^2/2$ und der Bewegung des Schwerpunktes:

$$\frac{\int \frac{MC^2}{2} dt}{\int dt} = \frac{\int \frac{mc^2}{2} dt}{\int dt}$$

sein, wo die Integrale rechts und links nicht notwendig zwischen denselben, wohl aber zwischen solchen Grenzen genommen werden müssen, daß man unabhängig von jeder Zufälligkeit die mittleren lebendigen Kräfte erhält. Es ist somit die Temperatur eine Funktion der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms. Wir können nun diese Funktion so bestimmen, daß:

1. Zu gleichen Temperaturerhöhungen desselben Körpers um so genauer gleiche Wärmemengen erforderlich sind, je mehr es erlaubt ist von der durch die Wärme dabei geleisteten Arbeit abzusehen; es ist unmittelbar klar, daß alsdann die Temperatur

$$(11) \quad T = A \frac{\int \frac{mc^2}{2} dt}{\int dt} + B$$

gesetzt werden muß.

2. Daß die übergehende Wärmemenge der Temperaturdifferenz proportional ist. Die Formel (10) scheint dafür zu sprechen, daß T alsdann ebenfalls die Form (11) bekäme; um sie jedoch strenge beweisend zu machen, müßten noch komplizierte Untersuchungen angestellt werden, die wir aber, da die angeführte Tatsache nicht einmal experimentell allgemein nachgewiesen ist, ja Clausius sogar für Gase ein anderes Gesetz der Wärmeleitung fand, hier unterlassen wollen; jedenfalls liefert jedoch die Gleichung (10), falls man den in (11) gegebenen Wert für T gelten läßt, den Beweis, daß durch Leitung die Wärme immer vom wärmeren zum kälteren Körper übergeht.

3. Daß bei absoluten Gasen die Ausdehnung oder besser das Produkt aus Druck und Volum der (absoluten) Temperatur

proportional ist. Da dieses Produkt bekanntlich der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der Moleküle proportional ist, so würde auch hieraus die Form (11) mit $B = 0$ für die absolute Temperatur folgen, wenn nachgewiesen wäre, daß die mittlere lebendige Kraft der progressiven Bewegung der Moleküle der mittleren lebendigen Kraft der Atome proportional sein muß.

Dies soll im folgenden versucht werden.

II. Relation zwischen der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der Moleküle und der mittleren lebendigen Kraft der Atome.

Wir wollen, um diese Relation aufzufinden, ganz denselben Weg, wie bei der vorigen Deduktion einschlagen, indem wir die unregelmäßige Mitteilung lebendiger Kraft auf elastische Stöße zurückzuführen suchen. Es bestehe das Gasmolekül aus mehreren Atomen mit den Massen $m, m_1, m_2 \dots$ und den Geschwindigkeiten $c, c_1, c_2 \dots$. Wir betrachten, wie früher, die Einwirkung des Atoms m auf irgend ein fremdes M , sei es von den übrigen Gasmolekülen, sei es von den das Gas umschließenden festen oder flüssigen Körpern. Das betrachtete Molekül sei anfangs außerhalb der Wirkungssphäre von M , gelange mit dem M enthaltenden Molekül zum Zusammenstoß und entferne sich schließlich wieder aus dessen Wirkungssphäre. Wir wollen nun so lange abwarten, bis (vielleicht nach verschiedenen anderen Zusammenstößen) $m_1, m_2 \dots$ ganz dieselben Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen wie anfangs erhalten, während für m und M folgende Gleichungen gelten, deren Bedeutung aus dem früheren bekannt ist:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mc^2}{2} + \frac{MC^2}{2}$$

$$mv \cos \varphi' + MV \cos \Phi' = mc \cos \varphi + MC \cos \Phi$$

$$mv \cos \chi' + MV \cos X' = mc \cos \chi + MC \cos X$$

$$mv \cos \psi' + MV \cos \Psi' = mc \cos \psi + MC \cos \Psi,$$

wo wiederum v und V die Geschwindigkeiten am Ende der betrachteten Zeit, φ, Φ, φ' und Φ' die Winkel der Geschwindigkeiten c, C, v und V mit der ganz wie vorhin bezüglich m und M

gewählten Geraden G ; χ , X , χ' und X' , sowie ψ , Ψ , ψ' und Ψ' aber die Winkel derselben Geschwindigkeiten mit zwei, sowohl untereinander als auch auf G senkrechten Geraden sind. Die entsprechenden auf $m_1, m_2 \dots$ bezüglichen Größen werden wir mit dem respektiven Index 1, 2... bezeichnen. Man erhält wie früher die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} v \cos \varphi' = \frac{2MC \cos \Phi + (m - M) c \cos \varphi}{m + M}, \\ v \cos \chi' = c \cos \chi, \\ v \cos \psi' = c \cos \psi. \end{cases}$$

Es handelt sich nun um den Zuwachs λ , den die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes des Moleküls nach der betrachteten Zeit erfährt. Zunächst ist, wenn ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' die Projektionen der Geschwindigkeiten des Schwerpunktes vor und nach der betrachteten Zeit auf die Richtung G , sowie auf beide darauf senkrechten Richtungen bezeichnen:

$$(13) \quad \lambda = \frac{m + m_1 + m_2 \dots}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2).$$

Ferner ergibt sich, wenn man mit $\sum \alpha_k$ eine Summe bezeichnet, in der dem α der Reihe nach die Indizes 1, 2... zu geben sind:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{m c \cos \varphi + \sum m_k c_k \cos \varphi_k}{m + \sum m_k}, \\ \eta &= \frac{m c \cos \chi + \sum m_k c_k \cos \chi_k}{m + \sum m_k}, \\ \zeta &= \frac{m c \cos \psi + \sum m_k c_k \cos \psi_k}{m + \sum m_k}; \end{aligned}$$

daher:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{(m + \sum m_k)^2} \\ &\left\{ m^2 c^2 + \sum m_k^2 c_k^2 + 2m c \cos \varphi \sum m_k c_k \cos \varphi_k \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum \sum m_k c_k \cos \varphi_k m_l c_l \cos \varphi_l \dots; \right. \end{aligned} \right.$$

es folgen noch die Glieder, die χ und ψ statt φ enthalten.

Die Bedeutung der Doppelsumme ist klar. Substituiert man ferner in die den Ausdrücken für ξ, η, ζ analogen Werte für ξ', η', ζ' , die in den Gleichungen (12) gegebenen Werte, so folgt:

$$\xi' = \frac{m [2 M C \cos \Phi + (m - M) c \cos \varphi] + (m + M) \sum m_k c_k \cos \varphi_k}{(m + M)(m + \sum m_k)};$$

$$\eta' = \eta; \quad \zeta' = \zeta;$$

daher endlich nach Gleichung (13):

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{m^2 [2 M^2 C^2 \cos^2 \Phi + 2 M(m - M) c C \cos \varphi \cos \Phi - 2 m M c^2 \cos^2 \varphi]}{(m + M)^2 (m + \sum m_k)} \\ &+ \frac{2 m M (C \cos \Phi - c \cos \varphi) \sum m_k c_k \cos \varphi_k}{(m + M)(m + \sum m_k)}. \end{aligned} \right.$$

m und M sind hier ganz zufällig gewählte Atome; wir können daher, wie früher, annehmen, daß die Richtungen ihrer Geschwindigkeiten bei der gewählten Summe ihrer lebendigen Kräfte und Bewegung ihres Schwerpunktes weder voneinander noch von der Richtung G abhängig sind, daß sich also G gegenüber den Richtungen von c und C wie eine willkürlich im Raum gezogene Gerade verhält. Wir werden daher den Mittelwert bezüglich aller Φ finden, indem wir mit $\sin \Phi d\Phi/2$ multiplizieren und zwischen 0 und π integrieren; in gleicher Weise tragen wir der Willkürlichkeit von φ in allen von $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ unabhängigen Gliedern Rechnung. Anders jedoch verhält es sich mit $\varphi_1, \varphi_2 \dots$; es wäre nämlich möglich, daß die Winkel der Geschwindigkeiten der übrigen Atome des Moleküls mit der beliebigen Geraden G in gewisser Weise von φ abhängig wären und es braucht, wenn wir mit $f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k$ die Wahrscheinlichkeit, daß φ zwischen den Grenzen φ und $\varphi + d\varphi$, φ_k aber zwischen den Grenzen φ_k und $\varphi_k + d\varphi_k$ liegt, nicht notwendig

$$f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k = \frac{\sin \varphi \sin \varphi_k d\varphi d\varphi_k}{4}$$

zu sein. Wir haben daher das letzte Glied der Formel (15) mit $f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k$ unter dem Summenzeichen zu multiplizieren und zweimal zwischen 0 und π zu integrieren, was in Verbindung mit den früher erwähnten Integrationen den Mittelwert

$$\lambda' = \frac{4m^2 M}{3(m + M)^2 (m + \sum m_k)} \left(\frac{M C^2}{2} - \frac{m c^2}{2} \right) - \frac{2 M}{(m + M)(m + \sum m_k)} \int_0^\pi \int_0^\pi m c \cos \varphi \sum m_k c_k \cos \varphi_k f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k$$

liefert. Nimmt man hier, vollkommen wie es bei l' geschah, das Mittel der Geschwindigkeiten bezüglich ihrer Veränderlich-

keit mit der Zeit, so erhält man als Durchschnittswert der Vermehrung der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Moleküls:

$$A = \frac{4m^2 M}{3(m+M)^2(m+\sum m_k)} \left(\frac{\int \frac{MC^2}{2} dt}{\int dt} - \frac{\int \frac{mc^2}{2} dt}{\int dt} \right) - \frac{2M}{(m+M)(m+\sum m_k)} \frac{\int_0^\pi \int_0^\pi m c \cos \varphi \sum m_k c_k \cos \varphi_k f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k dt}{\int dt},$$

wo das Integral bezüglich der Zeit wieder über ein hinlänglich großes, im übrigen aber willkürliches Intervall zu erstrecken ist. Soll sich nun das Gas in einem stationären Zustande befinden, so daß bei den Molekularstößen durchschnittlich weder lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegungen in lebendige Kraft der Bewegungen der Atome im Molekül, die die Bewegung des Schwerpunktes nicht affizieren (Schwingungen um mit den Molekülen fortschreitende Gleichgewichtslagen oder Molekularrotationen), noch umgekehrt verwandelt wird, so muß

$$A = 0$$

sein. Berücksichtigt man außerdem die als Bedingung des Wärme Gleichgewichtes zwischen $M, m, m_1 \dots$ gefundenen Gleichungen:

$$(16) \quad \frac{\int \frac{MC^2}{2} dt}{\int dt} = \frac{\int \frac{mc^2}{2} dt}{\int dt} = \frac{\int \frac{m_1 c_1^2}{2} dt}{\int dt} \dots,$$

so erhält man die Bedingung:

$$(17) \quad \frac{\int_0^\pi \int_0^\pi m c \cos \varphi \sum m_k c_k \cos \varphi_k f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k dt}{\int dt} = 0,$$

mit deren Hilfe man leicht die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Molekularbewegung P bestimmt. Nimmt man nämlich von den in Gleichung (14) für $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ gegebenen Werten in der bereits bekannten Weise das Mittel und multipliziert mit

$$\frac{m + \sum m_k}{2},$$

so erhält man

$$P = \frac{1}{m + \sum m_k} \left\{ \begin{aligned} & \frac{m \int \frac{m c^2}{2} dt}{\int dt} + \frac{\sum m_k \int \frac{m_k c_k^2}{2} dt}{\int dt} \\ & + \frac{\int \int_0^\pi \int_0^\pi m c \cos \varphi \sum m_k c_k \cos \varphi_k f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k dt}{\int dt} \\ & + \frac{\int \int \int_0^\pi \sum \sum m_k m_l c_k \cos \varphi_k c_l \cos \varphi_l f(\varphi_k, \varphi_l) d\varphi_k d\varphi_l dt}{\int dt} \\ & \vdots \end{aligned} \right.$$

wo wieder die entsprechenden Glieder mit χ und ψ zu ergänzen sind. Hier fällt die zweite Reihe infolge Gleichung (17) aus; ferner überzeugt man sich leicht, wenn man dieselben Schlüsse wie auf m auch auf $m_1, m_2 \dots$ anwendet, daß die dritte Reihe ebenfalls gleich Null ist. Überdies haben wir bereits erinnert, daß sich G gegen φ wie eine willkürlich gezogene Gerade verhält; die Folge davon ist, daß die Gleichung (17) auch für alle anderen Geraden, daher auch, wenn man χ und ψ statt φ setzt, gültig bleibt und alle folgenden Reihen im Ausdruck für P ebenfalls verschwinden. Die erste aber geht unter Berücksichtigung der Gleichungen (16) über in:

$$\frac{m \int \frac{m c^2}{2} dt}{\int dt} + \frac{\sum m_k \int \frac{m_k c_k^2}{2} dt}{\int dt}$$

und man erhält daher, durch $m + \sum m_k$ weg dividierend, den einfachen Ausdruck:

$$P = \frac{\int \frac{m c^2}{2} dt}{\int dt},$$

d. h. die mittlere lebendige Kraft der progressiven Bewegung eines Moleküls ist gleich der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms.

Da nun der Ausdruck $p v$ (das Produkt aus Druck und Volum) bei permanenten Gasen der ersteren proportional ist, so folgt, daß er es auch der letzteren ist und daher zur Erfüllung der Gleichung:

$$p v = T \text{ const.}$$

erforderlich ist, daß die Temperatur der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms proportional gesetzt werde.

Es sei hier noch kurz bemerkt, daß, falls man annimmt, der Winkel der Geschwindigkeit eines Atoms mit einer beliebigen Geraden sei gänzlich unabhängig von dem Winkel der Geschwindigkeiten der übrigen Atome desselben Moleküls mit derselben Geraden, die Bedingung (17) erfüllt ist.

Denn es wird dann:

$$f(\varphi, \varphi_k) = \frac{\sin \varphi \sin \varphi_k}{4}$$

und

$$\frac{\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi c \cos \varphi c_k \cos \varphi_k f(\varphi, \varphi_k) d\varphi d\varphi_k dt}{\int dt} = \frac{\int_0^\pi c c_k dt \cdot \int_0^\pi d \cos^2 \varphi \int_0^\pi d \cos^2 \varphi_k}{16 \int dt} = 0$$

und es scheint nicht unwahrscheinlich, daß die obige Annahme in der Natur wirklich statthat; wenigstens ist hiermit bewiesen, daß im Falle ihrer Gültigkeit fortschreitende Bewegung und innere Bewegung der Moleküle sich das Gleichgewicht halten und es ist nicht recht einzusehen, weshalb diese Unabhängigkeit der Bewegungsrichtungen der Atome sonst gestört werden sollte.

III. Begründung des Ampèreschen,¹⁾ Dulong-Petitschen und Neumannschen Gesetzes für Gase.

Wir wollen den eben für P gefundenen Ausdruck zur Ableitung einiger die Theorie der Gase betreffenden Relationen benutzen, die, wenn sie auch dem vorgesetzten Zwecke dieser Abhandlung nicht förderlich sind, sich doch natürlich an das Vorhergehende anschließen. Wir nehmen an, das Gas enthalte N Moleküle, jedes Molekül aber sei aus a Atomen des ersten der das Gas bildenden Grundstoffe mit den Massen m und mittleren lebendigen Kräften $m c^2/2$, ferner aus a_1 Atomen des zweiten Grundstoffes mit den Massen m_1 und lebendigen Kräften $m_1 c_1^2/2$ usf. im ganzen aus n Atomen zusammen-

¹⁾ [Avogadro; D. H.]

gesetzt. Es ist hier zum ersten Male notwendig, von dem im Gase vorhandenen Äther zu abstrahieren, während in allem früheren die Atome ebensogut Äther- als Körperatome sein konnten. Alsdann ist das Produkt aus Druck und Volum des Gases

$$(18) \quad p v = \frac{2 N P}{3} = \frac{N m c^2}{3}$$

nach einer von Krönig, Rankine und Clausius abgeleiteten Formel. Die Temperatur ist, wenn man den Proportionalitätsfaktor Δ der Einfachheit wegen $= 1$ setzt, wie wir es in der Folge immer tun werden:

$$(19) \quad T = \frac{m c^2}{2};$$

dividiert man (18) durch (19), so ergibt sich:

$$\frac{p v}{T} = \frac{2 N}{3},$$

d. h. die Anzahl der Moleküle ist in beliebigen Gasen, für gleiche Werte von $p v / T$ gleich, das Ampèresche Gesetz.

Ferner ist die gesamte im Gase enthaltene lebendige Kraft, welche, wenn wir die Wärme in Arbeitseinheiten messen, zugleich die Wärmemenge darstellt:

$$Q = N \left(\frac{\alpha m c^2}{2} + \frac{\alpha_1 m_1 c_1^2}{2} + \frac{\alpha_2 m_2 c_2^2}{2} \dots \right) = \frac{N n m c^2}{2}.$$

Führen wir daher dem Gase die Wärmemenge ΔQ bei konstantem Volum zu und bezeichnen die Veränderungen aller Größen mit dem Zeichen Δ , so wird

$$\Delta Q = N n m \Delta \frac{c^2}{2},$$

$$\Delta T = m \Delta \frac{c^2}{2};$$

daher die Wärmekapazität bezogen auf die Volumseinheit bei konstantem Volum

$$\gamma = \frac{\Delta Q}{v \Delta T} = \frac{N n}{v} = \frac{3 p}{2 T} \cdot n.$$

γ ist also konstant und da wir voraussetzen, daß die Volumseinheiten bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke genommen wurden, proportional der Anzahl der Atome im Molekül, daher nach dem vorigen Gesetze proportional der Summe der Volume der einfachen Gase, die ein Volum des

zusammengesetzten bilden. Dieses Gesetz fand Masson in seiner Abhandlung „sur la correlation des propriétés physiques des corps“ bis auf wenige Ausnahmen experimentell bestätigt. Es folgt daraus zugleich, daß die spezifische Wärme bei konstantem Volum bezogen auf die Gewichtseinheit proportional der Anzahl der Atome im Molekül dividiert durch das Äquivalent des Körpers ist.

Führen wir dagegen dem Gase die Wärmemenge $\Delta'Q$ bei konstantem Druck zu, so wird

$$\Delta'Q = Nnm \Delta' \frac{c^2}{2} + p \Delta'v,$$

$$\Delta'T = m \Delta' \frac{c^2}{2}.$$

$p \Delta'v$ bestimmt sich leicht aus Gleichung (18), die mit Rücksicht auf die Unveränderlichkeit von p liefert:

$$p \Delta'v = \frac{2}{3} Nm \Delta' \frac{c^2}{2};$$

daher

$$\Delta'Q = Nm \Delta' \frac{c^2}{2} \left(n + \frac{2}{3} \right);$$

es wird also die spezifische Wärme unter konstantem Druck bezogen auf die Volumeinheit:

$$\gamma' = \frac{\Delta'Q}{v \Delta'T} = \frac{p}{T} \left(\frac{3n}{2} + 1 \right)$$

und

$$\gamma' - \gamma = \frac{p}{T},$$

daher endlich

$$\frac{2\gamma}{3(\gamma' - \gamma)} = n.$$

Diese Formel würde eine unmittelbare Berechnung der Anzahl der Atome im Molekül gestatten; hier tritt jedoch eine eigentümliche Schwierigkeit ein, indem die Rechnung, wenn man γ'/γ für Luft und die meisten einfachen Gase = 1,411 annimmt, für n eine wenig größere Zahl als $1\frac{1}{2}$ liefert, ein Resultat, das im allgemeinen nicht recht denkbar ist, man müßte denn annehmen, daß die betreffenden Gase aus zwei Teilen beständen, von denen der eine 1, der andere 2 Atome im Molekül enthielten. Nicht viel wahrscheinlicher ist die Annahme, daß diese Nichtübereinstimmung von der Vernach-

lässigung der im Gase vorhandenen Äthermasse herrühre. Bestimmt man $(\gamma' - \gamma)/\gamma$ aus den von Regnault gefundenen Wärmekapazitäten der Gase, indem man $\gamma' - \gamma$ konstant = 0,0696 setzt und berücksichtigt, daß bei der Beobachtung γ auch die auf innere Arbeit verwendete Wärme enthält, daher $(\gamma' - \gamma)/\gamma$ notwendig zu klein ausfällt, so erhält man n beiläufig für Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Stickstoffoxyd, Kohlenoxydul, Chlorwasserstoff = $1\frac{1}{2}$, für Chlor, Brom, Schwefelwasserstoff, Wasserdampf, Ammoniak = 2, für Stickstoffoxydul, Kohlensäure, schweflige Säure, die Kohlenwasserstoffe = $2\frac{1}{2}$, für Schwefelkohlenstoff = 3 usf. Sieht man von der absoluten Größe dieser Zahlen ab, so zeigt sich, daß sie sich nicht wie die nach dem Ampèreschen Gesetze berechneten Atomzahlen im Molekül, sondern wie meist um 1 oder 2 größere ganze Zahlen verhalten, wobei allerdings sonderbar erscheinen muß, daß sich die von Masson aus dem Tone einer mit dem Gase angeblasenen Pfeife bestimmten Werte für $(\gamma' - \gamma)/\gamma$ wirklich bis auf wenige Ausnahmen wie die Zahlen der Atome verhalten. Nimmt man hierzu noch, daß die von Dulong gefundenen Zahlen sich wieder ganz anders verhalten, von den früher angestellten Versuchen gar nicht zu reden, so muß man allerdings gestehen, daß die experimentellen Daten noch nicht jene Übereinstimmung erhalten haben, um sichere theoretische Schlüsse über die Zusammensetzung der Gase darauf gründen zu können. Sehr wahrscheinlich erscheint jedoch die von Clausius aufgestellte Hypothese, daß auch in einfachen Gasen wenigstens 2 Atome zu einem Molekül vereint sind.

IV. Beweis

des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.

Der gewonnene Begriff der Temperatur macht es uns möglich, sofort zum Beweise des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie überzugehen, und zwar soll derselbe in seiner allgemeinsten zuerst von Clausius aufgestellten Form

$$(20) \quad \int \frac{dQ}{T} \cong 0$$

dargetan werden.

Wir wollen, um nicht durch Einführung zu vieler neuer Größen auf einmal die Rechnung zu verwirren, zunächst den Fall betrachten, daß Druck und Gegendruck während des ganzen Prozesses einander gleich sind, sowie daß im Innern des Körpers beständig entweder Wärme Gleichgewicht oder ein stationärer Wärmestrom stattfindet, so daß der Körper, wenn man den Prozeß zu einer beliebigen Zeit unterbräche, in seinem augenblicklichen Zustande beharren würde. Für diesen Fall gilt in (20) das Gleichheitszeichen. Denken wir uns den Körper zunächst während einer gewissen Zeit bei konstanter Temperatur und konstantem Volum und Druck erhalten, so werden die Atome im allgemeinen krummlinige Bahnen mit variabler Geschwindigkeit beschreiben. Wir wollen nun voraussetzen, jedes beliebig gewählte Atom kehre bei jedem Zustande des Körpers nach einer gewissen (wenn auch beliebig großen) Zeit, deren Anfang und Ende wir t_1 und t_2 nennen wollen, mit derselben Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung an denselben Ort zurück, beschreibe also eine geschlossene Kurve, und wiederhole nach dieser Zeit seine Bewegung, wenn auch nicht in ganz gleicher, so doch in so ähnlicher Weise, daß die mittlere lebendige Kraft während der Zeit $t_2 - t_1$ als die mittlere lebendige Kraft des Atoms während einer beliebig langen Zeit angesehen werden kann und daß daher die Temperatur jenes Atoms

$$T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1}$$

ist.

Es werde nun jedem Atome eine unendlich kleine lebendige Kraft ε zugeführt, und zwar so, daß dieselbe jedesmal auf die Arbeitsleistung und Erhöhung der lebendigen Kraft dieses Atoms verwendet wird, sich also die verschiedenen Atome untereinander durchschnittlich nichts von der zugewachsenen lebendigen Kraft mitteilen. Wäre die Zufuhr nicht gleich anfangs so geschehen, so würden wir so lange warten, bis das Wärme Gleichgewicht oder die stationäre Strömung zurückgekehrt wäre und den alsdann sich herausstellenden mittleren Zuwachs an lebendiger Kraft mehr der von jedem Atom bei der Zustandsänderung geleisteten durchschnitt-

lichen Arbeit mit ϵ bezeichnen. Zugleich sollen sich Druck und Volum des Körpers unendlich wenig ändern. Es wird dann offenbar das betrachtete Atom eine von der früheren unendlich wenig verschiedene Kurve beschreiben. Wir bezeichnen nun die Zeit, zu der sich das Atom an einem Ort der neuen Kurve befindet, der von dem Orte des Atoms zur Zeit t_1 unendlich wenig absteht, mit t_1' , die Zeit, zu der das Atom an denselben Ort der neuen Bahn mit derselben Geschwindigkeit zurückkehrt, mit t_2' , und wollen die Veränderung des im Zähler von T stehenden Integrals

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt = \frac{m}{2} \int_{s_1}^{s_2} c ds$$

suchen, wo ds das Differential des Bogens der vom Atom beschriebenen Kurve, s_1 und s_2 die den Zeiten t_1 und t_2 entsprechenden Werte dieses Bogens sind. Diese Veränderung sei:

$$\frac{m}{2} \delta \int_{s_1}^{s_2} c ds = \frac{m}{2} \int_{s_1'}^{s_2'} c' ds' - \frac{m}{2} \int_{s_1}^{s_2} c ds,$$

wobei die mit Strichen bezeichneten Größen der veränderten Kurve angehören, s_1' und s_2' aber die den Zeiten t_1' und t_2' entsprechenden Bögen der neuen Kurve sind. Um von der Variation der Grenzen Umgang nehmen zu können, wollen wir auch ds als variabel betrachten und erhalten:

$$(21) \quad \frac{m}{2} \delta \int_{s_1}^{s_2} c ds = \frac{m}{2} \int_{s_1}^{s_2} (\delta c \cdot ds + c \delta ds);$$

hier ist:

$$\frac{m}{2} \int_{s_1}^{s_2} \delta c \cdot ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{2} \delta \frac{m c^2}{2},$$

ferner hat man, wenn X, Y, Z die Komponenten der auf das Atom wirkenden Kräfte nach den Koordinatenachsen sind:

$$\begin{aligned} d \frac{m c^2}{2} &= X dx + Y dy + Z dz \\ d \delta \frac{m c^2}{2} &= \delta X dx + X \delta dx + \delta Y dy + Y \delta dy + \delta Z dz + Z \delta dz \\ &= d(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \delta X dx - dX \delta x + \delta Y dy - dY \delta y \\ &\quad + \delta Z dz - dZ \delta z. \end{aligned}$$

Integriert man hier und berücksichtigt zur Bestimmung der Integrationskonstante, daß, wenn die rechte Seite = 0 ist, $\delta(m c^2/2) = \varepsilon$ sein muß, so erhält man:

$$\delta \frac{m c^2}{2} - \varepsilon = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \\ + \int (\delta X dx - dX \delta x + \delta Y dy - dY \delta y + \delta Z dz - dZ \delta z).$$

Hier stellt der Ausdruck links die Differenz der lebendigen Kräfte, der Ausdruck rechts in der ersten Zeile die vom Atom gewonnene Arbeit, daher notwendig das Integral in der zweiten Zeile die an andere Atome mitgeteilte lebendige Kraft dar; dieselbe braucht zwar nicht für jede Zeit zu verschwinden, aber ihr Mittelwert während der Zeit $t_2 - t_1$, daher auch das Integral über diesen Zeitraum erstreckt, ist unserer Annahme gemäß = 0. Die Berücksichtigung dieser Tatsache ergibt daher

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{2} \delta \frac{m c^2}{2} &= \frac{t_2 - t_1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dt \\ &= \frac{t_2 - t_1}{2} \varepsilon + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt, \end{aligned} \right.$$

eine Formel, die übrigens auch direkt aus dem Umstande folgt, daß ε die Summe der dem Atom im Mittel zugewachsenen lebendigen Kraft und der von ihm durchschnittlich geleisteten Arbeit ist.

Weiter ergibt sich wegen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ und $c = ds/dt$

$$(23) \quad \frac{m}{2} \int_{s_1}^{s_2} c \delta ds = \frac{m}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z \right).$$

Substituiert man die Werte (22) und (23) in die Gleichung (21), so wird:

$$\frac{m}{2} \delta \int_{s_1}^{s_2} c ds = \frac{t_2 - t_1}{2} \varepsilon + \int_{t_1}^{t_2} d \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) \\ = \frac{t_2 - t_1}{2} \varepsilon + \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) \right\}_{t_1}^{t_2}$$

Weil nun aber das Atom zu den Zeiten t_1 und t_1' gerade dieselbe Lage und Geschwindigkeit wie zu den Zeiten t_2 und t_2' hat, daher auch die Variationen zur Zeit t_1 denselben Wert

wie zur Zeit t_2 haben, so nimmt das letzte Glied für beide Grenzen denselben Wert an, verschwindet also und es bleibt:

$$(23a) \quad \varepsilon = \frac{m \delta \int_{s_1}^{s_2} c ds}{t_2 - t_1} = \frac{2 \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1},$$

welcher Wert, durch die Temperatur dividiert, liefert:

$$\frac{\varepsilon}{T} = \frac{2 \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt} = 2 \delta \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt.$$

Nehmen wir zunächst an, die Temperatur so wie die zugeführte Wärme sei während des ganzen Prozesses gleich für alle Teile des Körpers, so sind die gemachten Voraussetzungen erfüllt; alsdann ist aber die Summe aller ε gleich der gesamten dem Körper zugeführten Wärmemenge gemessen in Arbeitseinheiten. Nennen wir letztere δQ , so ist also:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta Q = \sum \varepsilon = 2 \sum \frac{\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \\ \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \sum \varepsilon = 2 \delta \sum \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt. \end{array} \right.$$

Wenn nun die Temperatur des Körpers von Teil zu Teil veränderlich ist, so können wir uns denselben jedesmal in so kleine Elemente dk zerlegen, daß man in denselben Temperatur und Wärmezufuhr als gleichförmig ansehen kann; bezeichnet man alsdann die irgend einem Elemente sowohl von außen als auch von den übrigen Teilen des Körpers zugeführte Wärme mit $\delta Q \cdot dk$, so ist wie früher:

$$\frac{\delta Q}{T} dk = 2 \delta \sum \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt,$$

wo die Summe über alle Atome des Elements dk zu erstrecken ist; daher:

$$\int \frac{\delta Q}{T} dk = 2 \delta \sum \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt;$$

wenn man hier sowohl das Integral als auch die Summe über den ganzen Körper nimmt.

Hieraus ist ersichtlich, daß das Integral

$$\iint \frac{\delta Q}{T} dk,$$

wo sich die eine Integration auf das Zeichen δ bezieht, und das von Clausius die Entropie des Körpers genannt wurde, den Wert

$$(24 a) \quad 2 \sum \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt + C$$

besitzt und zwischen gleichen Grenzen verschwindet, wenn Druck und Gegendruck immer gleich sind.

Wäre zweitens diese Bedingung nicht erfüllt, so könnte man in jedem Augenblick durch Hinzufügung neuer Kräfte diese Gleichheit herstellen. Die Wärmemenge, die in diesem letzteren Falle, der durch die hinzugedachten Kräfte auf den vorher betrachteten zurückgeführt ist, zugeführt werden müßte, um die gleichen Veränderungen des Volumens und der Temperatur des Körpers in allen seinen Teilen hervorzubringen, muß der Gleichung

$$\iint \frac{\delta Q}{T} dk = 0$$

genügen; allein dieselbe ist notwendig größer als die wirklich zugeführte, indem sie bei einer Ausdehnung des Körpers auch noch den Druck der hinzugedachten notwendig positiven Kräfte zu überwinden hat; bei einer Zusammendrückung aber immer ein Teil der drückenden Kräfte hinweggedacht und daher auch die von letzteren erzeugte Wärme im Falle des gleichen Druckes zugeführt werden muß. Es gilt also für die wirklich zugeführte Wärme nicht mehr das Gleichheitszeichen, sondern es wird:

$$\iint \frac{\delta Q}{T} dk < 0.$$

Ich will zunächst bemerken, wie man die Zeiten t_1 , t_2 , t_1' und t_2' und die dazugehörigen Bogen zu wählen hätte, falls das Atom eine auch nach beliebig langer Zeit nicht geschlossene

Kurve beschrieb. Zunächst müßte man die Zeiten t_1 und t_2 so weit voneinander abstehend denken, daß die mittlere lebendige Kraft während $t_2 - t_1$ die wahre mittlere lebendige Kraft wäre, also wohl am besten so weit abstehend, als man nur immer will. Dann müßten t_1' und t_2' so beschaffen sein, daß der Ausdruck

$$(25) \quad \frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z$$

für beide dieselben Werte annimmt. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit, der Verschiebung $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$ des Atoms und dem Kosinus des Winkels ist, den die Richtungen beider einschließen. Der zweiten Bedingung wird also am einfachsten genügt, wenn man s_1' und s_2' in jenen Punkten voraussetzt, wo die durch s_1 und s_2 zur ursprünglichen Bahnkurve gelegten Normalenebenen die variierte Bahn schneiden, für welchen Fall der Ausdruck (25) für beide Grenzen verschwindet. Übrigens würde die Variation der Grenzwerte, selbst wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre, in Vergleich zur Variation des Integrals verschwinden, wie aus dem folgenden hervorgehen wird. Als dann gelten ganz dieselben Schlüsse, die früher auf geschlossene Bahnen angewendet wurden, und man erhält wieder:

$$\iint \frac{\delta Q}{T} dk = 2 \Sigma \log \frac{\int_{\tau_2}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{\int_{\tau_1}^{t_1} \frac{m c^2}{2} dt},$$

wenn τ_1 und τ_2 die Grenzen derjenigen Bahn sind, die dem zur unteren Grenze des Integrals links gewählten Zustande entspricht. Man könnte nun glauben, daß dieser Wert des Integrals zwischen gleichen Grenzen genommen nicht verschwinde, weil, wenn man in der oben beschriebenen Weise fortfährt, durch s_1 eine Normalebene, durch deren Durchschnittspunkt mit der nächsten Kurve wieder eine Normalebene usw. zu legen, man nicht notwendig, bei schließlicher Rückkehr zur selben Kurve, wieder auf ihr denselben Punkt s_1 trifft; allein der getroffene Punkt wird sich in einer endlichen mit der Zeit $t_2 - t_1$ nicht fortwährend wachsenden Distanz von s_1 befinden; daher wird

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt \quad \text{von} \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{m c^2}{2} dt$$

nur um eine endliche Größe verschieden sein und der Quotient

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{m c^2}{2} dt}$$

sich um so mehr der Einheit, also sein Logarithmus der Null nähern, je mehr man $t_2 - t_1$ und mit ihm die beiden Integrale wachsen läßt, also je genauer man die mittlere lebendige Kraft nimmt; sind jedoch die beiden Grenzen von $\iint (\delta Q / T) dk$ verschieden, so übertrifft das eine Integral das andere im allgemeinen eine endliche Anzahl mal, es ist daher auch ihr Quotient und dessen Logarithmus trotz des unendlichen Anwachsens beider eine endliche Zahl. Es ist diese Auseinandersetzung eigentlich nichts weiter, als die mathematische Präzisierung des Satzes, daß man die Bahnen, falls sie in keiner endlichen Zeit geschlossen sind, doch in einer unendlichen Zeit als geschlossen ansehen darf.

Man sieht leicht, daß unsere Schlüsse von der Bedeutung der darin vorkommenden Größen in der Wärmelehre vollkommen unabhängig sind und daher zugleich ein Theorem der reinen Mechanik beweisen, welches dem zweiten Hauptsatze gerade in derselben Weise entspricht, wie das Prinzip der lebendigen Kräfte dem ersten; es ist dies, wie ein Blick in unsere Rechnungen lehrt, das Prinzip der kleinsten Wirkungen, jedoch in einer etwas allgemeineren Form, in der es etwa so ausgesprochen werden kann:

„Wenn ein System von Punkten unter dem Einfluß von Kräften, für die das Prinzip der lebendigen Kräfte gilt, beliebige Bewegungen macht, und dann allen Punkten eine unendlich kleine lebendige Kraft zugeführt wird und alle gezwungen werden sich auf unendlich nahen Kurven zu bewegen, so ist $\delta \Sigma (m/2) f c ds$ gleich der Summe der zugeführten lebendigen Kraft, multipliziert mit der halben Zeit, während der die Bewegung geschieht, wenn die Summe der Produkte

aus den Verschiebungen der Punkte, ihren Geschwindigkeiten und den Kosinus der Winkel beider für beide Grenzen gleich sind, z. B. die neuen Ausgangspunkte in den durch die alten Grenzpunkte gelegten Normalebenen der alten Bahnen liegen.“

Dieser Satz gibt, wenn man die zugeführten lebendigen Kräfte und die Variation der Grenzen gleich Null setzt, das Prinzip der kleinsten Wirkungen in seiner gewöhnlichen Form.

Man könnte das Problem auch umgekehrt auffassen; es würde dann, wenn man den zweiten Hauptsatz als theoretisch und experimentell bereits hinlänglich begründet ansähe oder gar, wie Zeuner in seiner neuen Auflage der mechanischen Wärmetheorie die Temperatur als den integrierenden Divisor des Differentialausdrucks δQ definierte, die gegebene Ableitung den Beweis liefern, daß der reziproke Wert der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms integrierender Faktor von δQ ist und daher die Temperatur gleich dem Produkt dieser mittleren lebendigen Kraft in eine willkürliche Funktion der Entropie sein muß. Diese vollkommen willkürliche Funktion müßte auf ähnliche Weise, wie es in der ersten Abteilung geschah, bestimmt werden; denn es ist klar, daß man bloß mittels des zweiten Hauptsatzes den Temperaturbegriff niemals von ihr befreien kann.

Schließlich will ich noch mit wenigen Worten die Anwendbarkeit der Formel (24) zur Berechnung der Wärmekapazität berühren. Die Differentiation der Gleichung

$$T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1}$$

liefert nämlich:

$$\delta T = \frac{\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} - \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1};$$

die auf Temperaturerhöhung verwendete Wärme δH wird gefunden, indem man δT bezüglich aller Atome summiert; sie ist also:

$$\delta H = \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} - \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

und die Vergleichung mit Formel (24) liefert:

$$\delta Q = 2 \delta H + 2 \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1};$$

es ist also die geleistete innere und äußere Arbeit

$$(25 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta L &= \delta H + 2 \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} + \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \end{aligned} \right.$$

und die Größe

$$\delta Z = \int \frac{\delta L}{T} dk = \sum \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt} + \sum \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1};$$

das von Clausius mit dem Namen Disgregation belegte Integral hat also den Wert:

$$(25 \text{ b}) \quad Z = \sum \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt + \sum \log(t_2 - t_1) + C.$$

Für den Fall, daß sich $t_2 - t_1$, was wir als die Schwingungsdauer eines Atoms betrachten können, nicht ändert, hat man:

$$\delta(t_2 - t_1) = 0;$$

daher:

$$\delta Q = 2 \delta H; \quad \delta L = \delta H;$$

d. h. die zugeführte Wärme teilt sich in zwei Teile, von denen der eine auf Erwärmung, der andere auf Arbeitsleistung verwendet wird.

Nimmt man an, der Körper habe durchaus gleiche Temperatur und es werde dieselbe auch durchaus gleichmäßig erhöht, so wird

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1} \quad \text{und} \quad \delta \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{t_2 - t_1}$$

für alle Atome gleich und die Wärmekapazität γ durch $\delta Q/p \delta T$ ausgedrückt, wenn man Wärme und Temperatur wieder in Arbeitseinheiten mißt und p das Gewicht des Körpers ist. Es erfolgt aber:

$$\gamma = \frac{\delta Q}{p \delta T} = \frac{2 \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt}{\frac{p}{N} \left[\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt \cdot \frac{\delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \right]}$$

Hier ist N die Anzahl der Atome im Körper und es kann, wenn a das Atomgewicht oder für zusammengesetzte Körper Molekulargewicht, n die Anzahl der Atome im Molekül ist,

$$\frac{p}{N} = \frac{a}{n}$$

gesetzt werden. Für den Fall $\delta(t_2 - t_1) = 0$ wird also

$$\frac{a \gamma}{n} = 2;$$

daher das Produkt aus spezifischer Wärme und Atomgewicht doppelt so groß, als für absolute Gase bei konstantem Volum, wo es = 1 wird. Dieses Gesetz will Masson auf experimentellem Wege für feste Körper bestätigt gefunden haben (siehe die bereits erwähnte Abhandlung „sur la correlation etc.“ Ann. de Chim., Ser. III, vol. 53); es würde also daraus ein derartiger Isochronismus der Schwingungen der Atome für feste Körper folgen; wahrscheinlich ist jedoch der Vorgang etwas komplizierter und ich werde vielleicht ein anderes Mal auf die Anwendung dieser Formeln auf feste Körper zurückkommen, in denen jedenfalls der Grund für die angenäherte Gültigkeit des Dulong-Petit und Neumannschen Gesetzes zu liegen scheint.

3.

Über die Anzahl der Atome in den Gasmolekülen und die innere Arbeit in Gasen.¹⁾

(Wien. Ber. 56. S. 682—690. 1867.)

In meiner Abhandlung über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie (Sitzb. Bd. 53)²⁾ habe ich eine Formel für die Anzahl der Atome, welche in den Gasmolekülen miteinander verbunden erscheinen, abgeleitet, welche trotz ihrer großen Wahrscheinlichkeit a priori mit der Erfahrung nicht übereinstimmte. Die Ursache hiervon lag darin, daß ich daselbst einer ziemlich verbreiteten Ansicht gemäß voraussetzte, die Temperaturerhöhung der Gase sei mit keiner Leistung von innerer Arbeit verbunden; die den Gasen bei konstantem Volum zugeführte Wärme werde also lediglich auf Erhöhung der mittleren lebendigen Kraft ihrer Atome verwendet. Um jedem Irrtume vorzubeugen, verstehe ich unter innerer Arbeit die Summe der mittleren Potentiale aller zwischen den Atomen des Körpers wirksamen Kräfte im zweiten Zustande weniger der Summe derselben Potentiale im ersten Zustande, also wenn die Potentiale der Atomkräfte zu irgend einer Zeit im ersten Zustande $p_1, p_2 \dots$, im zweiten Zustande $p_1', p_2' \dots$ sind, die Größe

$$\frac{\int p_1' dt}{\int dt} + \frac{\int p_2' dt}{\int dt} \dots - \frac{\int p_1 dt}{\int dt} - \frac{\int p_2 dt}{\int dt} \dots$$

wobei das Integral über eine große Zeit zu erstrecken ist. Dabei ist noch zu bemerken, daß, wenn das Zeichen des Potentials so gewählt wird, daß seine Ableitung nach r die Kraft darstellt, welche die Entfernung zu vergrößern sucht, der obige Ausdruck, wenn er positiv ist, gewonnene, wenn aber negativ, geleistete innere Arbeit darstellt. Der Satz der lebendigen

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 4. S. 235. 28. November 1867. (Vergl. zu dieser Abhandlung Nr. 32 Bd. II dieser Sammlung, Anhang.)

²⁾ Dieser Band S. 9.

Kräfte lehrt dann unmittelbar, daß man die geleistete innere Arbeit auch definieren kann als die gesamte zugeführte Wärme, weniger der geleisteten äußeren Arbeit und der Summe der mittleren lebendigen Kräfte aller Atome, welche letztere Summe ich als die gesamte im Körper vorhandene Wärme bezeichne. Von der oben erwähnten Ansicht scheint auch Clausius auszugehen, indem er die spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volum den Zuwachs der in der Gewichtseinheit derselben wirklich vorhandenen Wärme, d. h. lebendigen Kraft ihrer Molekularbewegung bei der Erwärmung um 1° nennt. Unter der lebendigen Kraft der Molekularbewegung ist hier wahrscheinlich nur die Summe der mittleren lebendigen Kräfte der Atome, nicht auch der mittleren Potentiale der zwischen ihnen wirkenden Kräfte zu verstehen, indem sonst für die innere Arbeit gar nichts oder höchstens die zur Verschiebung der Gleichgewichtslagen oder mittleren Lagen der Atome aufgewendete Arbeit übrig bliebe, welche jedoch bei konstantem Volumen, wenn der Körper nicht in einen anderen isomeren übergeht, ebenfalls für alle Körper verschwinden würde. Noch weit offenbarer huldigt dieser Ansicht Naumann, welcher in zwei Abhandlungen in den Annalen der Chemie und Pharmazie, nachdem er ohne allen theoretischen Grund angenommen hat, die lebendige Kraft der progressiven Molekularbewegung verhalte sich zu der der Bewegungen der Atome im Molekül, wie $3:n$ (eine Formel, die auch für einatomige Gase eine innere Bewegung liefert und für die spezifischen Wärmen Werte gibt, von denen die beobachteten oft um mehr als 100 Proz. abweichen), daraus unter der Annahme, daß alle auf innere Atombewegung verwendete lebendige Kraft in Form von Geschwindigkeit, keine in Form von Arbeit existiere, einen Wert für die Atomgeschwindigkeit ableitet. Jene Ansicht beruht aber offenbar auf einem Irrtume. Allerdings ist nämlich eine Ausdehnung oder Zusammendrückung eines idealen Gases ohne Temperaturveränderung mit keiner inneren Arbeitsleistung verbunden und die Formel

$$\gamma' - \gamma = \frac{Ap}{T}$$

daher richtig, weil bei einer solchen Ausdehnung oder Zusammendrückung bloß die mittleren Wege der Moleküle länger

oder kürzer werden, ohne daß sich, solange die Temperatur konstant bleibt, die innere Bewegung der Atome im Molekül ändert. Anders verhält es sich jedoch mit Temperaturveränderungen im Gase. Dieselben sind immer von Veränderungen der Bewegung der Atome im Molekül begleitet und da ja die Atome eines Moleküls durch bestimmte Kräfte zusammengehalten werden, so müssen jene Veränderungen notwendig im allgemeinen mit einer Veränderung des durchschnittlichen Potentials oder einer Arbeitsleistung dieser Kräfte, also im oben aufgestellten Sinne mit innerer Arbeit verbunden sein. Hierbei tritt nun noch eine Eigentümlichkeit ein; als ich nämlich die geleistete innere Arbeit als eine positive mit in Rechnung zog, so zeigte sich, daß die Differenz des Resultates von dem durch die Erfahrung gegebenen noch größer wurde, und ich glaubte schon auch diesen Erklärungsgrund derselben verwerfen zu müssen, als Prof. Loschmidt durch theoretische Betrachtungen geleitet auf den glücklichen Gedanken kam, jene innere Arbeit könne ja auch einen negativen Wert haben¹⁾, d. h. die mittlere Lage der Atome in den Molekülen gegen ihre Gleichgewichtslage könne durch Vermehrung der Geschwindigkeit auch so verändert werden, daß zu dieser Veränderung nicht noch Arbeit notwendig sei, sondern durch sie im Gegenteil Arbeit gewonnen, daher außer der zugeführten, noch Wärme frei werde. Mit Zugrundelegung dieses Gedankens erneuerte ich nun meine Rechnungen und gelangte zu einem Resultate, das mit der Erfahrung in vollkommen befriedigender Übereinstimmung steht. Ich will nun in der gegenwärtigen Abhandlung zeigen, wie sich meine Formeln umgestalten, wenn man auf die innere Arbeit Rücksicht nimmt. Ist N die Anzahl der Moleküle des Gases, n die Anzahl der Atome im Molekül, $mc^2/2$ die mittlere lebendige Kraft irgend eines Atoms, so ist gemäß den in der eingangs erwähnten Abhandlung entwickelten Anschauungen die Temperatur des Gases

$$T = \frac{m c^2}{2};$$

die gesamte im Gase enthaltene lebendige Kraft aber

$$L = \frac{N n m c^2}{2} = N n T.$$

¹⁾ Vgl. dazu den Anhang zu Nr. 32. Band II dieser Sammlung. D. H.

Führen wir nun dem Gase bei konstantem Volum die unendlich kleine Wärmemenge dQ zu, so ist

$$dQ = dL + dJ.$$

Die geleistete innere Arbeit dJ wird, solange die zugeführte Wärme unendlich klein ist, derselben proportional, daher auch proportional dL gesetzt werden können.

Setzen wir daher

$$dJ = k dL,$$

so bedeutet k , welches übrigens im allgemeinen eine Funktion der Temperatur sein wird, die innere Arbeit ausgedrückt in aliquoten Teilen der Vermehrung der im Gase vorhandenen lebendigen Kraft. Es wird dann

$$dQ = (1 + k) dL = (1 + k) N n dT,$$

und die Wärmekapazität bei konstantem Volumen bezogen auf die Volumseinheit ist

$$\gamma = \frac{dQ}{v dT} = (1 + k) \frac{N n}{v}$$

oder mit Rücksicht auf die Formel:

$$p v = \frac{2}{3} \cdot \frac{N m c^2}{2} = \frac{2}{3} N T,$$

in der p den Druck, v das Volumen des Gases bedeuten:

$$(1) \quad \gamma = \frac{3p}{2T} \cdot n(1 + k).$$

Aber wie bereits bemerkt, bleibt die Formel

$$(2) \quad \gamma' - \gamma = \frac{p}{T},$$

in der γ' die Wärmekapazität bei konstantem Drucke ist und das mechanische Äquivalent der Wärme weggelassen wurde, weil ich immer Wärme und Arbeit in gleichem Maße gemessen voraussetze, noch immer gültig, weil bei einer Ausdehnung ohne Temperaturerhöhung keine innere Arbeit geleistet wird. Aus (1) und (2) aber ergibt sich unmittelbar:

$$(3) \quad \frac{2\gamma}{3(\gamma' - \gamma)} = n(1 + k).$$

Aus dieser Formel kann, wenn man für n jene Werte einsetzt, welche die Chemie als sehr wahrscheinlich angibt, k , also die innere Arbeit im Gase, berechnet werden; sie kommt, wie

bereits bemerkt, fast immer negativ heraus und ich will zum Schluß in einer Tabelle ihre Werte für jene Gase zusammenstellen, für welche γ von Regnault bestimmt wurde. Um aber aus (3) einen Schluß auf den Wert von n ziehen zu können, ist noch eine zweite Relation zwischen n und k notwendig. Dieselbe kann von der Wärmekapazität der festen Körper hergenommen werden. In der bereits mehrmals erwähnten Abhandlung habe ich nachgewiesen, daß für Körper, deren Atome bei verschiedenen Temperaturen isochron schwingen, also z. B. von Kräften affiziert werden, die den Entfernungen der Atome von der Ruhelage proportional sind, die Hälfte der zugeführten Wärme auf Erhöhung der lebendigen Kraft, die andere Hälfte auf innere Arbeit verwendet wird. Dieser Satz kann übrigens auch durch Betrachtung von Kräften von der Form $a\xi + b\eta + c\zeta$ direkt bewiesen werden. Das Dulong-Petitsche Gesetz macht nun sehr wahrscheinlich, daß für alle Körper, welche demselben gehorchen, die Kräfte, welche auf die Atome wirken, annäherungsweise die obige lineare Form haben. Allerdings werden diese Kräfte durch die Ausdehnung infolge der Wärme etwas verändert und sollte man eigentlich statt der Wärmekapazitäten bei konstantem Drucke die bei konstantem Volum in Betracht ziehen, allein Edlund fand, daß sich beide an keinem der von ihm beobachteten festen Körper um mehr als 2 Proz., an vielen nicht einmal um 1 Proz. unterscheiden, was gegenüber den mehr als 10 Proz. betragenden Abweichungen vom Dulong-Petitschen Gesetz gar nicht in Betracht kommt. Nimmt man jene Gleichheit der innern Arbeit und der zur Temperaturerhöhung verwendeten Wärme an, so ist klar, daß die Wärmekapazität multipliziert mit dem Atomgewichte gleich dem doppelten Zuwachse der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms bei Erwärmung um einen Grad sein muß. Masson berechnete nun in der Tat, daß dieses Produkt gleich dem doppelten von dem entsprechenden Produkte für Gase sei; allein dies Resultat beruht auf einem Irrtume; er setzte nämlich die Äquivalenzahl des Sauerstoffes = 100 und verglich das erhaltene Produkt mit jenen Zahlen, bei denen sie = 8 vorausgesetzt ist. Nach dem Gesagten kann es auch nicht mehr befremden, daß dies nicht der Fall ist, und zwar nicht, weil die festen Körper eine Aus-

nahme machen, sondern weil in den Gasen die zugeführte Wärme nicht ausschließlich auf Erhöhung der mittleren lebendigen Kraft verwendet wird, sondern auch den Zustand der einzelnen Moleküle verändert. Die oben mit k bezeichnete Größe kann jedoch auch hieraus bestimmt werden und die Elimination von k aus beiden Relationen liefert eine Gleichung für n . Es ist nämlich für einen festen einfachen Körper bei einer Erwärmung um dt^0 C. die Vermehrung der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms nach dem obigen

$$(4) \quad dT = \frac{c\alpha}{2} dt,$$

wo c die Wärmekapazität bezogen auf die Gewichteinheit des Körpers und die Wärmeeinheit, in der T gemessen ist, α das Gewicht eines Atoms des Körpers ist. Die einem Gasatome bei gleicher Temperaturerhöhung unter konstantem Volum zugeführte Wärme ist:

$$(5) \quad dT + di = \frac{\gamma}{\rho} \alpha_0 dt.$$

Hier ist ρ die Dichte, daher γ/ρ die spezifische Wärme bezogen auf die Gewichteinheit, α_0 das Atomgewicht, oder bei zusammengesetzten Gasen das arithmetische Mittel der Atomgewichte aller Atome im Molekül; di ist die innere Arbeit eines Atoms, daher

$$= \frac{dJ}{Nn} = \frac{k dL}{Nn} = k dT,$$

die Substitution dieses Wertes in Gleichung (5) liefert:

$$(6) \quad (1 + k) dT = \frac{\gamma \alpha_0}{\rho} dt$$

und da für gleiche Temperaturerhöhungen die mittlere lebendige Kraft eines Atoms, also T gleiche Zuwächse erhält, so besitzt dT/dt in den Gleichungen (4) und (6) denselben Wert, kann also aus ihnen eliminiert werden, wodurch sich

$$(7) \quad 1 + k = \frac{2\gamma \alpha_0}{\rho c \alpha}$$

ergibt. Die Substitution dieses Wertes von $1 + k$ in die Gleichung (3) liefert endlich die bemerkenswerte Formel:

$$(8) \quad n = \frac{\rho c \alpha}{3(\gamma' - \gamma) \alpha_0} = \frac{c \alpha}{3(c_0' - c_0) \alpha_0},$$

wenn c_0' und c_0 die beiden Wärmekapazitäten des Gases bezogen auf die Gewichtseinheit sind.

Da $\gamma' - \gamma$ für alle Gase konstant ist, so sieht man hieraus, daß die Formel (8) von der spezifischen Wärme des Gases unabhängig ist, dieselbe daher in keiner notwendigen Relation mit der chemischen Beschaffenheit desselben steht, und alle Versuche, eine derartige Relation aufzufinden, wie sie zuerst von Clausius und nach ihm in großer Anzahl gemacht wurden, mußten, wenn auch für einzelne Gase von ähnlicher innerer Arbeit zutreffend, wieder für andere beträchtliche Abweichungen zeigen.

Da in der Formel (8) die Wärmekapazitäten im Zähler und Nenner vorkommen, so ist es gleichgültig, in welchen Maßen sie gemessen werden, auch für α und α_0 braucht man nicht die wahren Atomgewichte, sondern kann die ihnen proportionalen Äquivalentszahlen setzen; nur müssen beide in gleichem Maße gemessen werden. Die sicherste Garantie hierfür bietet die Betrachtung eines und desselben Körpers im festen und gasförmigen Zustande, z. B. des Chlors oder Broms, von denen das letztere von Regnault direkt in beiden Zuständen beobachtet wurde und für das erstere der Wert von $c\alpha$ aus seinen Verbindungen berechnet werden kann. Die Dichte des Chlors, verglichen mit der der Luft, ist 2,44; setzt man daher für letztere $\gamma' - \gamma = 0,0696$, so hat für Chlor $c_0' - c_0 = (\gamma' - \gamma) / \rho$ den Wert 0,0285 und der Nenner des Bruches in (8) wird, wenn die Äquivalentszahl des Chlors = 35,5 angenommen wird:

$$3 \cdot 0,0285 \cdot 35,5 = 3,035.$$

Für Brom wird dieser Nenner:

$$3 \cdot 0,01291 \cdot 80 = 3,098.$$

Da nun für die angenommenen Atomgewichte das Produkt $c\alpha$ nach dem Dulong-Petitschen Gesetz etwas größer als 6 ist, so gibt die Division $n = 2$, in den betrachteten Gasen sind also 2 Atome zu einem Molekül verbunden, was auch a priori am wahrscheinlichsten ist. Für die Verhältnisse der Zahl der Atome in den Molekülen anderer, sowohl einfacher als auch zusammengesetzter Gase zu den betrachteten liefert die Formel (8) genau dasselbe, wie das Ampèresche Gesetz unter der Voraussetzung, daß die Äquivalente den wahren Gewichten eines Moleküls proportional sind, solange die Bestand-

teile der Gase im festen Zustande das Dulong-Petitsche Gesetz befolgen. Für die Ausnahmen von jenem Gesetze dagegen scheint es nicht mehr erlaubt zu sein, die auf ihre Atome wirkenden Kräfte deren Entfernungen aus der Ruhelage proportional zu setzen, weshalb man im Zähler von (8) nicht ihre Äquivalentszahl und spezifische Wärme einsetzen darf, sondern das Produkt $c\alpha$ von einem anderen Körper entlehnen muß.

Ich lasse hier eine Tabelle folgen, in der die bei Erwärmung zu leistende innere Arbeit für die von Regnault untersuchten Gase als aliquoter Teil der gesammten bei konstantem Volum zugeführten Wärme, also die Werte von $k/1+k$ zusammengestellt sind. Die zweite Kolumne enthält dieselben nach Formel (3) berechnet aus der Relation zwischen der gesammten lebendigen Kraft und der der progressiven Bewegung; $\gamma' - \gamma$ wurde dabei konstant = 0,0696 gesetzt. Die Werte der dritten Kolumne sind nach Formel (7) durch Vergleichung mit der spezifischen Wärme der festen Körper berechnet. Das Produkt $c\alpha$ wurde dabei = 6,3, dem Mittelwerte aus Regnaults Beobachtungen an festen Körpern gesetzt, und zwar wurden die Äquivalente der das Dulong-Petitsche Gesetz nicht befolgenden Körper nicht geändert, sondern vorausgesetzt, daß für sie, falls ihre Atombewegungen isochron wären, $c\alpha$ ebenfalls = 6,3 wäre. Namentlich unbestimmt ist sowohl deshalb, als auch weil seine Dampfdichte unbekannt ist, das Äquivalent des Kohlenstoffes; es wurde = 12 gesetzt. Es ist klar, daß den Zahlen der dritten Kolumne dieselbe Unsicherheit wie dem Produkte $c\alpha$ anhaftet und es würde die beinahe konstante Differenz derselben mit denen der zweiten fast vollständig verschwinden, wenn man $c\alpha$ einen Wert zwischen 6,03 und 6,04 beilegte, der vollkommen innerhalb der Grenzen der beobachteten Werte liegt und zu dessen Annahme man ebenso berechtigt ist, wie zu der des Mittelwertes 6,3, indem ja die Differenzen nicht in den Gesetzen der Fehlerrechnung unterworfenen Beobachtungsfehlern ihren Ursprung haben.

Die vierte Kolumne zeigt dies, welche die innere Arbeit unter der Voraussetzung $c\alpha = 6,032$ berechnet enthält. Da die innere Arbeit von einer noch unbekanntem Größe, nämlich dem Wirkungsgesetze der Atomkräfte abhängt, so ist natür-

lich, daß dieselbe an kein bestimmtes Gesetz gebunden ist; auffallend bleibt jedoch immer die große gewonnene innere Arbeit bei Erwärmung der Verbindungen des Wasserstoffes mit schwereren Atomen, sowie die große zu leistende bei den Gasen, deren Moleküle mehrere Atome Chlor enthalten.

Name und atomistische Formel des Gases ¹⁾	$1 - \frac{3n(\gamma' - \gamma)}{2\gamma}$	$1 = \frac{q c \alpha}{2\gamma \alpha_0}$	
		$c \alpha = 6,3$	$c \alpha = 6,032$
Sauerstoff, Θ_2	- 0,221	- 0,273	- 0,219
Stickstoff, N_2	- 0,251	- 0,306	- 0,250
Wasserstoff, H_2	- 0,255	- 0,310	- 0,253
Chlor, Cl_2	+ 0,076	+ 0,042	+ 0,083
Brom, Br_2	+ 0,090	+ 0,070	+ 0,110
Stickstoffoxyd, $N\Theta$	- 0,221	- 0,276	- 0,221
Kohlenoxyd, $C\Theta$	- 0,247	- 0,300	- 0,245
Chlorwasserstoff, ClH	- 0,294	- 0,335	- 0,278
Wasserdampf, $H_2\Theta$	- 0,367	- 0,424	- 0,363
Schwefelwasserstoff, H_2S	- 0,424	- 0,506	- 0,441
Stickstoffoxydul, $N_2\Theta$	- 0,137	- 0,189	- 0,137
Kohlensäure, $\Theta\Theta_2$	- 0,196	- 0,254	- 0,201
Schweflige Säure, $S\Theta_2$	- 0,128	- 0,195	- 0,145
Schwefelkohlenstoff, ΘS_2	+ 0,095	+ 0,074	+ 0,113
Ammoniak, NH_3	- 0,817	- 0,901	- 0,820
Sumpfgas, ΘH_4	- 1,022	- 1,108	- 1,018
Leuchtgas, $\Theta_2 H_4$	- 0,951	- 1,033	- 0,947
Alkoholdampf, $\Theta_2 H_6 \Theta$	- 0,444	- 0,501	- 0,437
Chloräthyl, $\Theta_2 H_5 Cl$	- 0,541	- 0,611	- 0,543
Bromäthyl, $\Theta_2 H_5 Br$	- 0,310	- 0,355	- 0,297
Cyanäthyl, $\Theta_3 H_5 N$	- 0,270	- 0,325	- 0,269
Ätherdampf, $\Theta_4 H_{10} \Theta$	- 0,354	- 0,411	- 0,351
Schwefelwasserstoffäth., $C_4 H_{10} S$	- 0,318	- 0,388	- 0,328
Essigäther, $\Theta_4 H_8 O_2$	- 0,272	- 0,326	- 0,268
Aceton, $\Theta_3 H_6 \Theta$	- 0,365	- 0,437	- 0,375
Holländisches Öl, $\Theta_2 H_4 Cl_2$	- 0,157	- 0,217	- 0,164
Benzol, $\Theta_6 H_6$	- 0,330	- 0,387	- 0,328
Terpentinöl, $\Theta_{10} H_{16}$	- 0,177	- 0,226	- 0,174
Phosphorchlorür, PCl_3	+ 0,266	+ 0,236	+ 0,268
Arsenikchlorür, $AsCl_3$	+ 0,339	+ 0,314	+ 0,343
Zinnchlorid, $SnCl_4$	+ 0,343	+ 0,307	+ 0,336

¹⁾ Hier stehen noch die jetzt nicht mehr üblichen Symbole Θ , Θ , S an Stelle von O, C, S. D. H.

Über die Integrale linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.¹⁾

(Wien. Ber. 58. S. 54—59. 1868.)

Fast sämtliche Probleme der mathematischen Physik führen zu Differentialgleichungen, welche sich dadurch, daß man die zu suchenden Größen als sehr kleine Störungen eines bekannten Zustandes auffaßt, in lineare verwandeln lassen. Die Koeffizienten dieser linearen Differentialgleichungen könnten nur dann konstant sein, wenn der Körper seinen Raum vollkommen kontinuierlich erfüllen würde.

Nach der gegenwärtigen Ansicht über die Natur der Körper bestehen dieselben jedoch aus diskreten Molekülen, ihr Inneres ist also nicht gleichförmig, wohl aber wiederholt sich innerhalb verschwindend kleiner Strecken immer wieder dieselbe Anordnung von Molekülen. Es werden daher die Koeffizienten der Differentialgleichungen, welche die Bewegungen im Innern eines derartigen Körpers ausdrücken, keine konstanten, sondern mit der Lage des betrachteten Punktes veränderliche Werte haben, jedoch so, daß sie innerhalb sehr kleiner Intervalle stets wieder dieselben Werte annehmen.

Cauchy hat sich zuerst in seinem „Mémoire sur un théorème d'analyse et sur son application aux questions de physique“ mit derartigen Differentialgleichungen beschäftigt und den Satz aufgestellt, daß sich ihre Integrale ganz allgemein um so mehr den Integralen der entsprechenden Differentialgleichungen nähern, welche statt der variablen Koeffizienten die konstanten Mittelwerte derselben zu Koeffizienten haben, je kleiner die Periode wird, innerhalb welcher dieselben Werte der Koeffizienten wiederkehren. Fände dies statt, so brauchte man bei Ableitung der Gleichungen für beliebige physikalische

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 5. S. 146. 18. Juni 1868.

Vorgänge auf jene Unregelmäßigkeiten im Innern der Körper gar nicht Rücksicht zu nehmen, sobald sie sich nur in hinreichend kleinen Intervallen wiederholen; ist jedoch dieser Satz unrichtig, so werden alle Gleichungen, bei deren Ableitung auf jene innere Struktur der Körper keine Rücksicht genommen wurde (und dies ist bei allen Bewegungsgleichungen der Fall), zweifelhaft und ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung erscheint als eine bloß zufällige. Der Beweis dieses Theorems wird nun bei Cauchy nur für ganz spezielle Fälle und für diese durch eine sehr verwickelte Reihenentwicklung geliefert, deren Konvergenz durch nichts bewiesen wird. In der Tat zeigte Lorenz in einer Abhandlung über die Theorie des Lichtes (Pogg. Ann. 121) an einem einfachen Beispiele, daß dasselbe in seiner vollen Allgemeinheit nicht gilt und behauptet durch Aufdeckung dieses Fehlers bei Cauchy die Atomistik, die er früher schon durch verschiedene Gegengründe erschüttert hat, wirklich umgestoßen zu haben. Es dürfte sich daher wohl der Mühe lohnen, die Bedingungen, unter denen jenes Theorem gültig ist, zu untersuchen und einen strengeren und zugleich einfacheren Beweis dafür aufzustellen. Gehen wir von der linearen Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung

$$(1) \quad X_0 f^{(n)}(x) = X_1 f^{(n-1)}(x) + X_2 f^{(n-2)}(x) \dots + X_n f(x)$$

aus, wobei $f^{(n)} x \dots$ die Ableitungen von $f(x)$ bezüglich der independenten Variablen x , $X_0, X_1 \dots$ aber periodische Funktionen von x , also von der Form:

$$(2) \quad a + b \cos \frac{2\pi x}{\alpha} + c \cos \frac{4\pi x}{\alpha} + d \cos \frac{6\pi x}{\alpha} \dots$$

sind. Setzen wir hier für die verschiedenen Ableitungen von $f(x)$ ihre Definitionen ein und bezeichnen mit β einen beliebigen sehr kleinen Zuwachs von x , mit $f(x_0), f(x_0 + \beta), f(x_0 + 2\beta) \dots$ eine beliebige Reihe von Werten der Funktion $f(x)$, so ist ersichtlich, daß die Gleichung (1) nur ein abgekürzter Ausdruck für folgenden komplizierteren ist:

$$\begin{aligned} & X_0 \lim \frac{f(x + n\beta) - \binom{n}{1} f(x + (n-1)\beta) \dots \binom{n}{n} f(x)}{\beta^n} \\ &= X_1 \lim \frac{f(x + (n-1)\beta) - \binom{n-1}{1} f(x + (n-2)\beta) \dots}{\beta^{n-1}} \dots \end{aligned}$$

oder

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & X_0 \frac{f(x+n\beta) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)\beta) \dots}{\beta^n} \\ & = X_1 \frac{f(x+(n-1)\beta) - \binom{n-1}{1} f(x+(n-2)\beta) \dots}{\beta^{n-1}} \dots + \varepsilon, \end{aligned} \right.$$

wobei ε eine mit β verschwindende Größe ist. Dividieren wir nun die Gleichung (1) durch X_0 und integrieren von x_0 bis $x_0 + \alpha$ (α ist nach (2) die Größe der Perioden), so erhalten wir:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} f^{(n-1)}(x_0 + \alpha) - f^{(n-1)}(x_0) &= \int_0^\alpha \frac{X_1}{X_0} f^{(n-1)}(x) dx \\ &+ \int_0^\alpha \frac{X_2}{X_0} f^{(n-2)}(x) dx \dots \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir nun an, daß keine der Funktionen X_1/X_0 , $X_2/X_0 \dots$ unendlich oder diskontinuierlich werde, so folgt aus Gleichung (1) mit Notwendigkeit, daß auch $f(x)$, $f'(x) \dots f^{(n)}(x)$ stets endlich und kontinuierlich bleiben, wenn nur die gegebenen Anfangswerte von $f(x)$, $f'(x) \dots f^{(n-1)}(x)$ endlich waren, da ja aus derselben für $f^{(n)}(x)$ stets ein endlicher Wert, daher für $f^{(n-1)}(x) \dots$ stets unendlich kleine Zuwächse von der Ordnung der Zuwächse von x folgen. Wir können demnach zunächst statt jeder beliebigen Ableitung $f^{(k)}(x)$ unter dem Integralzeichen in Gleichung (4)

$$f^{(k)}(x_0) + (x - x_0) f^{(k+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]$$

oder um so mehr

$$f^{(k)}(x_0) + \alpha \vartheta' f^{(k+1)}(x_0 + \vartheta \alpha)$$

setzen, wobei ϑ und ϑ' Funktionen von x , aber jedenfalls kleiner als 1 sind, und erhalten daher, weil x_0 für die Integration als konstant anzusehen ist:

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x_0 + \alpha) - f^{(n-1)}(x_0) &= f^{(n-1)}(x_0) \int_0^\alpha \frac{X_1}{X_0} dx \\ &+ \alpha \int_0^\alpha \vartheta' \frac{X_1}{X_0} f^{(n-1)}(x_0 + \vartheta \alpha) dx \dots \end{aligned}$$

Da hier die Funktionen in den mit α multiplizierten Integralen immer endlich bleiben, so kann man statt der Summe aller dieser Integrale, α multipliziert mit einem endlichen Mittelwert R der Summe aller Funktionen unter dem Integralzeichen setzen und erhält, wenn man noch durch α dividiert und die Werte

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{X_1}{X_0} dx, \quad \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{X_2}{X_0} dx \dots,$$

welche nichts anderes als die Mittelwerte der Koeffizienten X_1/X_0 , X_2/X_0 .. sind, mit ξ_1 , ξ_2 .. bezeichnet:

$$\frac{f^{(n-1)}(x_0 + \alpha) - f^{(n-1)}(x_0)}{\alpha} = \xi_1 f^{(n-1)}(x_0) + \xi_2 f^{(n-2)}(x_0) \dots + \alpha R.$$

Integriert man diese Gleichung nochmals $(n-1)$ mal bezüglich x_0 von x_0 bis $x_0 + \alpha$ und dividiert durch α^{n-1} , so ergibt sich:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x_0 + n\alpha) - \binom{n}{1} f(x_0 + (n-1)\alpha) \dots f(x_0)}{\alpha^n} \\ = \xi_1 \frac{f(x_0 + (n-1)\alpha) - \binom{n-1}{1} f(x_0 + (n-2)\alpha) \dots}{\alpha^{n-1}} \dots + \alpha R', \end{array} \right.$$

wobei R' wieder irgend ein endlicher Ausdruck ist. Dies ist eine Gleichung mit endlichen Differenzen, welche bloß die Werte von $f(x)$ für $x = x_0$, $x = x_0 + \alpha$, $x = x_0 + 2\alpha \dots$ ins Unendliche bestimmt; ihre Form ist vollkommen identisch mit der der Gleichung (3), nur daß darin an der Stelle von β α und an der Stelle der variablen Koeffizienten ihre konstanten Mittelwerte stehen. Nehmen wir nun an, das Intervall, innerhalb dessen dieselben Werte der Koeffizienten wiederkehren, also α werde immer kleiner und kleiner, so nähert sich die Gleichung (5) mit endlichen Differenzen immer mehr einer Differentialgleichung, also ihr Integral immer mehr dem der Differentialgleichung, da ja die Definition des Integrals der Differentialgleichung die Limite ist, der das Integral der Gleichung mit endlichen Differenzen zueilt, sobald dieselben unendlich klein werden. Für unendlich kleine α endlich fallen beide zusammen. Außerdem rücken aber dann auch die Werte, für welche $f(x)$ durch Gleichung (5) bestimmt ist, immer näher und näher und es müssen daher für unendlich kleine α die Werte von $f(x)$,

für welche x zwischen x_0 und $x_0 + \alpha$ liegt, mit $f'(x_0)$; die Werte von $f'(x)$, für welche x zwischen $x_0 + \alpha$ und $x_0 + 2\alpha$ liegt, mit $f'(x_0 + \alpha)$ usw. übereinstimmen, wenn die Limite des Integrals der Gleichung (1) für $\lim \alpha = 0$ überhaupt noch eine zusammenhängende Funktion von x ist. Wir können daher den Satz aussprechen: Wenn eine lineare Differentialgleichung zwischen einer independenten und einer dependenten Variablen gegeben ist, deren Koeffizienten periodische Funktionen der independenten Variablen sind, so ist die Limite, der sich ihr Integral für beständig abnehmende Größe der Periode nähert, dieselbe, welche die Infinitesimalrechnung für das Integral einer Differentialgleichung von gleicher Ordnung auffinden lehrt, deren Koeffizienten die Mittelwerte der entsprechenden variablen Koeffizienten dividiert durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung der dependent Veränderlichen sind, von welchen Koeffizienten vorausgesetzt wird, daß sie weder unendlich noch diskontinuierlich werden. Der von Cauchy als allgemein gültig ausgesprochene Satz ist daher nur richtig, wenn der Koeffizient der höchsten Ableitung von $f'(x)$ gleich 1 ist. Da bei der von Lorenz als Beispiel gewählten Differentialgleichung:

$$\left(a + b \cos \frac{x}{\alpha}\right) \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0$$

der Koeffizient der höchsten Ableitung von φ nicht gleich 1 ist, so erklärt sich auch, weshalb ihr Integral für abnehmende Werte der Periode nicht mit dem der Differentialgleichung, welche die konstanten Mittelwerte zu Koeffizienten hat, zusammenfällt; dividiert man aber durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung von φ , so ergibt sich:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{a + b \cos \frac{x}{\alpha}} = 0;$$

der Mittelwert des Koeffizienten von φ ist dann $1/\sqrt{a^2 - b^2}$, daher die entsprechende Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = 0,$$

deren Integral

$$\varphi = e^{c - \frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}}}$$

in der Tat mit dem von Lorenz durch Integration der

allgemeinen Gleichung und späteren Übergang zu $\lim \alpha = 0$ gefundenen identisch ist.

Der gelieferte Beweis würde seine Gültigkeit nicht verlieren, wenn die gegebene Differentialgleichung die allgemeinere Form:

$$y^n + X_1 \varphi_1(y, y' \dots y^{n-1}) + X_2 \varphi_2(y, y' \dots y^{n-1}) \dots = 0$$

hätte. Durch Integration zwischen x und $x + \alpha$ und Division durch α erhalte man wieder:

$$\frac{f^{(n-1)}(x + \alpha) - f^{(n-1)}(x)}{\alpha} + \varphi_1(y, y' \dots) \frac{\int_0^\alpha X_1 dx}{\alpha} + \varphi_2(y, y' \dots) \frac{\int_0^\alpha X_2 dx}{\alpha} \dots + \alpha R = 0,$$

welche aus endlichen Differenzen und Differentialen gemischte Gleichung für unendlich kleine α in die entsprechende reine Differentialgleichung überginge. Er würde aber auch noch gültig bleiben, wenn in der Gleichung außerdem noch Ableitungen der dependent Veränderlichen nach anderen in den Koeffizienten nicht enthaltenen Variablen vorkämen, sobald die Koeffizienten der betreffenden Ableitungen von der höchsten Ordnung nicht unendlich klein von der Ordnung α würden. Alsdann wird nämlich keine dieser Ableitungen unendlich groß, und dieselben können unter dem Integralzeichen gerade so behandelt werden, wie früher $f(x)$, $f'(x)$. . . $f^{(n)}(x)$. In der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erscheinen alsdann wieder genau dieselben Ableitungen, wie in der ursprünglichen Gleichung, während die Korrektionsglieder den Faktor α haben und daher in R mit einbegriffen gedacht werden können. Ein Beispiel hierfür liefert die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = X \frac{d^2 y}{d t^2},$$

deren Integral für unendlich kleine α mit dem der Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\int_0^\alpha X dx}{\alpha} \cdot \frac{d^2 y}{d t^2}$$

zusammenfällt. Es ist dies bekanntlich die Gleichung, auf welche die meisten einfachen Schwingungsprobleme führen.

Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten.¹⁾

(Wien. Ber. 58. S. 517—560. 1868.)

Sämtliche bisher entwickelten Prinzipie der analytischen Mechanik beschränken sich auf den Übergang eines Systems materieller Punkte aus einem bestimmten Zustand in einen andern, wogegen man über die Gesetze des Wechsels der Lage und Geschwindigkeiten derartiger materieller Punkte, wenn sie längere Zeit sich selbst überlassen in Bewegung sind, mit Ausnahme weniger, die Theorie der idealen Gase betreffender Theoreme noch fast gar nichts weiß. Es mag dies die Hauptursache sein, warum die Lehrsätze der mechanischen Wärmetheorie, die sich ja auf derartige Bewegungen beziehen, bisher so unzusammenhängend und in ihrer analytischen Begründung so mangelhaft geblieben sind. Ich will im folgenden zuerst mehrere hierhergehörige Beispiele ausrechnen und schließlich ein allgemeines Theorem für die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Lagen und Geschwindigkeiten derartiger bewegter materieller Punkte aufstellen.

I. Betrachtung unendlich vieler materieller Punkte.

1.

Es befinden sich unendlich viele elastische Kreise von gleicher Masse und Größe und gegen ihre mittleren Wege verschwindendem Durchmesser in einer Ebene. Ähnliche weit allgemeinere Probleme wurden zwar bereits von Maxwell (Phil. mag. march 1868) aufgelöst; allein theils der Vollständigkeit halber, theils auch, weil Maxwells Deduktion wegen ihrer großen Kürze schwer verständlich ist und durch einen Druck-

¹ Vorläufiger Bericht. Wien. Anz. 5. S. 196. 8. Oktober 1868.

fehler (in den Formeln (20) und (21) soll es statt dV^2 , dV heißen) noch schwerer verständlich wird, soll dieses einfachste aller hierher gehörigen Probleme nochmals behandelt werden. Es ist von selbst klar, daß in diesem Falle jeder Punkt der Ebene als Ort für das Zentrum irgend eines der elastischen Kreise und jede Richtung für die Geschwindigkeitsrichtung desselben gleich wahrscheinlich ist, und ist daher nur noch die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Größen der Geschwindigkeiten zu suchen. Sei $\varphi(c)dc$ die Summe der Zeitmomente, während welcher die Geschwindigkeit irgend eines Kreises im Verlaufe einer sehr großen Zeit zwischen c und $c + dc$ liegt, dividiert durch diese sehr große Zeit, also die Wahrscheinlichkeit, daß c zwischen c und $c + dc$ liegt, und N die Anzahl der Kreise, deren Centra sich durchschnittlich in der Flächeneinheit befinden, so ist

$$N \varphi(c) dc$$

die Anzahl der Kreise in der Flächeneinheit, deren Geschwindigkeiten zwischen c und $c + dc$ liegen. Betrachten wir nun irgend

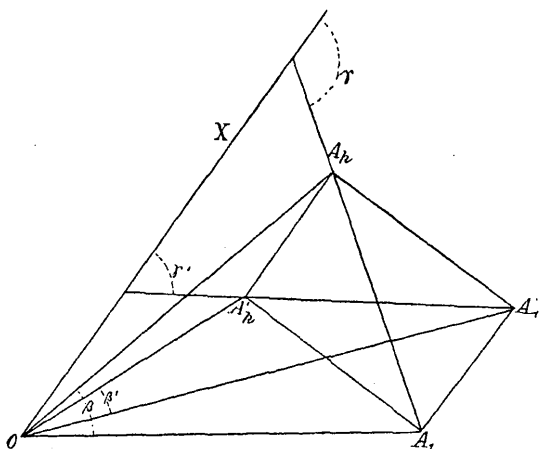


Fig. 1.

einen Kreis, den ich den Kreis I nenne, und dessen Geschwindigkeit c_1 durch OA_1 , Fig. 1, in Größe und Richtung dargestellt werde. Derselbe soll mit einem anderen, dem Kreise K zusammenstoßen; die Geschwindigkeit des letzteren c_k

sei durch OA_k repräsentiert, OX sei die Verbindungslinie der Centra beider Kreise im Momente des Zusammenstoßes und β der Winkel beider Geschwindigkeiten c_1 und c_k , so bleiben die Komponenten der Geschwindigkeiten beider Kreise senkrecht auf OX ungeändert, die parallel OX dagegen werden, da wir beide Massen gleich annahmen, einfach vertauscht; wir finden daher die Geschwindigkeiten der Kreise nach dem Stoß, indem wir $A_1 A_1'$ parallel OX ziehen und das Rechteck $A_1 A_1' A_k A_k'$ konstruieren. $OA_1' = c_1'$ und $OA_k' = c_k'$ sind dann die neuen Geschwindigkeiten; β' sei ihr Winkel. Ziehen wir noch die beiden Diagonalen des Rechtecks $A_1 A_k$ und $A_1' A_k'$, welche uns die relative Geschwindigkeit g der beiden Kreise vor und nach dem Stoße vorstellen und bezeichnen den Winkel der Geraden $A_1 A_k$ und OX mit γ , den der Geraden $A_1' A_k'$ und OX mit γ' , so findet man leicht:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} g^2 &= c_1^2 + c_k^2 - 2 c_1 c_k \cos \beta \\ c_1'^2 &= c_1^2 \sin^2 \gamma + c_k^2 \cos^2 \gamma - 2 c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta \\ c_k'^2 &= c_1^2 \cos^2 \gamma + c_k^2 \sin^2 \gamma + 2 c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta \\ \operatorname{tg} \beta' &= \frac{(c_1^2 - c_k^2) \sin \gamma \cos \gamma - c_1 c_k (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin \beta}{c_1 c_k \cos \beta} = \frac{\sqrt{c_1'^2 c_k'^2 - c_1^2 c_k^2 \cos^2 \beta}}{c_1 c_k \cos \beta} \\ c_1 c_k \cos \beta &= c_1' c_k' \cos \beta'; \quad \gamma' = \pi - \gamma. \end{aligned} \right.$$

Es fragt sich nun zuerst, zwischen welchen Grenzen c_1' ,

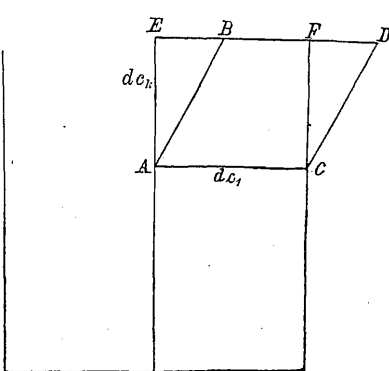


Fig. 2.

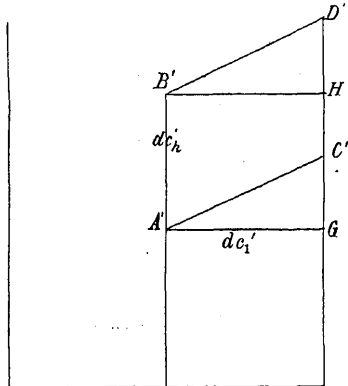


Fig. 3.

c_k' usw. liegen werden, wenn die Grenzen der entsprechenden Größen vor dem Stoße gegeben sind. Zu diesem Zwecke

denken wir uns alle vorkommenden Größen durch c_1 , c_k , g und γ ausgedrückt und verschaffen uns die Grenzen, zwischen denen c_1 , c_k , g und γ liegen sollen, in folgender Weise:

1. Wir lassen g und γ konstant, so bleibt auch γ' konstant, und ändern c_1 und c_k so, daß c_1' konstant bleibt, c_k' aber um dc_k' wächst. In Fig. 2 ist c_1 als Abszisse, c_k als Ordinate, in Fig. 3 c_1' als Abszisse, c_k' als Ordinate eines Punktes aufgetragen. Dieser Punkt beschreibt während unseres Prozesses in Fig. 2 den Weg AB , in Fig. 3 den Weg $A'B' = dc_k'$; dabei ist der Zuwachs von c_k gegeben durch die Gleichungen:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 0 = \left(c_1 \sin^2 \gamma - c_k \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta - c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \cos \beta \frac{d\beta}{dc_1} \right) dc_1 + \\ \quad + \left(-c_1 \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta + c_k \cos^2 \gamma - c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \cos \beta \frac{d\beta}{dc_k} \right) dc_k, \\ c_k' dc_k' = \left(c_1 \cos^2 \gamma + c_k \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta + c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \cos \beta \frac{d\beta}{dc_1} \right) dc_1 + \\ \quad + \left(c_1 \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta + c_k \sin^2 \gamma + c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \cos \beta \frac{d\beta}{dc_k} \right) dc_k, \end{array} \right.$$

welche durch Differentiation der 2. und 3. der Gleichungen (1) mit Rücksicht darauf, daß β Funktion von c_1 , c_k und g ist, gebildet wurden. In Fig. 2 ist dc_k durch die von A auf eine durch B parallel zur Abszissenachse gezogene Gerade ED gefällte Senkrechte AE dargestellt.

2. g und γ bleiben konstant und wir lassen für jeden Punkt der Linie AB bei konstantem c_k , c_1 um dc_1 wachsen; dadurch verschiebt sich AB nach CD und man bestreicht das ganze Parallelogramm $ABDC$. Dagegen mag der c_1' und c_k' repräsentierende Punkt das Parallelogramm $A'B'C'D'$ bestreichen. Dann ist für jeden Punkt der Linie $A'B'$ dc_1' durch die von A' auf $C'D'$ gefällte Senkrechte $A'G'$ gegeben und es ist wegen der Unveränderlichkeit von c_k

$$(3) c_1' dc_1' = \left(c_1 \sin^2 \gamma - c_k \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta - c_1 c_k \sin \gamma \cos \gamma \cos \beta \frac{d\beta}{dc_1} \right) dc_1.$$

3. Wir lassen für alle Punkte beider Parallelogramme, also für jedes konstante c_1 und c_k , g zwischen g und $g+dg$ variieren. Ich will dies wieder und zwar in Fig. 4 geometrisch versinnlichen. Sei OA_1 , wie in Fig. 1, die Geschwindigkeit c_1 ,

$O A_k$ die Geschwindigkeit c_k , $A_1 A_k$ die relative Geschwindigkeit g ; so verändert sich bei der unter Nr. 2 verzeichneten Variation c_k so, daß g konstant bleibt, also A_k sich längs der Linie $A_k L \perp A_1 A_k$ bewegt; $A_k B$ ist also identisch mit der in Fig. 2 durch AB dargestellten Veränderung. Gegenwärtig aber soll sich A_k so bewegen, daß c_k konstant bleibt, also längs $A_k M \perp O A_k$. Indem jeder Punkt der Linie $A_k L$ eine Parallele zu $A_k M$ beschreibt, wird das ganze Parallelogramm $A_k L N M$ bestrichen. In demselben stellt $A_k P$, die Verlängerung von $O A_k$, das Differential $d c_k$; $A_k Q$, die Verlängerung von $A_1 A_k$, das Differential $d g$ vor. Die Fläche, die dabei der Endpunkt von c_k bestreicht, ist

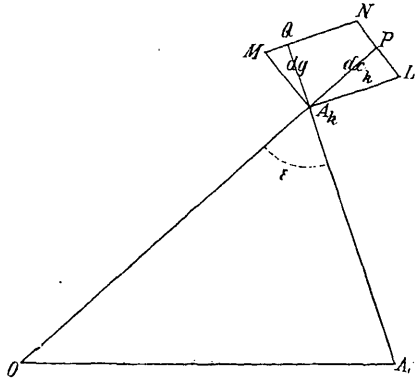


Fig. 4.

demselben stellt $A_k P$, die Verlängerung von $O A_k$, das Differential $d c_k$; $A_k Q$, die Verlängerung von $A_1 A_k$, das Differential $d g$ vor. Die Fläche, die dabei der Endpunkt von c_k bestreicht, ist

$$A_k L N M = \frac{d c_k d g}{\sin \epsilon},$$

wenn ϵ der Winkel $O A_k A_1$, also

$$(4) \quad \sin \epsilon = \frac{c_1 \sin \beta}{g}$$

ist. Man kann zur Versinnlichung, daß der Endpunkt von c_k dieses Parallelogramm für jeden Wert von c_1 beschreiben muß, die Figg. 2 und 4 vereinigen, indem man über $ABDC$ ein Parallelepiped W konstruiert, dessen Durchschnitte senkrecht zur Ebene der Zeichnung kongruent mit $A_k L N M$ sind wobei natürlich AE mit $A_k P$ (beide = $d c_k$ bei konstantem g) zusammenfallen muß. Das Volum dieses Parallelepipeds ist dann das Produkt der drei Differentiale $d c_1 d c_k d g / \sin \epsilon$. Für die entsprechenden Größen nach dem Stoße (Fig. 5) bleibt $d g$ dasselbe, weil ja die relative Geschwindigkeit durch den Stoß niemals geändert wird. Bei der Veränderung von c_k' bei konstantem g beschreibt A_k' wieder eine auf $A_1' A_k'$ senkrechte Linie $A_k' L'$ und die Projektion von $A_k' L'$ auf $O A_k'$, nämlich

$A'_k P'$, ist wieder dc'_k ; bei der Variation von g ändert sich aber auch c'_k ; die dabei beschriebene Linie $A'_k M'$ steht daher

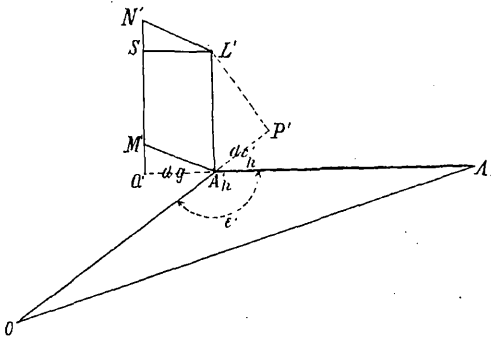


Fig. 5.

im allgemeinen nicht auf $O A'_k$ senkrecht. Das Differential dg ist aber wieder gegeben durch $A'_k Q' \perp A'_k L'$ und der Flächenraum des gesamten bestrichenen Parallelogramms ist:

$$A'_k L' N' M' = A'_k L' S Q' = \frac{dc'_k dg}{\sin \epsilon'}$$

Er kann in gleicher Weise wie $A_k L N M$ mit $A' B' D' C'$ zu einem Parallelepiped W' vereinigt werden. Endlich

4. Wir lassen γ für jedes konstant gedachte c_1, c_k und g zwischen den Grenzen γ und $\gamma + d\gamma$ variieren. Dabei ändert sich γ' wegen der letzten der Gleichungen (1) ebenfalls um $d\gamma$, denn es ist $d\gamma' = -d\gamma$, und auf das Zeichen kommt hier begreiflicherweise gar nichts an. Den Inbegriff aller jener Werte der vier Variablen c_1, c_k, g und γ , welche hierdurch entstehen, daß für jeden durch einen Punkt des in Nr. 3 erwähnten Parallelepipeds W repräsentierten Wert von c_1, c_k und g auch noch γ zwischen γ und $\gamma + d\gamma$ liegt, bezeichne ich kurz als die zwischen den ersten Grenzen liegenden Werte dieser Variablen. Ebenso bezeichne ich die durch das Parallelepiped W' dargestellten Werte, wo außerdem noch γ zwischen γ' und $\gamma' + d\gamma$ liegt, als die zwischen den zweiten Grenzen liegenden. Sobald vor einem Zusammenstoße die Werte der Variablen zwischen den ersten Grenzen lagen, werden sie nach demselben zwischen den zweiten liegen und umgekehrt. Wenn daher der Kreis I ebensooft mit Kreisen K so zusammenstößt,

daß vor dem Stoße die Variablen zwischen den ersten Grenzen liegen, also so, daß dieselben vor dem Stoße zwischen den zweiten Grenzen liegen, so werden ebensooft die ersten Werte der Variablen in die zweiten umgewandelt als umgekehrt und es wird daher, wenn dies für alle Wertepaare der Variablen und alle Kreise gilt, die Verteilung der Geschwindigkeiten durch die Zusammenstöße nicht geändert; sie ist also die gesuchte. Die Anzahl der ersteren Zusammenstöße heiße J , die der letzteren J' ; um sie zu bestimmen, denken wir uns um den Mittelpunkt des Kreises I mit dem doppelten Radius der Kreise einen Kreis II beschrieben (Fig. 6), der sich mit I fortbewegt,

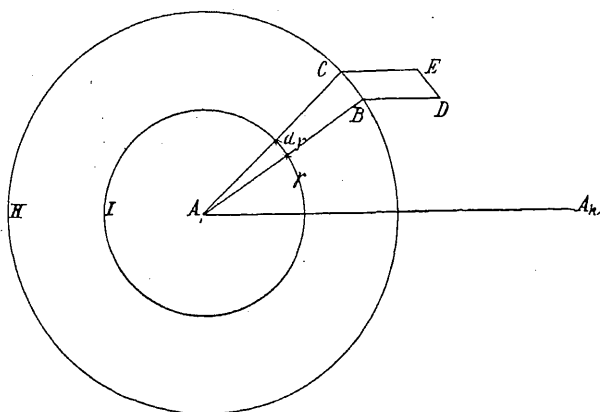


Fig. 6.

so findet ein Zusammenstoß mit dem Kreise K statt, sobald dessen Zentrum innerhalb des Kreises II eintritt. Sei nun $A_1 A_k$ die Richtung von g , so konstruieren wir zwei Radien $A_1 B$ und $A_1 C$, die mit $A_1 A_k$ die Winkel γ und $\gamma + d\gamma$ machen; ferner machen wir $BD = gt$, so beschreibt während der Zeit t der Mittelpunkt des Kreises I den Weg $gt = BD$ relativ gegen die Kreise K , daher durchläuft die Linie BC das Parallelogramm $BCED = R \cos \gamma d\gamma \cdot gt$ relativ gegen K , wo R der Radius des Kreises II , also der Durchmesser eines der Kreise I oder K ist. Es fragt sich nur noch um die Zeit t , während welcher die Geschwindigkeit des Kreises I zwischen den angenommenen Grenzen liegt, sowie um die Anzahl der Kreise K , deren Geschwindigkeiten c_k innerhalb der durch $A_k LNM$ dar-

gestellten Grenzen und deren Centra in diesem Parallelogramm $BCE D$ liegen. Denn mit allen diesen wird der Kreis I in der Zeiteinheit zwischen den gegebenen Grenzen zusammenstoßen. γ wird dabei von 0 bis 2π gezählt; sonst ist eine identische Konstruktion auf der anderen Seite von $A_1 A_k$ zu machen. Die Zeit, während welcher c_1 zwischen c_1 und $c_1 + dc_1$ liegt, ist $\varphi(c_1)dc_1$. Nun liegt zwar c_1 nicht für alle c_k zwischen diesen Grenzen, sondern z. B. für $c_k = c_k + dc_k$, wo A die Linie BD Fig. 2 beschreibt, zwischen $c_1 + BE$ und $c_1 + BE + dc_1$. Allein nach den Grundsätzen der Koordinatentransformation kann man, sobald nur die Differenz beider Grenzwerte immer gleich (hier immer $= dc_1$) ist und natürlich beide immer unendlich wenig von c_1 abstehen, statt dieser Grenzen immer c_1 und $c_1 + dc_1$ setzen, ohne das Resultat zu verändern. Mit andern Worten, die Wahrscheinlichkeit, daß c_1 und c_k zwischen gewissen in Fig. 2 durch eine unendlich kleine Fläche dargestellten Grenzen liegen, ist nur abhängig von dem Orte und der Größe dieser Fläche, nicht aber von ihrer Gestalt; also gleich für $ABDC$ und $A EFC$. Es kann daher die Zeit t , während welcher die Geschwindigkeit des Kreises I zwischen den angenommenen Grenzen liegt, gleich $\varphi(c_1)dc_1$ gesetzt werden und ist daher in Fig. 6 das Parallelogramm

$$BCE D = R \cos \gamma d\gamma g t = R \cos \gamma d\gamma g \varphi(c_1)dc_1.$$

Die Anzahl der Centra der Kreise in der Flächeneinheit, deren Geschwindigkeiten zwischen c_k und $c_k + dc_k$ liegen, ist $N\varphi(c_k)dc_k$. Die Endpunkte ihrer Geschwindigkeiten würden in Fig. 4 in einen Kreisring, mit dem Zentrum O , dem Radius c_k und der Breite dc_k fallen und da selbstverständlich für die Richtung von c_k jede Richtung in der Ebene gleich wahrscheinlich ist, so verhält sich die Zahl der Kreise, deren Geschwindigkeiten ihren Endpunkt in jenem Ringe haben, zur Zahl jener, die ihren Endpunkt in $A_k LNM$ haben, wie die Fläche jenes Ringes zur Fläche $A_k LNM$, also wie

$$2\pi c_k dc_k : \frac{dg dc_k}{\sin \epsilon};$$

sie ist also

$$\frac{N\varphi(c_k)dc_k dg}{2\pi c_k \sin \epsilon};$$

die Anzahl derartiger Kreise in der Fläche $BCE D$ in Fig. 6

wird gefunden, indem man noch mit der Größe dieser Fläche multipliziert, ist also:

$$\frac{R \cos \gamma d \gamma g \varphi(c_1) d c_1 N \varphi(c_k) d c_k d g}{2 \pi c_k \sin \varepsilon} = J.$$

In derselben Weise findet man

$$J' = \frac{R \cos \gamma' d \gamma' g \varphi(c_1') d c_1' N \varphi(c_k') d c_k' d g}{2 \pi c_k' \sin \varepsilon'}.$$

Die Verteilung der Geschwindigkeiten $\varphi(c)$ leistet den an sie gestellten Bedingungen Genüge, wenn für alle c_1 und c_k $J = J'$, also

$$(5) \quad \frac{\varphi(c_1) \varphi(c_k) \cos \gamma d c_1 d c_k d \gamma}{c_k \sin \varepsilon} = \frac{\varphi(c_1') \varphi(c_k') \cos \gamma' d c_1' d c_k' d \gamma'}{c_k' \sin \varepsilon'}$$

wird; nun hat man aber $\gamma' = \pi - \gamma$, $d \gamma' = -d \gamma$; daher

$$\cos \gamma d \gamma = \cos \gamma' d \gamma'.$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (4) und (1)

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{c_1' \sin \beta'}{c_1 \sin \beta} = \frac{(c_1^2 - c_k^2) \sin \gamma \cos \gamma - c_1 c_k (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin \beta}{c_1 c_k' \sin \beta}$$

und aus (2) und (3)

$$d c_1' d c_k' = d c_1 d c_k \cdot \frac{(c_1^2 - c_k^2) \sin \gamma \cos \gamma - c_1 c_k (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin \beta}{c_1' c_k' \sin \beta},$$

wodurch sich die Gleichung (5) auf

$$(6) \quad \frac{\varphi(c_1)}{c_1} \cdot \frac{\varphi(c_k)}{c_k} = \frac{\varphi(c_1')}{c_1'} \cdot \frac{\varphi(c_k')}{c_k'}$$

reduziert, welche für alle der Gleichung

$$(7) \quad c_1^2 + c_k^2 = c_1'^2 + c_k'^2$$

genügenden Werte gelten muß. Setzt man also $\varphi(c)/c = e^{\chi(c^2)}$ und $c_1^2 = \omega_1$, $c_k^2 = \omega_k \dots$, so muß

$$\chi(\omega_1) + \chi(\omega_k) = \chi(\omega_1') + \chi(\omega_1 + \omega_k - \omega_1'),$$

woraus sich durch Differentiation nach ω_1 , ω_k und ω_1' und Vergleichung der Resultate $\chi'(\omega)$ gleich einer Konstanten $-h$ ergibt. Es ist also

$$\varphi(c) = b c e^{-h c^2}.$$

Die Integration von 0 bis ∞ liefert $b = 2h$. Dasselbe findet man in mehr symmetrischer Weise, wenn man zum totalen Differential des Logarithmus der Gleichung (6), das der Gleichung (7) mit einem so zu bestimmenden Faktor multi-

pliziert addiert, daß der Koeffizient von dc_k' verschwindet und dann auch die der übrigen Differentiale gleich Null setzt. Man sieht, daß die Frage nach den neuen Grenzen der Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen materieller Punkte nach einer Annäherung genau in derselben Weise gelöst wurde, wie die Koordinatentransformation der Variablen in Differentialausdrücken gewöhnlich durchgeführt wird; und es ist klar, daß auch in allen anderen Fällen beide Probleme identisch sind, was sich in folgender Weise aussprechen läßt: Wenn $x, y, z \dots$ die Variablen sind, von denen Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung zweier Atome vor einer Annäherung abhängen und dieselben vor der Annäherung zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$ usw. liegen, so findet man die Grenzen der entsprechenden Größen $x', y', z' \dots$ nach der Annäherung, indem man $x', y', z' \dots$ durch $x, y, z \dots$ ausdrückt und im Differentialausdruck $dx' dy' dz' \dots$ die Variablen $x' y' z' \dots$ in $xyz \dots$ transformiert. Es ist also:

$$(8) \quad dx' dy' dz' \dots = \begin{vmatrix} \frac{dx'}{dx} & \frac{dy'}{dx} & \frac{dz'}{dx} & \dots \\ \frac{dx'}{dy} & \frac{dy'}{dy} & \frac{dz'}{dy} & \dots \\ \frac{dx'}{dz} & \frac{dy'}{dz} & \frac{dz'}{dz} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix} dx dy dz \dots$$

Maxwell bewerkstelligt die Koordinatentransformation in weit einfacherer Weise; ich habe jedoch absichtlich bei diesem einfachsten Beispiele den direkten Weg gewählt. Er läßt nämlich zuerst den Endpunkt A_1 von c_1 in Fig. 1, das beliebig gestaltete Flächenelement dV beschreiben, dabei aber nicht c_k und γ , sondern die Größe und Richtung von $A_1 A_k = g$ konstant. Es ist aus der Zeichnung klar, daß dann A_1' ein kongruentes Flächenelement beschreibt. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt von c_1 in dV liegt, nennt er

$$f(c_1) dV = \frac{\varphi(c_1) dV}{2\pi c_1};$$

ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, daß A_1' innerhalb des kongruenten Flächenelementes liegt

$$f(c_1') dV = \frac{\varphi(c_1') dV}{2\pi c_1'}.$$

Nun mag, während die absolute Lage von OX , also der Zentrillinie der Kreise im Momente des Zusammenstoßes noch immer konstant bleibt, g sich für jede seiner früheren Lagen in Größe und Richtung ändern; es ist am einfachsten dabei, den einen Endpunkt A_1 fix zu lassen. Und zwar ändere es sich zuerst so, daß c_k konstant bleibt und sich nur β um $d\beta$ ändert; die Bahn seines beweglichen Endpunktes A_k dabei ist in Fig. 7 durch $A_k B \perp O A_k$ dargestellt. Aus der Konstruktion,

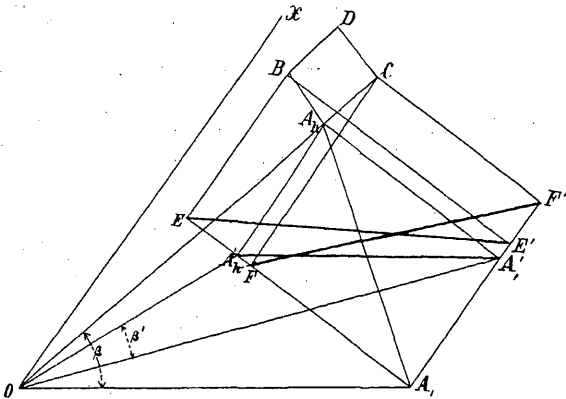


Fig. 7.

durch welche die Geschwindigkeiten nach dem Stoße gefunden wurden, ist ersichtlich, daß dabei die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße $A_1' A_k'$ in $E E'$ übergeht, wobei $A_1 E B E'$ wieder ein Rechteck ist. Dann ändere sich g für jedes β so, daß β konstant bleibt und c_k um $dc_k = A_k C = B D$ parallel $O A_k$ wächst. Die jedesmalige Lage von $A_1' A_k'$ findet sich wieder durch Konstruktion; sie ist z. B., wenn A_k die Linie $A_k C$ durchlaufen hat, $F F'$. Die Fläche, die dabei der Endpunkt von c_k bestreicht, ist $A_k B D C = c_k dc_k d\beta$; die Wahrscheinlichkeit, daß derselbe innerhalb dieser Fläche liegt, ist also

$$f(c_k) c_k dc_k d\beta = \frac{\varphi(c_k) dc_k d\beta}{2\pi}.$$

Die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße $A_1' A_k'$ hat keinen fixen Endpunkt. Allein gemäß dem bereits erwähnten Lehr-

satzes der Koordinatentransformation ist es völlig gleichgültig, ob man dieselbe in der Weise, wie es in Fig. 7 geschieht, variieren läßt oder aber sie in jeder neuen Lage so weit parallel mit sich selbst verschiebt, daß dabei ihr einer Endpunkt immer in A_1' zu liegen kommt; dadurch wird nämlich nur die Lage des dV , innerhalb dessen sich A_1' zu aller Anfang bewegte, für die verschiedenen Lagen und Größen von $A_1'A_k'$ eine andere, ohne aber seine Größe zu ändern; bei fixem A_1' würde aber A_k' eine gleiche Fläche $c_k d c_k d \beta$ bestreichen. Die Wahrscheinlichkeit, daß A_k' innerhalb dieser Fläche liegt, ist

$$f(c_k') c_k d c_k d \beta = \frac{\varphi(c_k')}{2\pi c_k'} \cdot c_k d c_k d \beta.$$

Endlich läßt man für alle so gewonnenen Zusammenstöße OX um den Winkel $d\gamma$ variieren. Dann ist die Anzahl der Kreise K , welche in der Zeiteinheit mit dem Kreise I zusammenstoßen, gleich dem Produkte der Fläche, welche die Linie BC (in Fig. 6) in der Zeiteinheit bestreicht, der Wahrscheinlichkeit, daß c_1 innerhalb seiner Grenzen liegt und der N -fachen Wahrscheinlichkeit, daß c_k innerhalb seiner Grenzen liegt, also

$$g \cos \gamma d g \cdot f(c_1) dV \cdot N f(c_k) c_k d c_k d \beta.$$

Ebenso ist die Anzahl der Kreise, die mit I zwischen den gestrichelten Grenzen zusammenstoßen würden

$$g \cos \gamma d \gamma f(c_1') dV N f(c_k') c_k d c_k d \beta.$$

Die Gleichheit beider fordert also

$$f(c_1) f(c_k) = f(c_1') f(c_k')$$

oder

$$\frac{\varphi(c_1)}{c_1} \cdot \frac{\varphi(c_k)}{c_k} = \frac{\varphi(c_1')}{c_1'} \cdot \frac{\varphi(c_k')}{c_k'}.$$

Hieran würde sich das Problem von Kreisen mit verschiedenen Massen und Größen, dann die analogen Probleme im Raume und endlich das Problem reihen, wo die Wirkung je zweier materieller Punkte eine beliebige, aber nur in sehr kleinen Entfernungen bemerkbare Funktion der Entfernung ist. Da jedoch alle diese Aufgaben in vollkommen gleicher Weise wie die behandelte gelöst werden können und außerdem in der Lösung Maxwells mit einbegriffen sind, so will ich sogleich zu einem neuen Probleme übergehen.

2.

Längs einer Geraden OX bewegt sich eine elastische Kugel mit der Masse M , die gegen O mit einer Kraft gezogen wird, die ganz allgemein eine Funktion der Entfernung ihres Zentrums von O sei. Gegen dieselbe werden fortwährend andere elastische Kugeln von der Masse m und sehr verschiedenen Geschwindigkeiten in unregelmäßigen Zeitintervallen längs derselben Geraden geschleudert, jedoch so, daß, wenn man sich alle geschleuderten Kugeln schon lange vor O in der Linie OX , ohne sich zu stören, sich fortbewegend denkt, die Anzahl der Kugeln mit einer Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$, welche sich durchschnittlich in der Längeneinheit befinden, eine bestimmte Funktion von c , $N\varphi(c)dc$ ist.

Das Potential der Kraft, mit der M gegen O gezogen wird, sei $\chi(x)$, so ist, solange die Bewegung durch keinen Zusammenstoß gestört wird

$$(9) \quad \frac{MC^2}{2} = \chi(x) + A,$$

wobei C die Geschwindigkeit der Kugel M und x die Entfernung ihres Mittelpunktes von O ist. Durch die drei Größen x , A und c ist die Art des Zusammenstoßes vollkommen bestimmt. Die Zeit, während welcher im Verlaufe der Zeiteinheit die Konstante A der Gleichung (9) zwischen den Werten A und $A + dA$ liegt, sei $\Phi(A)dA$. Die Zeit, während welcher außerdem noch x zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegt, verhält sich zu dieser, wie die Zeit dx/C , während welcher der Weg dx zurückgelegt wird, zur Zeit, welche vergeht, während x von seinem kleinsten bis zu seinem größten Wert anwächst und die wir, weil sie bloß Funktion von A ist, mit $t(A)$ bezeichnen wollen. Um jedem Bedenken einer Änderung dieses Wertes durch die Zusammenstöße vorzubeugen, wollen wir das Zeitintervall zwischen zwei Zusammenstößen groß gegen $t(A)$ voraussetzen; diese Zeit ist also

$$\frac{\Phi(A) dA dx}{C t(A)}.$$

Zählen wir die Geschwindigkeit c , sowie C in der Richtung

der positiven x als positiv, so ist der Weg, den M während dieser Zeit relativ gegen m zurücklegt

$$\frac{(C-c) \Phi(A) dA dx}{C t(A)}.$$

Die Anzahl der Kugeln m , deren Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$ liegt und deren Centra sich auf dieser Strecke befinden, mit denen also M in die Zeiteinheit zwischen den angenommenen Grenzen zusammenstößt, ist nach unserer Annahme

$$J = \frac{(C-c) \Phi(A) dA dx}{C t(A)} \cdot N \varphi(c) dc.$$

Bezeichnen wir die entsprechenden Größen nach dem Stoße mit einem Striche, so ist zunächst, weil wir denselben momentan voraussetzen $x' = x$, $dx' = dx$; ferner ist

$$C' = \frac{2mc + (M-m)C}{M+m},$$

$$c' = \frac{2MC + (m-M)c}{M+m},$$

daher

$$A' = \frac{MC'^2}{2} - \chi(x)$$

$$= \frac{2m^2 Mc^2 + 2m(M-m)c \sqrt{2M(\chi(x) + A)} + (M-m)^2 (\chi(x) + A)}{(M+m)^2}.$$

Ferner ist nach Formel (8)

$$dA' dc' dx' = \left(\frac{dA'}{dA} \cdot \frac{dc'}{dc} - \frac{dA'}{dc} \cdot \frac{dc'}{dA} \right) dA dc dx,$$

oder wie man durch Differentiation der obigen Werte findet:

$$dA' dc' dx' = - \frac{C'}{C} dA dc dx.$$

Da nun die Anzahl der Kugeln, welche in der Zeiteinheit mit M so zusammenstoßen, daß die Größen A , c und x zwischen den Grenzen A' und $A' + dA'$, c' und $c' + dc'$ und x' und $x' + dx'$ liegen

$$J' = \frac{(C' - c') \Phi(A') dA' dx' N \varphi(c') dc'}{C' t(A')}$$

ist und diese Größen durch den Stoß wieder umgekehrt in A , c und x verwandelt werden, so kann die Wahrscheinlichkeit

$\Phi(A)$ bestehen, wenn $J = J'$, also wegen $C' - c' = -(C - c)$ und

$$\frac{dA' dx' dc'}{C'} = - \frac{dA dx dc}{C}$$

$$\frac{\Phi(A')}{t(A')} \cdot \varphi(c') = \frac{\Phi(A)}{t(A)} \varphi(c)$$

ist, für alle A, A', c, c' , die also nur die Bedingung

$$A + \frac{m c^2}{2} = A' + \frac{m c'^2}{2}$$

erfüllen müssen, woraus man ähnlich wie früher findet:

$$\varphi(c) = b e^{-h \cdot \frac{m c^2}{2}}, \quad \Phi(A) = B t(A) e^{-h A}.$$

Wenn man also die Kugeln M so hinschleudert, daß ihre Geschwindigkeiten nach dem Gesetze $\varphi(c)$ verteilt sind, welches dem der Verteilung der Geschwindigkeiten unter Gasatomen vollkommen analog ist, so werden sich die Bewegungszustände von M nach dem Gesetze $\Phi(A)$ verteilen. Würde man Kugeln hinschleudern, deren Geschwindigkeiten nach einem anderen Gesetze verteilt wären, so würde natürlich auch $\Phi(A)$ ein anderes, und ich will mich mit der Aufsuchung desselben nicht beschäftigen; es würde dann die Kugel M beständig die Verteilung der Geschwindigkeiten unter den Kugeln m stören und diese müßte künstlich in der willkürlich angenommenen Weise erhalten werden. Die Summe der Zeitmomente, während welcher im Verlaufe der Zeiteinheit nicht nur A zwischen A und $A + dA$, sondern auch x zwischen x und $x + dx$ liegt, ist:

$$\frac{\Phi(A) dA dx}{C t(A)} = \frac{B e^{-h A} dA dx}{C} = 2 B e^{h \left[x(x) - \frac{M C^2}{2} \right]} dx dC.$$

Die Konstante B kann leicht durch Integration über alle möglichen Werte von x und von $C = 0$ bis $C = \infty$ bestimmt werden. Da die gefundene Funktion ein Produkt aus einer Funktion von x und einer Funktion von C ist, so ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen x und $x + dx$ liege, für jedes beliebige konstante C proportional $e^{h x(x)}$ und die, daß c zwischen c und $c + dc$ liegt, für jedes x proportional $e^{-h \cdot M C^2 / 2}$ ist. Es folgt ferner, daß die mittlere lebendige Kraft der Kugel M für jedes beliebige zwischen zwei bestimmten Grenzen gelegene x und daher auch im ganzen gleich der mittleren lebendigen Kraft der Kugeln m ist.

3.

Das entsprechende Problem in der Ebene übergehend, will ich nun folgende Aufgabe behandeln:

Das Zentrum einer elastischen Kugel von der Masse 1, die ich als Kugel I bezeichnen will, werde durch eine Kraft gegen einen fixen Punkt im Raume O gezogen, welche ganz allgemein eine Funktion seiner Entfernung von O ist. Außerdem befinden sich im Raume noch unendlich viele andere elastische Kugeln (II), deren Masse ebenfalls = 1 ist und die von Zeit zu Zeit sowohl untereinander als auch mit I zusammenstoßen. Wie werden sich die verschiedenen Geschwindigkeiten unter den Kugeln II verteilen und welches wird die Wahrscheinlichkeit irgend einer Form der Bahn der Kugel I um O sein?

Sei die Entfernung des Zentrums der Kugel I von O , r ; der Winkel dieser Geraden mit irgend einer fixen in der Bahnebene gelegenen Geraden ϑ ; die Geschwindigkeit der Kugel I C ; deren Komponente in der Richtung des mit r bezeichneten Radiusvektors, also $dr/dt = \rho$; deren Komponente in einer senkrecht auf r in der Bahnebene gelegenen Richtung, also $r(d\vartheta/dt) = \theta$ und das Potential des Anziehungsgesetzes von O auf I $\chi(r)$, so ist

$$\frac{C^2}{2} = \chi(r) + A; \quad C^2 = \rho^2 + \theta^2$$

und die doppelte Flächengeschwindigkeit des Zentrums der Kugel I ist

$$a = r\theta.$$

Da für die Lage der Bahnebene der Kugel I offenbar jede durch O gelegte Ebene im Raume gleich wahrscheinlich ist, so ist unser Problem gelöst, wenn wir die Wahrscheinlichkeit, daß A und a zwischen den Grenzen A und $A + dA$ und a und $a + da$ liegen, also das Verhältnis der Zeit, während welcher dies stattfindet, zur ganzen Zeit kennen. Dasselbe sei $\Phi(A, a) dA da$. Ebenso sei $\varphi(c) dc$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Geschwindigkeit c einer der Kugeln II zwischen c und $c + dc$ liegt. Wir fixieren nun einen bestimmten Zusammenstoß und verwandeln ihn dadurch, daß wir von den ihn bestimmenden Größen eine nach der anderen unendlich wenig

wachsen lassen in unendlich viele zwischen gewissen Grenzen gelegene; dann suchen wir, zwischen welchen Grenzen die entsprechenden Größen nach dem Zusammenstoße liegen und setzen schließlich die Zahl der Zusammenstöße zwischen den ersten Grenzen gleich der zwischen den zweiten.

I. Die Zentrallinie beider Kugeln im Momente des Zusammenstoßes LM , Größe und Richtung der Geschwindigkeiten beider Kugeln bleiben konstant, nur r variere zwischen r und $r + dr$; da der Stoß momentan geschieht, so liegt auch die Entfernung nach dem Stoße r' zwischen r und $r + dr$.

II. LM , sowie Größe und Richtung der relativen Geschwindigkeit g beider Kugeln bleibe konstant und es variere:

1. Für jedes r die Richtung von C , während seine Größe konstant bleibt; die Bahnebene bleibt ebenfalls unverändert.

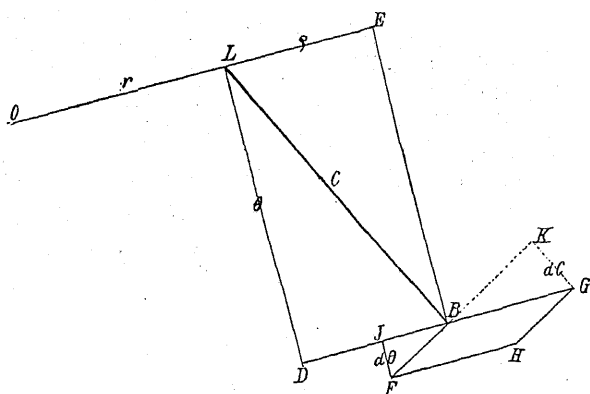


Fig. 8.

Dieselbe sei die Ebene der Zeichnung in Fig. 8; ferner sei daselbst OL die Größe und Richtung von r , also L der Mittelpunkt von I , LB stelle Größe und Richtung von C , also LE von ρ , LD von θ dar; so wird bei der gegenwärtigen Variation B die Linie $BF \perp LB$ beschreiben. Wegen der Unveränderlichkeit von C und r bleibt auch A konstant; dagegen ändert sich a um $da = r d\theta$; das Differential $d\theta$ wird konstruiert, indem man von F eine Senkrechte FJ auf BD fällt.

2. Für jede Kombination von r und θ lasse man C bei konstantem θ und konstanter Bahnebene um $dC = GK$ wachsen,

wobei B die Linie BG beschreibt; dabei ändert sich nur A um $dA = CdC$.

3. Man lasse endlich noch die Bahnebene bei konstanter Richtung von $OL = r$, das ja durch den Stoß nicht verändert wird, sich um den Winkel $d\varepsilon$ drehen; dabei beschreibt der Punkt B eine Linie senkrecht auf der Ebene $BFHG$, deren Größe $= \theta d\varepsilon$ ist und welche in der Zeichnung nicht dargestellt ist. Derselbe hat daher im ganzen alle Punkte innerhalb eines Parallelepipeds Π vom Volum

$$BFHG \cdot \theta d\varepsilon = \frac{CdCd\theta}{\varrho} \cdot \theta d\varepsilon = \frac{a dA da d\varepsilon}{r^2 \varrho}.$$

innegehabt. Die Grenzen der Werte der Variabeln nach dem Stoße, die ich durchweg mit einem Striche bezeichnen will, findet man durch Konstruktion des bereits beim ersten Problem angewandten Rechtecks und da gegenwärtig weder die Lage der Geraden LM im Raume, noch die Lage und Größe von g eine Änderung erfährt, so ist klar, daß der Endpunkt von C' ein genau gleich großes Parallelepiped Π' wie der von C durchlaufen wird.

Die Summe der Zeitmomente in der Zeiteinheit, während welcher A und a zwischen den Grenzen A und $A + dA$ und a und $a + da$ liegen, ist $\Phi(A, a) dA da$, die der Zeitmomente, während welcher außerdem r zwischen r und $r + dr$ und ε zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, ist daher

$$\mathfrak{U} = \frac{\Phi(A, a) dA da dr d\varepsilon}{2\pi \varrho t(A, a)},$$

wobei $t(A, a)$ die Zeit vorstellt, welche von dem Augenblicke, in welchem r seinen größten, bis zu dem, in welchem r seinen kleinsten Wert oder umgekehrt hat, vergeht und die offenbar nur Funktion von A und a ist. Dieselbe sei wieder klein gegen das Zeitintervall zwischen zwei Zusammenstößen. Dasselbe gilt natürlich von den mit Strichen versehenen Werten und es ist die Wahrscheinlichkeit, daß A zwischen A' und $A' + dA'$... liegen, gleich

$$\frac{\Phi(A', a') dA' da' dr d\varepsilon'}{2\pi \varrho' t(A', a')}.$$

Dabei würde aber der Endpunkt von C ein Parallelepiped mit dem Volum $\theta' dA' da' d\varepsilon' / r \varrho'$ beschreiben; die Wahrscheinlich-

Volumeneinheit liegen, sei N , deren Geschwindigkeiten dabei zwischen c und $c + dc$ liegen, $N\varphi(c)dc$. Diese Zahl verhält sich zur Zahl jener, deren Geschwindigkeiten außerdem mit C einen Winkel zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ bilden und für die die durch C und c gelegte Ebene mit der Bahnebene von I Winkel zwischen ζ und $\zeta + d\zeta$ bildet, wie $4\pi : \sin \lambda d\lambda d\zeta$; letztere Zahl, für die also, wenn man den einen Endpunkt von c jedesmal nach L versetzt, der andere innerhalb Ω fiele, ist daher

$$\mathfrak{B} = \frac{N\varphi(c) \sin \lambda dc d\lambda d\zeta}{4\pi}.$$

Ebenso ist die Anzahl jener Kugeln, für die c , λ und ζ zwischen den Grenzen c' und $c' + dc'$, λ' und $\lambda' + d\lambda'$, ζ' und $\zeta' + d\zeta'$ liegen,

$$\frac{N\varphi(c') \sin \lambda' dc' d\lambda' d\zeta'}{4\pi}.$$

Für letztere Kugeln würde aber der Endpunkt von c' ein Parallelepipet mit dem Volumen $c'^2 \sin \lambda' dc' d\lambda' d\zeta'$ beschreiben. Es verhält sich also die zuletzt gefundene Anzahl zu der Anzahl \mathfrak{B}' der Kugeln, für die der Endpunkt von c' innerhalb Ω' fällt, wie

$$c'^2 \sin \lambda' dc' d\lambda' d\zeta' : c^2 \sin \lambda dc d\lambda d\zeta.$$

Es ist also

$$\mathfrak{B}' = \frac{N\varphi(c') c'^2 \sin \lambda' dc' d\lambda' d\zeta'}{4\pi c'^2}.$$

IV. Endlich ändere sich für alle betrachteten Kombinationen die Richtung der Linie LM so, daß ihre Durchschnittspunkte mit einer mit dem Radius 1 um L beschriebenen Kugel innerhalb des Oberflächenelementes $d\omega$ fallen. Man kann nun um das Zentrum der Kugel I eine Kugel mit R , der Summe der Radien der Kugel I und II als Radius beschreiben und sich dieselbe mit I fortbewegt denken. Auf derselben schneiden alle Richtungen von LM ein Oberflächenelement $R^2 d\omega$ aus. Dasselbe legt in der Zeiteinheit relativ gegen II den Weg g zurück, beschreibt also, wenn γ der Winkel der Linien LM und g ist, den Zylinder $g \cos \gamma R^2 d\omega$; in der Zeit \mathfrak{A} beschreibt es daher den Zylinder $g \mathfrak{A} \cos \gamma R^2 d\omega$ und findet daselbst die Centra von $\mathfrak{A} \mathfrak{B} g \cos \gamma R^2 d\omega$ Kugeln II , mit denen also I in der Zeiteinheit zwischen den angenommenen Grenzen zusammenstößt. Diese Anzahl heiße J . Ebenso findet man J' , die Anzahl

der Kugeln *II*, mit denen *I* in der Zeiteinheit zwischen den Grenzen jener Werte der Variablen zusammenstößt, welche dieselben durch den Stoß erhalten, gleich $\mathfrak{U}' \mathfrak{B}' g \cos \gamma' R^2 d\omega'$. Die Berücksichtigung, daß $d\omega' = d\omega$, $\gamma' = \pi - \gamma$, daher, weil es hier auf das Zeichen nicht ankommt, $\cos \gamma' = \cos \gamma$ ist (hätten wir den Differentialausdruck analytisch transformiert, so hätten wir für ihn auch das entgegengesetzte Zeichen erhalten und beide Minus würden Plus liefern) und die Substitution der Werte für \mathfrak{U} , \mathfrak{B} , \mathfrak{U}' und \mathfrak{B}' reduziert die Gleichung $J = J'$ auf

$$\frac{\Phi(A, a)}{at(A, a)} \cdot \frac{\varphi(c)}{c^2} = \frac{\Phi(A', a')}{a't(A', a')} \cdot \frac{\varphi(c')}{c'^2},$$

worin A , A' , a , a' , c , c' nur an die Gleichung

$$A + \frac{c^2}{2} = A' + \frac{c'^2}{2}$$

gebunden sind. Man findet aus derselben ohne Schwierigkeit

$$\varphi(c) = bc^2 e^{-\frac{hc^2}{2}}, \quad \Phi(A, a) = Bat(A, a)e^{-hA}.$$

Die Konstanten b und B bestimmen sich wieder durch Integration über alle c , a und A . b ist $= \sqrt{2h^3/\pi}$. Dieser Wert von $\varphi(c)$ ist genau auch derjenige, welcher zum Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen den Kugeln *II* untereinander erforderlich ist. Die Anzahl der Zeitmomente, für die nicht nur A zwischen A und $A + dA$ und a zwischen a und $a + da$, sondern auch r zwischen r und $r + dr$ liegt, ist

$$\frac{\Phi(A, a) dA da dr}{at(A, a)} = \frac{Bae^{-hA} dA da dr}{\varrho}.$$

Führen wir hier die neuen Variablen r , C und α ein, wobei α der Winkel zwischen C und r ist, so haben wir

$$r = r, \quad \frac{C^2}{2} = \chi(r) + A, \quad C \sin \alpha = \theta = \frac{a}{r},$$

daher

$$dA da dr = r C^2 \cos \alpha dC d\alpha dr$$

und

$$\frac{Bae^{-hA} dA da dr}{\varrho} = Br^2 C^2 \sin \alpha dC d\alpha dr \cdot e^{h\left[\chi(r) - \frac{C^2}{2}\right]}.$$

Der Raum, innerhalb dessen sich dabei das Zentrum der Kugel *I* befindet, ist $4\pi r^2 dr$, der, innerhalb dessen sich der Endpunkt von C befindet, $2\pi C \sin \alpha \cdot C d\alpha \cdot dC$. Da innerhalb

dieser Räume alle Raumelemente gleichberechtigt sind, so kann man allgemein sagen: die Wahrscheinlichkeit, daß das Zentrum von I innerhalb des Raumelementes ds liegt, ist unabhängig vom Raumelement, innerhalb dessen der Endpunkt von C liegen mag, proportional $e^{hx(r)} ds$, die, daß letzterer innerhalb des Raumelementes $d\sigma$ liegt, unabhängig von der Lage des ds , proportional $e^{-h(c^2/2)} d\sigma$. Durch Vergleichung mit der Form von $\varphi(c)$ ergibt sich ferner, daß die mittlere lebendige Kraft für jeden beliebigen Ort der Kugel I , also auch allgemein gleich der der Kugeln II sein muß. Beide sind gleich $3/2h$. Ganz in analoger Weise löst sich das Problem, wenn die Massen beider Kugeln verschieden sind.

4.

Längs einer Geraden OX bewege sich ein materieller Punkt I , der wie in Aufgabe 2 mit irgend einer Kraft gegen O gezogen werde. Gegen denselben werden ebenfalls wie in der genannten Aufgabe andere materielle Punkte II längs derselben Linie geschleudert. Die Anzahl derjenigen Punkte II in der Längeneinheit, deren Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$ liegt, sei durchschnittlich $N\varphi(c)dc$. Aber die Wirkung der Punkte II auf I soll nicht momentan, sondern eine beliebige Funktion ihrer Entfernungen sein, von der wir nur voraussetzen wollen, daß ihre Wirksamkeit erst bei einer bestimmten Annäherung l beginne. Auch wollen wir annehmen, daß die Fälle, in denen zwei oder mehrere der materiellen Punkte II mit I in kleinere Entfernung als l kommen, vernachlässigt werden können. Die Masse eines der materiellen Punkte II sei m , seine Geschwindigkeit c , die entsprechenden Größen für den Punkt I seien M und C , dessen Entfernung von O x und das Potential der ihn dahin ziehenden Kraft $\chi(x)$, so ist, solange I nicht in die Wirkungssphäre eines Punktes II gerät:

$$\frac{MC^2}{2} = \chi(x) + A.$$

Fassen wir zunächst die Einwirkung zwischen beiden Punkten I und II , wenn ihre Distanz zwischen den Grenzen l und $l - \delta l$ liegt, ins Auge, und zwar sei, wenn man mit δt die Zeit, während welcher die Distanz innerhalb dieser Werte

liegt, mit $\delta_1 C$ und δc die durch diese Einwirkung hervorgerufenen Zuwächse der Geschwindigkeiten der Punkte *I* und *II* bezeichnet:

$$M\delta_1 C = -m\delta c = L\delta t.$$

Sei nun die Summe der Zeitmomente, während welcher die Konstante *A* während der Zeiteinheit zwischen *A* und *A* + *dA* liegt, $\Phi(A)dA$, so können wir eine Annäherung zweier Punkte durch die Werte charakterisieren, welche *A*, *x* und *c* im Momente haben, wo beide Punkte in die Distanz *l* kommen. Die Anzahl der Punkte *II*, die sich während der Zeiteinheit dem Punkte *I* so nähern, daß diese Größen in jenem Momente zwischen *A* und *A* + *dA*, *x* und *x* + *dx*, *c* und *c* + *dc* liegen, wird dann sein:

$$J = (c - C) \frac{dx}{Ct(A)} \cdot \Phi(A)dA \cdot N\varphi(c)dc;$$

dabei sind *c* und *C* in der Richtung der positiven *x* gezählt. Die Zeit, während welcher die Entfernung beider Punkte zwischen *l* und *l* - δl liegt, ist $\delta t = \delta l / (c - C)$. Deshalb werden die Größen *x*, *C* und *c*, nachdem die Punkte in die Entfernung *l* - δl gelangt sind, die Werte

$$x' = x + \delta x = x + C\delta t = x + \frac{C\delta l}{c - C}$$

$$C' = C + \delta C = C + \frac{L\delta t}{M} + \frac{\chi'(x)\delta t}{M} = C + \frac{\delta l}{M(c - C)} [L + \chi'(x)]$$

$$c' = c + \delta c = c - \frac{L\delta l}{m(c - C)}; \quad A' = A + \delta A = A + \frac{CL\delta l}{(c - C)}$$

haben. Die neuen Grenzen der Werte *x'*, *c'*, *C'* sind wieder nach Formel (8) zu berechnen. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß sich alle gestrichenen Größen um ein unendlich Kleines von den ungestrichenen unterscheiden, daher ihre Differentiale nach der gleichen ungestrichenen Größe gleich 1 mehr einem unendlich Kleinen, ihre Differentiale nach den übrigen aber unendlich klein werden; in der Determinante (8) können daher alle Glieder mit Ausnahme des ersten als unendlich klein 2. Ordnung vernachlässigt werden und auch in diesem können alle Produkte der $\delta x \dots$ weggelassen werden. Dadurch erhält man

$$dA' dx' dc' = \left(1 + \frac{d\delta A}{dA} + \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta c}{dc} \right) dA dx dc.$$

Bei Entwicklung der partiellen Differentialquotienten ist

natürlich zu beachten, daß C Funktion von A und x , nämlich

$$C = \sqrt{\frac{2}{M} [\chi(x) + A]}$$

ist. Im Vorbeigehen sei der Identität dieser Formel mit der für Volumdilataion des rechtwinkligen Parallelepipeds $dA dx dc$ erwähnt. Es ergibt sich

$$dA' dx' dc' = \left[1 + \frac{c\chi'(x)\delta l}{M(c-C)^2 C} + \frac{cL\delta l}{M(c-C)^2 C} + \frac{L\delta l}{m(c-C)^2} \right] dA dx dc.$$

Wir finden daher durch Substitution der Werte für alle mit Strichen versehenen Größen

$$\frac{c' - C'}{C'} dA' dx' dc' = \frac{c - C}{C} dA dx dc.$$

Vorsehen wir nun die Werte dieser Variablen nach der Annäherung bis in die Distanz $l - 2\delta l$ mit zwei Strichen, so verhalten sich die doppeltgestrichenen gegenüber den einfachgestrichenen gerade so wie diese gegenüber den ungestrichenen; es ist also

$$\frac{c'' - C''}{C''} dA'' dx'' dc'' = \frac{c' - C'}{C'} dA' dx' dc',$$

daher auch

$$\frac{c'' - C''}{C''} dA'' dx'' dc'' = \frac{c - C}{C} dA dx dc.$$

Setzen wir diese Schlußweise fort, und bezeichnen die Werte unserer Variablen in dem Momente, wo beide materielle Punkte wieder in der Distanz l anlangen, also sich voneinander trennen, mit dem Index n , so gelangen wir schließlich zur Gleichung

$$\frac{c^{(n)} - C^{(n)}}{C^{(n)}} dA^{(n)} dx^{(n)} dc^{(n)} = \frac{c - C}{C} dA dx dc.$$

Die Zahl der Punkte II , welche in der Zeiteinheit mit I so zusammentreffen, daß A , x und c zu Anfang zwischen den Grenzen $A^{(n)}$ und $A^{(n)} + dA^{(n)}$, $x^{(n)}$ und $x^{(n)} + dx^{(n)}$, $c^{(n)}$ und $c^{(n)} + dc^{(n)}$ liegen, ist aber

$$\begin{aligned} J^{(n)} &= \frac{\Phi(A^{(n)})}{t(A^{(n)})} N\varphi(c^{(n)}) \frac{c^{(n)} - C^{(n)}}{C^{(n)}} dA^{(n)} dx^{(n)} dc^{(n)} \\ &= \frac{\Phi(A^{(n)})}{t(A^{(n)})} N\varphi(c^{(n)}) \frac{c - C}{C} dA dx dc, \end{aligned}$$

und es ist klar, daß bei einem solchen Zusammentreffen die Werte der Variablen umgekehrt beim Auseinandergehen im

Momente des Eintretens der Distanz l zwischen A und $A + dA$, x und $x + dx$, c und $c + dc$ liegen werden. $\varphi(c)$ und $\Phi(A)$ erfüllen daher die an sie gestellte Bedingung, wenn man $J = J^{(n)}$, daher

$$\frac{\Phi(A)}{t(A)} \varphi(c) = \frac{\Phi(A^{(n)})}{t(A^{(n)})} \varphi(c^{(n)})$$

für alle A , $A^{(n)}$, c und $c^{(n)}$ hat, welche der Bedingung genügen:

$$A + \frac{m c^2}{2} = A^{(n)} + \frac{m (c^{(n)})^2}{2}.$$

$\varphi(c)$ und $\Phi(C)$ haben daher allgemein denselben Wert, den sie in dem speziellen Falle hatten, wo zwischen den materiellen Punkten Stoßkräfte tätig waren.

5.

Alles bleibe wie in der vorigen Aufgabe, nur bewegen sich die materiellen Punkte I und II statt auf einer Geraden

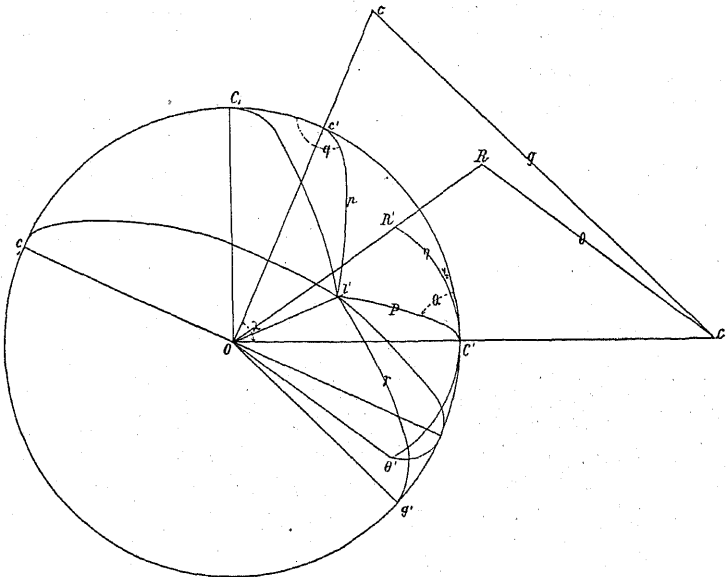


Fig. 10.

im Raume. Die beibehaltenen Buchstaben haben die frühere Bedeutung. Außerdem sei die Ebene des Papiers in Fig. 10

die Ebene der vom Punkte O aus aufgetragenen Geschwindigkeiten C und c , die in Größe und Richtung durch die Linien OC und Oc repräsentiert werden mögen. cC stellt dann die relative Geschwindigkeit g beider Punkte dar. OR sei die Richtung des von O nach I gezogenen Radiusvektors r . Seiner Größe nach stelle $\rho = OR$ die Komponente von C parallel RO , $\theta = RC$ die Komponente von C senkrecht auf OR in der Bahnebene COR dar. Mit den gestrichelten Buchstaben sind zur Bequemlichkeit die Durchschnittspunkte der entsprechenden Linien mit einer um das Zentrum O mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel bezeichnet. Der Durchschnittspunkt dieser Kugel mit der von O aus aufgetragenen Richtung der Verbindungslinie l beider materieller Punkte im Moment, wo sie aufeinander zu wirken beginnen, heiße l' , der mit der von Null aus aufgetragenen Richtung von g , g' , der mit der Richtung von θ , θ' . Endlich seien die durch ihre Bögen gemessenen Winkel $c'C' = \lambda$, $R'C' = \eta$, $l'C' = P$, $l'c' = p$, $l'g' = \gamma$ und die sphärischen Winkel $R'C'c' = \zeta$, $l'C'c' = Q$, $180 - l'c'C' = q$.

Die Art eines Zusammentreffens soll nun bestimmt sein durch die Werte der acht Größen

$$A = \frac{MC^2}{2} - \chi(r), \quad a = r\theta, \quad r, \quad c, \quad \lambda, \quad \zeta, \quad P, \quad Q$$

im Momente der Annäherung bis in die Distanz l . Ist dann $\Phi(A, a)dA da$ die Zeit, während welcher im Verlauf der Zeiteinheit die die Art der Bewegung von I charakterisierenden Größen A und a zwischen A und $A + dA$ und a und $a + da$ liegen, so ist

$$\frac{\Phi(A, a)dA da dr}{qt(A, a)}$$

die Zeit, während welcher noch dazu seine Entfernung von O zwischen r und $r + dr$ liegt. $t(A, a)$ ist wieder die Zeit, die vom Eintritt eines Maximums bis zu dem eines Minimums von r vergeht. Denken wir uns mit dem materiellen Punkte I eine Kugel, in deren Zentrum er sich befindet und deren Radius $= l$ ist, sich bewegend, so legt das Flächenelement $l^2 \sin P dP dQ$ derselben, welches den Grenzen von P und Q entspricht, während der oben gefundenen Zeit den Weg

$$g \cdot \frac{\Phi(A, a)dA da dr}{qt(A, a)}$$

relativ gegen II zurück, durchheilt also dabei im Raume das Volum

$$\frac{\Phi(A, a) dA da dr}{\varrho t(A, a)} \cdot gl^2 \sin P \cos \gamma dP dQ.$$

In der Volumeinheit befinden sich $N\varphi(c)dc$ Punkte II , daher

$$\frac{N\varphi(c)dc \sin \lambda d\lambda d\zeta}{4\pi}$$

Punkte, deren Geschwindigkeitsrichtung innerhalb der angenommenen Grenzen liegt. Die Anzahl der Punkte II , die also in der Zeiteinheit so die Distanz l von I überschreiten, daß $A, a \dots$ im Momente des Eintrittes in diese Distanz Werte haben, die zwischen den Grenzen A und $A + dA, a$ und $a + da \dots$ liegen, ist

$$J = \frac{\Phi(A, a)\varphi(c)}{4\pi\varrho t(A, a)} Ngl^2 \sin P \cos \gamma \sin \lambda dA da dr dc dP dQ d\lambda d\zeta.$$

Die Zeit, welche bis zum Erreichen der Distanz $l - \delta l$ vergeht, ist

$$\delta t = \frac{\delta l}{g \cos \gamma} = \frac{\delta l}{C \cos P - c \cos p}.$$

Die Kraft, welche während dieser Zeit auf II in der Richtung von l wirkt, ist $K_2 = L \delta t$; die, welche auf I wirkt, $K_1 = -L \delta t$; daher verändert sich c um

$$\delta c = \frac{L \delta l \cos p}{m(C \cos P - c \cos p)} = \frac{L \delta l (\cos P \cos \lambda + \sin P \sin \lambda \cos Q)}{m(C \cos P - c \cos p)}.$$

A um

$$\delta A = -\chi'(r) \delta r + MC \delta C = -\frac{C \cos P L \delta l}{C \cos P - c \cos p};$$

ferner ist

$$\delta r = \varrho \delta t$$

$$\begin{aligned} \delta \theta &= \frac{K_1}{M} \cos(\theta' l) - \frac{\theta \varrho \delta t}{r} \\ &= -\frac{L \delta l [\cos(\theta' C) \cos P - \sin(\theta' C) \sin P \cos(Q - \zeta)]}{M(C \cos P - c \cos p)} - \frac{\theta \delta r}{r} \end{aligned}$$

$$= -\frac{L \delta t [\theta \cos P - \varrho \sin P \cos(Q - \zeta)]}{MC} - \frac{\theta \delta r}{r}$$

$$\delta a = -\frac{L \delta t [a \cos P - r \varrho \sin P \cos(Q - \zeta)]}{MC}.$$

Sind ferner die Bögen $C C_1$ und $c' c_1$ gleich $\pi/2$, so ist

$$\begin{aligned}
 \delta \lambda &= \frac{L \delta t}{M C} \cos(l' C_1) - \frac{L \delta t}{m c} \cos(l' c_1) - \frac{\chi'(r) \delta t \theta \cos \zeta}{C^2} \\
 &= L \delta t \left(\frac{\sin P \cos Q}{M C} - \frac{\sin p \cos q}{m c} \right) - \frac{\chi'(r) a \cos \zeta \delta t}{M r C^2} \\
 &= \frac{L \delta t \sin P \cos Q}{M C} - \frac{L \delta t}{c m} (\cos P \sin \lambda - \sin P \cos \lambda \cos Q) \\
 &\quad - \frac{\chi'(r) a \cos \zeta \delta t}{M C^2 r}.
 \end{aligned}$$

Zur Veränderung von ζ tragen zwei Umstände bei: 1. legt c senkrecht zur Ebene $c O C$ den Weg

$$\frac{L \delta t}{m} \sin P \sin Q$$

zurück, wodurch ζ um $-L \delta t \sin P \sin Q / m c \sin \lambda$ zunimmt. 2. verändert der Punkt C seine Lage. Um den Einfluß dieser

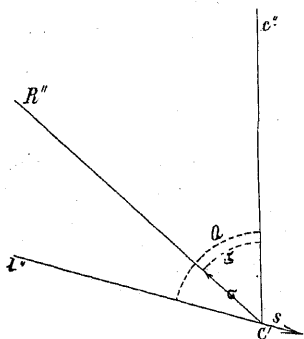


Fig. 11.

Bewegung auf ζ zu finden, legen wir in C' an die Kugel mit dem Radius 1 der Fig. 10 eine Tangentialebene. Ihre Durchschnittspunkte mit den verschiedenen Linien sind in Fig. 11 mit denselben, aber mit zwei Strichen versehenen Buchstaben, wie die entsprechenden Endpunkte dieser Linien in Fig. 10 bezeichnet. C legt infolge der Wechselwirkung beider materieller Punkte das Stück $L \delta t / M$, daher C' das Stück

$L \delta t / M C$ zurück, dessen Projektion auf die Ebene der Fig. 11

$$s = \frac{L \delta t}{M C} \sin P$$

ist und bei positivem L in die Verlängerung von $C'l'$ fällt, infolge der Einwirkung von O beschreibt C' den Weg $\chi'(r) \delta t / M C$, daher dessen Projektion auf die Ebene der Fig. 11 der Weg

$$\sigma = \frac{\chi'(r) \delta t}{M C} \sin \eta = \frac{\chi'(r) \delta t a}{M C^2 r}$$

in der Richtung $C'R''$. Infolgedessen dreht sich die Gerade $C'R''$ um den Winkel

$$\frac{s \sin(Q - \zeta)}{C' R''} = \frac{L \delta t \sin P \sin(Q - \zeta)}{M C \operatorname{tg} \eta} = \frac{L \delta t \sin P \sin(Q - \zeta) r \varrho}{M C a},$$

die Gerade $C' c''$ um

$$\frac{s \sin Q - \sigma \sin \zeta}{C' c''} = \frac{L \delta t \sin P \sin Q - \chi'(r) \delta t \cdot \frac{a}{Cr} \sin \zeta}{M C \operatorname{tg} \lambda}.$$

Die Lagenänderung der Geraden OR' ist ohne Einfluß. Es ist daher der gesamte Zuwachs von ζ , wenn man noch überall den Sinn der Drehung beachtet

$$\delta \zeta = - \frac{L \delta t \sin P \sin Q}{m c \sin \lambda} + \frac{L \delta t r \varrho \sin P \sin(Q - \zeta)}{M C a} - \frac{L \delta t \sin P \sin Q - \chi'(r) \delta t \cdot \frac{a}{Cr} \sin \zeta}{M C \operatorname{tg} \lambda}.$$

P erfährt erstens infolge der Lagenänderung der Geraden Ol den Zuwachs

$$\frac{O \sin P \delta t}{l} - \frac{c \sin p \delta t \cos(C' l' c')}{l} = \frac{O \sin P \delta t}{l} - \frac{c \delta t}{l} (\cos \lambda \sin P - \sin \lambda \cos P \cos Q),$$

zweitens infolge der Lagenänderung der Geraden OC den Zuwachs

$$\frac{L \delta t \sin P}{M C} - \frac{\chi'(r) \delta t \sin \eta \cos(Q - \zeta)}{M C} = \frac{L \delta t \sin P}{M C} - \frac{\chi'(r) \delta t \cdot a \cos(Q - \zeta)}{M C^2 r},$$

es ist also im ganzen

$$\delta P = \frac{O \sin P \delta t}{l} - \frac{c \delta t}{l} (\cos \lambda \sin P - \sin \lambda \cos P \cos Q) + \frac{L \delta t \sin P}{M C} - \frac{\chi'(r) \delta t a \cos(Q - \zeta)}{M C^2 r}.$$

Q endlich wächst: 1. weil c senkrecht gegen die Ebene cOC den Weg

$$\frac{L \delta t}{m} \sin P \sin Q$$

zurücklegt, um

$$- \frac{L \delta t \sin P \sin Q}{m c \sin \lambda}.$$

2. Weil l' , wenn man die neue Verbindungslinie der zwei materiellen Punkte so parallel zu sich selbst verschiebt, daß

ihr einer Endpunkt fix in O bleibt, senkrecht zur Ebene $l'OC'$ den Weg

$$\frac{c \delta t \sin p \sin(c'l' C')}{l} = \frac{c \delta t \sin \lambda \sin Q}{l}$$

zurücklegt, um

$$- \frac{c \delta t \sin \lambda \sin Q}{l \sin P}$$

3. Der Zuwachs von Q infolge der Lagenänderung der Geraden OC' wird wieder gefunden, indem man an C' die in Fig. 11 dargestellte Tangentialebene an die Kugel errichtet. Der Zuwachs des Winkels Q in dieser Figur beträgt

$$\frac{\sigma \sin(Q - \zeta)}{C'l''} + \frac{\sigma \sin \zeta - s \sin Q}{C''c'} = \frac{\chi'(r) \delta t a \sin(Q - \zeta)}{M C^2 r \operatorname{tg} P}$$

$$- \frac{L \delta t \sin P \sin Q + \chi'(r) \delta t \frac{a}{C_r} \sin \zeta}{M C \operatorname{tg} \lambda}$$

Es ist also, wenn man alle diese Glieder zusammenfaßt

$$\delta Q = - \frac{L \delta t \sin P \sin Q}{m c \sin \lambda} - \frac{c \delta t \sin \lambda \sin Q}{l \sin P}$$

$$+ \frac{\chi'(r) \delta t a \sin(Q - \zeta)}{M C^2 r \operatorname{tg} P} + \frac{\chi'(r) \delta t a \sin \zeta}{M C^2 r \operatorname{tg} \lambda} - \frac{L \delta t \sin P \sin Q}{M C \operatorname{tg} \lambda}$$

Bezeichnet man nun mit A', a', \dots die Größen $A + \delta A, a + \delta a, \dots$ so erhält man durch Entwicklung nach Potenzen der mit δ bezeichneten Größen und Weglassung der Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$(10) \left\{ \frac{g'l^2 \sin P \cos \gamma \sin \lambda}{\varrho} \right. \left. \begin{aligned} & \frac{g'l^2 \sin P' \cos \gamma' \sin \lambda'}{\varrho'} = \\ & \left[\frac{\cos P}{C(C \cos P - c \cos p)} - \frac{1}{\varrho^2} \right] M - \frac{\cos p \delta c}{C \cos P - c \cos p} \\ & + \left[\frac{\chi'(r) \cos P}{M C (C \cos P - c \cos p)} - \frac{\chi'(r)}{M \varrho^2} - \frac{a^2}{r^3 \varrho^2} \right] \delta r \\ & + \left[\cot \lambda + \frac{c \cos P \sin \lambda - c \sin P \cos \lambda \cos Q}{C \cos P - c \cos p} \right] \delta \lambda \\ & + \left[\cot P + \frac{c(\sin P \cos \lambda - \cos P \sin \lambda \cos Q) - C \sin P}{C \cos P - c \cos p} \right] \delta P \\ & + \frac{c \sin P \sin \lambda \sin Q \delta Q}{C \cos P - c \cos p} - \frac{2 \delta l}{l} + \frac{a \delta a}{r^2 \varrho^2} \end{aligned} \right.$$

Ferner wird wie in der vorigen Aufgabe

$$(11) \left\{ \begin{aligned} & dA'da'dr'dc'dP'dQ'd\lambda'd\zeta' = dA'da'dr'dc'dP'dQ'd\lambda'd\zeta \\ & \times \left(1 + \frac{d\delta A}{dA} + \frac{d\delta a}{da} + \frac{d\delta r}{dr} + \frac{d\delta c}{dc} + \frac{d\delta P}{dP} + \frac{d\delta Q}{dQ} + \frac{d\delta \lambda}{d\lambda} + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} \right) \end{aligned} \right.$$

Bei Bildung dieser acht partiellen Differentialquotienten sind natürlich alle in den Ausdrücken δA , $\delta a \dots$ vorkommenden Größen durch die acht unabhängigen Variablen auszudrücken und ist δt durch seinen Wert $\delta l / (C \cos P - c \cos p)$ zu ersetzen. Dadurch ergibt sich

$$\frac{d\delta A}{dA} = \frac{L \delta t c \cos P \cos p}{M C (C \cos P - c \cos p)}$$

$$\frac{d\delta a}{da} = -\frac{L \delta t}{M C} \left[\cos P + \frac{a}{r \varrho} \sin P \cos (Q - \zeta) \right]$$

$$\frac{d\delta r}{dr} = \delta t \left[\frac{\chi'(r)}{M \varrho} + \frac{a^2}{r^3 \varrho} - \frac{\varrho \chi'(r) \cos P}{M C (C \cos P - c \cos p)} \right]$$

$$\frac{d\delta c}{dc} = \frac{L \delta t \cos^2 p}{m (C \cos P - c \cos p)}$$

$$\frac{d\delta \zeta}{\delta \zeta} = \frac{\chi'(r) a \cos \zeta \delta t}{M r C^2 \operatorname{tg} \lambda} - \frac{L \delta t \sin P \cos (Q - \zeta) r \varrho}{M C a}$$

$$\frac{d\delta \lambda}{d\lambda} = -\frac{L \delta t \cos p}{m c} - \frac{c (\cos P \sin \lambda - \sin P \cos \lambda \cos Q) \delta t}{C \cos P - c \cos p}$$

$$\times \left[\frac{L \sin P \cos Q}{C M} - \frac{L (\cos P \sin \lambda - \sin P \cos \lambda \cos Q)}{m c} - \frac{\chi'(r) a \cos \zeta}{M C^2 r} \right]$$

$$\frac{d\delta P}{dP} = \frac{C \cos P \delta t}{l} + \frac{L \cos P \delta t}{M C} - \frac{c \delta t \cos p}{l} + \left[\frac{C \sin P}{l} + \frac{L \sin P}{M C} \right. \\ \left. - \frac{\chi'(r) a \cos (Q - \zeta)}{M C^2 r} - \frac{c}{l} (\cos \lambda \sin P - \cos P \sin \lambda \cos Q) \right]$$

$$\times \frac{C \sin P - c (\sin P \cos \lambda - \cos P \sin \lambda \cos Q) \delta t}{C \cos P - c \cos p}$$

$$\frac{d\delta Q}{dQ} = -\frac{L \delta t \sin P \cos Q}{\sin \lambda} \left(\frac{\cos \lambda}{M C} + \frac{1}{m c} \right) - \frac{c \delta t \sin \lambda \cos Q}{l \sin P} \\ + \frac{\chi'(r) \delta t a \cos (Q - \zeta)}{M C^2 r \operatorname{tg} P} + \left[\frac{L \sin P \sin Q}{\sin \lambda} \left(\frac{\cos \lambda}{M C} + \frac{1}{m c} \right) \right. \\ \left. - \frac{\chi'(r) a \sin \zeta}{M C^2 r \operatorname{tg} \lambda} + \frac{c \delta t \sin \lambda \sin Q}{l \sin P} - \frac{\chi'(r) \sin (Q - \zeta) a}{M C^2 r \operatorname{tg} P} \right] \\ \times \frac{c \sin P \sin \lambda \sin Q \delta t}{C \cos P - c \cos p}.$$

Nach Substitution dieser Werte in die Formel (11), sowie der Werte für δA , δa , $\delta r \dots$ in die Formel (10) und Multiplikation beider Ausdrücke ergibt sich, indem sich alle anderen Glieder heben

$$\frac{g' l^2 \sin P \cos \gamma' \sin \lambda'}{g'} dA' da' dr' dc' d\lambda' d\zeta' dP' dQ' \\ = \left(1 - \frac{2 \delta c}{c} - \frac{\delta a}{a} \right) \frac{g l^2 \sin P \cos \gamma \sin \lambda}{\varrho} dA da dr dc d\lambda d\zeta dP dQ,$$

folglich

$$\frac{c'^2 a' g' l'^2}{\varrho'} \sin P' \cos \gamma' \sin \lambda' d A' d a' d r' d c' d \lambda' d \zeta' d P' d Q'$$

$$= \frac{c^2 a g l^2}{\varrho} \sin P \cos \gamma \sin \lambda d A d a d r d c d \lambda d \zeta d P d Q.$$

Ganz in derselben Weise wie in der früheren Aufgabe folgt hieraus, daß dieser Ausdruck auch gleich

$$\frac{(c^{(n)})^2 a^{(n)} g^{(n)} (l^{(n)})^2}{\varrho^{(n)}} \cdot \sin P^{(n)} \sin \gamma^{(n)} \sin \lambda^{(n)} d A^{(n)} d a^{(n)} d r^{(n)} d c^{(n)}$$

$$d \lambda^{(n)} d \zeta^{(n)} d P^{(n)} d Q^{(n)}$$

ist und daß zur Gleichung $J = J^{(n)}$ erforderlich ist, daß

$$\frac{\Phi(A^{(n)}, a^{(n)})}{a^{(n)} t(A^{(n)}, a^{(n)})} \cdot \frac{\varphi(c^{(n)})}{(c^{(n)})^2} = \frac{\Phi(A, a)}{a t(A, a)} \cdot \frac{\varphi(c)}{c^2}$$

sei, daß also Φ und φ dieselben Werte, wie im speziellen Falle der Momentankräfte erhalten. Nicht wesentlich schwieriger ist das Problem zu behandeln, wo die materiellen Punkte zu je zweien von einer beliebigen Kraft zusammengehalten einander umkreisen und im übrigen wieder nach einem anderen willkürlichen Gesetze aufeinander wirken. Da jedoch die entsprechenden Formeln viel komplizierter werden und alle diese Aufgaben ohnedies als spezielle Fälle aus dem später zu entwickelnden allgemeinen Theorem fließen, so will ich mich hierauf nicht weiter einlassen.

II. Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen einer endlichen Zahl materieller Punkte.

6.

In einer sehr großen, allseitig geschlossenen ebenen Fläche befinden sich n materielle Punkte, deren Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ und deren Geschwindigkeiten $c_1, c_2 \dots c_n$ heißen mögen und zwischen denen beliebige Kräfte tätig sind, die aber erst in einer gegen ihre mittlere Entfernung verschwindenden Distanz zu wirken beginnen. Offenbar werden wieder für die Richtungen dieser Geschwindigkeiten alle Richtungen der Ebene gleich wahrscheinlich sein. Allein die Wahrscheinlichkeit, daß die Geschwindigkeit eines Punktes zwischen gegebenen Grenzen liege und zugleich die eines anderen sich zwischen anderen Grenzen

befinde, wird keineswegs das Produkt beider einzelnen Wahrscheinlichkeiten sein; die zweite wird vielmehr abhängig von dem für die Geschwindigkeit des ersten Punktes vorausgesetzten Werte sein. Die Geschwindigkeit des letzten Punktes endlich ist durch die der $n - 1$ andern vollkommen bestimmt, da ja in dem ganzen Systeme immer ein gleiches Quantum lebendiger Kraft enthalten sein muß. Ich will daher die Zeit, während welcher im Verlauf der Zeiteinheit die Geschwindigkeiten so verteilt sind, daß c_2 zwischen c_2 und $c_2 + dc_2$, zugleich c_3 zwischen c_3 und $c_3 + dc_3$ usw. bis c_n liegt, also die Wahrscheinlichkeit dieser Verteilung der Geschwindigkeiten mit $\varphi_1(c_2, c_3 \dots c_n) dc_2 dc_3 \dots dc_n$ bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit, daß c_1 zwischen c_1 und $c_1 + dc_1$ und die übrigen Geschwindigkeiten außer c_2 zwischen analogen Grenzen liegen, sei

$$\varphi_2(c_1, c_3, c_4 \dots c_n) dc_1 dc_3 \dots dc_n$$

usf. Ferner seien die lebendigen Kräfte

$$\frac{m_1 c_1^2}{2} = k_1, \quad \frac{m_2 c_2^2}{2} = k_2 \dots \frac{m_n c_n^2}{2} = k_n$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß k_2 zwischen k_2 und $k_2 + dk_2$, k_3 zwischen k_3 und $k_3 + dk_3 \dots$ bis k_n liegt, sei

$$\psi_1(k_2, k_3 \dots k_n) dk_2 dk_3 \dots dk_n.$$

Analog sei die Bedeutung von $\psi_2(k_1, k_3 \dots k_n)$ usw., so daß man also hat:

$$m_2 c_2 \cdot m_3 c_3 \dots m_n c_n \psi_1 \left(\frac{m_2 c_2^2}{2}, \frac{m_3 c_3^2}{2} \dots \frac{m_n c_n^2}{2} \right) = \varphi_1(c_2 c_3 \dots c_n)$$

oder

$$\varphi_1(c_2 c_3 \dots c_n) = 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{m_2 m_3 \dots m_n} \cdot \sqrt{k_2 k_3 \dots k_n} \psi_1(k_2, k_3 \dots k_n)$$

und ähnlich für die übrigen φ und ψ . Betrachten wir Zusammenstöße von irgend einem Punktepaare, z. B. m_r und m_s , welche so geschehen, daß c_r zwischen c_r und $c_r + dc_r$, c_s zwischen c_s und $c_s + dc_s$ liegt. Die Grenzen derselben Größen nach dem Zusammenstoße seien c_r' und $c_r' + dc_r'$, c_s' und $c_s' + dc_s'$. Es ist nun klar, daß Gleichgewicht der lebendigen Kraft stattfinden wird, wenn stets ebenso viele Punkte zwischen den mit Strichen versehenen als zwischen den ungestrichenen Grenzen zusammentreffen werden, wie immer die übrigen das Zusammentreffen charakterisierenden

Größen und wie immer die Grenzen beschaffen sein mögen, zwischen denen die Werte der Geschwindigkeiten der übrigen Punkte liegen. Die Anzahl der Punkte, welche zwischen gegebenen Grenzen zusammentreffen, und zwar so, daß zugleich die Geschwindigkeiten der übrigen Punkte zwischen c_2 und $c_2 + dc_2 \dots$ liegen, unterscheidet sich aber von der in den früheren Aufgaben bloß dadurch, daß an die Stelle des Produktes $\varphi(c_r) \varphi(c_s) dr ds$ die Funktion $\varphi_1(c_2 c_3 \dots c_n) dc_2 dc_3 \dots dc_n$ tritt. Es tritt daher auch an die Stelle der früher (für einen ähnlichen Fall, der sich leicht zu diesem erweitern läßt) gefundenen Bedingung

$$\frac{\varphi(c_r) \cdot \varphi(c_s)}{c_r \cdot c_s} = \frac{\varphi(c_r') \cdot \varphi(c_s')}{c_r' \cdot c_s'}$$

die Bedingung

$$\frac{\varphi_1(c_2, c_3 \dots c_n)}{c_r c_s} = \frac{\varphi_1(c_2 \dots c_r' \dots c_s' \dots c_n)}{c_r' c_s'}$$

Dasselbe gilt natürlich auch für $\varphi_2, \varphi_3 \dots$. Führt man statt φ die Funktion ψ ein, so ergibt sich

$$\psi_1(k_2, k_3 \dots k_n) = \psi_1(k_2, k_3 \dots k_r' \dots k_s' \dots k_n)$$

jedesmal, wenn

$$k_r + k_s = k_r' + k_s'$$

Subtrahiert man vom Differentiale der ersten Gleichung

$$\frac{d\psi_1}{dk_r} dk_r + \frac{d\psi_1}{dk_s} dk_s = \frac{d\psi_1}{dk_r'} dk_r' + \frac{d\psi_1}{dk_s'} dk_s'$$

das der zweiten mit λ multipliziert und setzt den Koeffizienten jedes Differentials gesondert gleich Null, so ergibt sich

$$\lambda = \frac{d\psi_1}{dk_r} = \frac{d\psi_1}{dk_s} = \frac{d\psi_1'}{dk_r'} = \frac{d\psi_1'}{dk_s'}$$

Es ist daher allgemein

$$\frac{d\psi_1}{dk_2} = \frac{d\psi_1}{dk_3} = \frac{d\psi_1}{dk_4} \dots \frac{d\psi_1}{dk_n},$$

daher ψ_1 eine Funktion von $k_2 + k_3 \dots + k_n$. Wir wollen daher $\psi_1(k_2, k_3 \dots)$ in der Form $\psi_1(k_2 + k_3 + \dots k_n)$ schreiben. Es ist noch die Bedingung des Wärmeleichgewichts zwischen m_1 und den übrigen Punkten zu suchen. Dieselbe würde ψ_1 vollkommen bestimmen. Es geschieht dies jedoch am einfachsten mit Hilfe der übrigen ψ , welche natürlich wie ψ_1 Funktionen einer Summe sein müssen. Dieselben sind aber alle durch

eine bestimmte Relation miteinander verknüpft. Wenn nämlich die gesamte im System enthaltene lebendige Kraft $n\alpha$ ist, so ist

$$k_1 + k_2 + k_3 \dots k_n = n\alpha.$$

Führt man daher in $\psi_1(k_2 + k_3 \dots k_n) dk_2 dk_3 \dots dk_n$ statt der darin erscheinenden Variabeln die neuen Variabeln

$$k_3, k_4 \dots k_n, n\alpha - k_2 - k_3 \dots - k_n = k_1$$

ein, so muß man $\psi_2(k_1 + k_3 + \dots k_n) dk_1 dk_3 \dots dk_n$ erhalten. Dadurch verwandelt sich aber $\psi_1(k_2 + k_3 \dots k_n)$ in $\psi_1(n\alpha - k_1)$ und $dk_2 dk_3 \dots dk_n$ in $dk_1 dk_3 \dots dk_n$. Es ist also

$$\psi_1(n\alpha - k_1) = \psi_2(k_1 + k_3 + \dots k_n) = \psi_2(n\alpha - k_2)$$

für alle k_1 und k_2 , daher sind alle ψ gleich einer und derselben Konstanten h . Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß zu gleicher Zeit k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$, k_2 zwischen k_2 und $k_2 + dk_2$ usw. liegt, wobei nur eines der k auszulassen ist

$$h dk_1 dk_2 dk_3 \dots,$$

wo wieder das entsprechende Differential fehlt. Natürlich wird diese Wahrscheinlichkeit im Momente, wo $k_1 + k_2 + k_3 \dots$ den Wert $n\alpha$ überschreitet, plötzlich gleich Null.

Die Wahrscheinlichkeit, daß c_2 zwischen c_2 und $c_2 + dc_2$, c_3 zwischen c_3 und $c_3 + dc_3 \dots$ liegt, aber ist bestimmt durch $\varphi_1(c_2 c_3 \dots c_n) dc_2 dc_3 \dots dc_n = m_2 m_3 \dots m_n h \cdot c_2 c_3 \dots c_n dc_2 dc_3 \dots dc_n$.

Dabei liegt der Endpunkt von c_2 innerhalb eines Kreisringes vom Flächeninhalt $2\pi c_2 dc_2$, der von c_3 innerhalb eines Kreisringes vom Flächeninhalt $2\pi c_3 dc_3$ usw., der von c_1 in der Peripherie eines Kreises von der Länge $2\pi c_1$ und da innerhalb dieser Kreisringe alle Punkte gleich wahrscheinlich sind, so kann man sagen: Die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt von c_2 innerhalb des Flächenelementes $d\sigma_2$, der von c_3 innerhalb des Flächenelementes $d\sigma_3$ usw., der von c_1 aber auf der unendlich kleinen Linie $d\omega_1$ liege, ist proportional dem Produkte

$$\frac{1}{c_1} d\omega_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \dots d\sigma_n,$$

wenn die geforderten Lagen und Geschwindigkeiten nicht, weil sie dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft widerstreiten, unmöglich sind.

Es erübrigt noch, die Zeit zu finden, durch welche hindurch im Verlauf der Zeiteinheit die lebendige Kraft irgend eines Punktes, z. B. des ersten zwischen gewissen Grenzen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegt, ohne Rücksicht auf die lebendige Kraft der übrigen Punkte. Teilen wir zu diesem Zwecke die gesamte im System enthaltene lebendige Kraft $n\pi$ in unendlich viele (p) gleiche Teile, so ist, wenn nur zwei materielle Punkte vorhanden sind, also für $n = 2$ die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 innerhalb irgend eines der p Intervalle 0 bis $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{2\pi}{p}$ bis $\frac{4\pi}{p}$, $\frac{4\pi}{p}$ bis $\frac{6\pi}{p}$ usw. falle, gleich, das Problem also gelöst. Für $n = 3$ muß, wenn k_1 zwischen $(p-1)\frac{3\pi}{p}$ und $p \cdot \frac{3\pi}{p}$ liegt, sowohl k_2 als auch k_3 innerhalb des ersten der p Intervalle liegen. Wenn k_1 innerhalb des vorletzten Intervalles liegt, also für

$$(p-2)\frac{3\pi}{p} \cong k_1 \cong (p-1)\frac{3\pi}{p}$$

sind zwei Fälle möglich; es kann k_2 in das erste oder zweite der p Intervalle fallen, k_3 ist immer bestimmt. Für

$$(p-3)\frac{3\pi}{p} \cong k_1 \cong (p-2)\frac{3\pi}{p}$$

sind für k_2 drei Intervalle möglich usw. Da nun alle diese Fälle gleich wahrscheinlich sind und ihre Zahl im ganzen

$$1 + 2 + 3 \dots p = \frac{p(p+1)}{2}$$

ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen $(p-q)\frac{3\pi}{p}$ und $(p-q)\frac{3\pi}{p} + \frac{3\pi}{p}$ liegt $\frac{2q}{p(p+1)}$, wofür man, weil p unendlich ist, $\frac{2q}{p^2}$ setzen kann. Setzen wir $(p-q)\frac{3\pi}{p} = k_1$ und $\frac{3\pi}{p} = dk_1$, so ist also die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegt $\frac{2(3\pi - k_1)dk_1}{(3\pi)^2}$. Sei $n = 4$, so ist, wenn k_1 im letzten Intervall liegt, also $(p-1)\frac{4\pi}{p} \cong k_1$ ist, wieder nur ein Fall möglich, nämlich daß k_2 und k_3 im ersten Intervall liegen. Ist

$$(p-2)\frac{4\pi}{p} \cong k_1 \cong (p-1)\frac{4\pi}{p},$$

so sind drei Fälle möglich, nämlich für k_2 und k_3 die Intervalle 11, 12 und 21; für

$$(p - 3) \frac{4x}{p} \cong k_1 \cong (p - 2) \frac{4x}{p}$$

gibt es schon sechs Fälle, nämlich für k_2 und k_3 die Intervalle 11, 12, 13, 21, 22 und 31; k_4 ist immer bestimmt. Im allgemeinen sind für

$$(p - q) \frac{4x}{p} \cong k_1 \cong (p - q + 1) \frac{4x}{p}$$

$\frac{q(q+1)}{2}$ Fälle möglich. Man überzeugt sich davon leicht, indem man statt der Intervalle für k_2 und k_3 die für k_2 und $k_2 + k_3$ ins Auge faßt; dieselben sind im ersten Falle 11, im zweiten Falle 11, 12, 22, im dritten aber 11, 12, 13, 22, 23, 33, also nichts anderes, als die Amben mit Wiederholung aus 1, 2, 3... Elementen. Für alle Werte von k_1 entstehen im ganzen

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} \dots \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2)}{2 \cdot 3}$$

Fälle. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen $(p - q) \frac{4x}{p}$ und $(p - q) \frac{4x}{p} + \frac{4x}{p}$ liegt, $\frac{3q(q+1)}{p(p+1)(p+2)}$ und mit

Vernachlässigung des unendlich kleinen $\frac{3q^2}{p^3}$. Wird wieder $(p - q) \frac{4x}{p} = k_1$ und $\frac{4x}{p} = dk_1$ gesetzt, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegt, $\frac{3(4x - k_1)^2 dk_1}{(4x)^3}$. Ganz in derselben Weise ergibt sich allgemein

für die Zeit, während welcher im Verlauf der Zeiteinheit bei n Punkten die lebendige Kraft irgend eines derselben zwischen den Grenzen k und $k + dk$ liegt, der Ausdruck

$$\frac{(n - 1)(nx - k)^{n-2} dk}{(nx)^{n-1}},$$

daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieselbe zwischen ihrem Maximum nx und k liegt, $(1 - k/nx)^{n-1}$. Die mittlere lebendige Kraft jedes Punktes ist x . Für $n = \infty$ verwandelt sich die letztere Wahrscheinlichkeit in $e^{-k/x}$, die erste mit Vernachlässigung des unendlich kleinen in

$$\frac{1}{x} \left(1 - \frac{k}{nx}\right)^n dk = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{k}{x}} dk.$$

Führt man noch $mc^2/2$ statt k ein, so erhält man genau die in der ersten Aufgabe gefundene Formel. Ich bemerke noch,

daß, wenn man die eben geführte Deduktion durch die Symbolik der Integralrechnung ausdrückt, die Wahrscheinlichkeit, daß h_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegt, durch

$$\frac{\int_0^{n\kappa - k_1} dk_1 \int_0^{n\kappa - k_1 - k_2} dk_2 \int_0^{n\kappa - k_1 - k_2 \dots - k_{n-2}} dk_{n-1}}{\int_0^{n\kappa} dk_1 \int_0^{nk_1} dk_2 \int_0^{n\kappa - k_1 - k_2} dk_3 \dots \int_0^{n\kappa - k_1 - k_2 \dots - k_{n-1}} dk_{n-1}}$$

dargestellt wird, was nach Ausführung der Integrationen wieder zu demselben Ausdrucke führt.

7.

Die n materiellen Punkte sollen sich in einem allseitig mit elastischen Wänden geschlossenen sehr großen Raume bewegen; im übrigen bleibt das Problem so wie die Bezeichnungen unverändert. In diesem Falle liefert die Bedingung, daß innerhalb jenes Bruchteiles der Zeiteinheit, während dessen die Geschwindigkeiten aller Punkte bis auf die der zwei Punkte m_r und m_s zwischen den Grenzen c_1 und $c_1 + dc_1$, c_2 und $c_2 + dc_2 \dots$ liegen, diese zwei Punkte ebensooft so zusammenstoßen, daß c_r , c_s , g , ζ und welche Veränderliche noch das Zusammentreffen bestimmen mögen, zwischen den Grenzen c_r und $c_r + dc_r$, c_s und $c_s + dc_s$, g und $g + dg \dots$ liegen, also so, daß diese Größen zwischen c'_r und $c'_r + dc'_r$, c'_s und $c'_s + dc'_s \dots$ liegen

$$\frac{\varphi_1(c_2, c_3 \dots c_r \dots c_s \dots c_n)}{c_r^2 c_s^2} = \frac{\varphi_1(c_2, c_3 \dots c'_r \dots c'_s \dots c_n)}{c_r'^2 c_s'^2}$$

Dabei sollen wieder die Werte der Variabeln, wenn sie vor dem Zusammentreffen zwischen den Grenzen c_r und $c_r + dc_r$, c_s und $c_s + dc_s$, g und $g + dg \dots$ lagen, nach demselben zwischen c'_r und $c'_r + dc'_r$, c'_s und $c'_s + dc'_s \dots$ liegen und umgekehrt. Es soll daher zwischen c_r , c_s , c'_r und c'_s die einzige Relation

$$\frac{m_r c_r^2}{2} + \frac{m_s c_s^2}{2} = \frac{m_r' c_r'^2}{2} + \frac{m_s' c_s'^2}{2}$$

bestehen. Führt man wieder die lebendigen Kräfte ein, so ergibt sich

$$\frac{\psi_1(k_2, k_3 \dots k_r \dots k_s \dots k_n)}{\sqrt{k_r k_s}} = \frac{\psi_1(k_2, k_3 \dots k_r' \dots k_s' \dots k_n)}{\sqrt{k_r' k_s'}}$$

Um symmetrische Ausdrücke zu erhalten, dividieren wir links und rechts durch $\sqrt{k_2 k_3 \dots}$, worin nur k_1 , k_r und k_s ausgelassen sind, so erhalten wir ganz analoge Gleichungen, wie in der früheren Aufgabe, nur daß jetzt an der Stelle von $\psi_1(k_2, k_3 \dots k_n)$ der Ausdruck

$$\frac{\psi_1(k_2, k_3 \dots k_n)}{\sqrt{k_2 k_3 \dots k_n}}$$

steht. Aus denselben folgt daher, daß dieser Ausdruck eine Funktion von $k_2 + k_3 + \dots k_n$ sein muß. Wir erhalten also

$$\psi_1(k_2, k_3 \dots k_n) = \sqrt{k_2 k_3 \dots k_n} \cdot \chi_1(k_2 + k_3 + \dots k_n)$$

$$\psi_2(k_1, k_3 \dots k_n) = \sqrt{k_1 k_3 \dots k_n} \cdot \chi_2(k_1 + k_3 + \dots k_n)$$

usw. Aus demselben Grunde, wie in der vorigen Aufgabe, ist aber $k_1 + k_2 + \dots k_n = n\alpha$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 \dots$; daher

$$\begin{aligned} \sqrt{k_2 k_3 \dots k_n} \chi_1(n\alpha - k_1) &= \sqrt{k_1 k_3 \dots k_n} \chi_2(n\alpha - k_2) \\ &= \sqrt{k_1 k_2 k_4 \dots k_n} \chi_3(n\alpha - k_3) \dots \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\chi_1(n\alpha - k_1) = h\sqrt{k_1}, \quad \chi_2(n\alpha - k_2) = h\sqrt{k_2}, \quad \chi_3(n\alpha - k_3) = h\sqrt{k_3} \dots$$

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig k_2 zwischen k_2 und $k_2 + dk_2$, k_3 zwischen k_3 und $k_3 + dk_3$ usw. liegt

$$\psi_1(k_2, k_3 \dots) dk_2 dk_3 \dots dk_n = h\sqrt{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} dk_2 dk_3 \dots dk_n,$$

die Wahrscheinlichkeit, daß c_2 zwischen c_2 und dc_2 , c_3 zwischen c_3 und $c_3 + dc_3 \dots$ liegt, aber ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(c_2, c_3 \dots) dc_2 dc_3 \dots dc_n \\ = \frac{h}{2^{n/2}} m_1^{1/2} m_2^{3/2} m_3^{5/2} \dots m_n^{(n-1)/2} c_1 c_2^2 c_3^2 \dots c_n^2 dc_2 dc_3 \dots dc_n. \end{aligned}$$

Dabei liegt der Endpunkt von c_2 innerhalb der Kugelschale $4\pi c_2^2 dc_2$, der von c_3 innerhalb der Kugelschale $4\pi c_3^2 dc_3$ usw., der von c_1 aber auf der Oberfläche $4\pi c_1^2$, und da innerhalb dieser Räume jeder Punkt gleich wahrscheinlich ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt von c_2 im Volumenelemente ds_2 , der von c_3 im Volumenelemente ds_3 usw., der von c_1 aber auf dem Flächenelemente $d\sigma_1$ sich befindet, proportional

$$\frac{1}{c_1} d\sigma_1 ds_2 ds_3 ds_4 \dots ds_n.$$

Es ist noch die Wahrscheinlichkeit, zu finden, daß k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegt, ohne Rücksicht auf die Werte der übrigen lebendigen Kräfte. Man überzeugt sich in derselben Weise, wie dies in der vorigen Aufgabe geschah, daß, wenn k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegen soll, k_2 innerhalb aller Intervalle von Null bis $n\alpha - k_1$, dabei noch k_2 innerhalb aller Intervalle von Null bis $n\alpha - k_1 - k_2$ usw. liegen kann; nur k_n ist vollkommen bestimmt. Addiert man alle diese Fälle, jeden mit seiner Wahrscheinlichkeit

$$h\sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \dots k_{n-1} \cdot (n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-1})} dk_1 \cdot dk_2 \cdot dk_3 \dots dk_{n-1}$$

multipliziert, so ergibt sich

$$h\sqrt{k_1} dk_1 \int_0^{n\alpha - k_1} \sqrt{k_2} dk_2 \int_0^{n\alpha - k_1 - k_2} \sqrt{k_3} dk_3 \dots \int_0^{n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-3}} \sqrt{k_{n-2}} dk_{n-2}$$

$$\int_0^{n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-3} - k_{n-2}} \sqrt{k_{n-1}} \cdot \sqrt{n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-2} - k_{n-1}} dk_{n-1}.$$

Dieses Integral, dividiert durch die Summe aller überhaupt möglichen Fälle, jeder wieder mit seiner Wahrscheinlichkeit multipliziert, also durch dasselbe Integral noch bezüglich k_1 von Null bis $n\alpha$ integriert, liefert die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1$ liegt. Durch Ausführung der ersten Integration findet man

$$\begin{aligned} & \int_0^{n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-2} - k_{n-1}} \sqrt{k_{n-1}} \cdot \sqrt{n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-2} - k_{n-1}} dk_{n-1} \\ &= \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{6}{2}\right)} (n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-2})^{\frac{4}{2}}. \end{aligned}$$

Führt man dazu noch die zweite Integration aus, so ergibt sich

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^3 \Gamma\left(\frac{6}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{2}\right) \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} (n\alpha - k_1 - k_2 \dots - k_{n-3})^{\frac{7}{2}}.$$

Fährt man so fort, so gelangt man endlich für den Zähler zu folgendem Ausdrucke

$$h \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{3n-3}{2}\right)} (n\kappa - k_1)^{\frac{3n-5}{2}} \sqrt{k_1} dk_1.$$

Dieser Ausdruck, bezüglich k_1 von Null bis $n\kappa$ integriert, liefert als Nenner

$$h \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right]^n}{\left(\Gamma\frac{3n}{2} \right)} (n\kappa)^{\frac{3n-2}{2}}$$

und es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen k und $k + dk$ liegt

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n-3}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{k(n\kappa - k)^{3n-5}}{(n\kappa)^{3n-2}}} dk.$$

Die mittlere lebendige Kraft jedes Punktes ist κ . Für $n = \infty$ wird dieser Ausdruck wegen

$$\lim \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{\left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)} = 1$$

zu

$$3 \sqrt{\frac{3k}{2\pi\kappa^3}} e^{-\frac{3k}{2\kappa}} dk,$$

also mit dem früher Gefundenen identisch.

8.

Es soll noch das Problem behandelt werden, daß sich in einem allseitig von elastischen Wänden umschlossenen Raume n freie materielle Punkte befinden, welche in beliebiger Weise, aber erst in einer gegen ihre durchschnittliche Distanz verschwindenden Entfernung aufeinander wirken. Außerdem sollen daselbst noch N Punkte sein, welche durch beliebige Kräfte gegen ebenso viele feste Centra gezogen werden und auf die n Punkte wieder mit beliebigen Kräften, jedoch in sehr kleiner Entfernung wirken. Endlich sollen noch die N Punkte nicht auf-

einander einwirken. Wir wollen die Beschaffenheit der Bahn der N Punkte wieder durch die Größen $A_1, a_1, A_2, a_2 \dots A_N, a_N$ charakterisieren, welche dieselbe Bedeutung wie die Größen A, a in Aufgabe 5 haben. Die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig die lebendigen Kräfte der n Punkte zwischen den Grenzen k_1 und $k_1 + dk_1, k_2$ und $k_2 + dk_2 \dots k_n$ und $k_n + dk_n$ sowie die Größen $A_1, a_1, A_2 \dots$ zwischen den Grenzen A_1 und $A_1 + dA_1 \dots$ liegen, sei

$$\psi(k_1, k_2 \dots A_1, a_1, A_2, a_2 \dots) dk_1 dk_2 \dots dA_1 da_1 dA_2 da_2 \dots,$$

wobei jedoch eine der Größen $k_1, k_2 \dots k_n, A_1, A_2 \dots A_N$ samt ihrem Differentiale, weil durch die übrigen bestimmt, fehlen muß. Das Fehlen der Größe k_i soll durch einen dem ψ angehängten Index l , das der Größe A_i durch den Index L bezeichnet werden. Die Bedingung des Gleichgewichtes der lebendigen Kraft zwischen irgend zwei Punkten wird sich wieder nur dadurch von der für unendlich viele Punkte gefundenen unterscheiden, daß an die Stelle des Produktes der beiden Wahrscheinlichkeiten eine der Funktionen ψ tritt. Sie ist daher zwischen zwei freien Punkten.

$$\frac{\psi(k_1 \dots k_r \dots k_s \dots A_1, a_1, A_2, a_2, \dots)}{\sqrt{k_r k_s}} = \frac{\psi(k_1 \dots k_{r-1}, k_r', k_{r+1} \dots k_{s-1}, k_s', k_{s+1} \dots A_1, a_1 \dots)}{\sqrt{k_r' k_s'}}$$

für $k_r + k_s = k_r' + k_s'$ und zwischen einem freien und einem gegen ein festes Zentrum gezogenen Punkte

$$\frac{\psi(k_1, k_2 \dots k_r \dots A_1, a_1 \dots A_s, a_s \dots)}{\sqrt{k_r a_s t_s (A_s a_s)}} = \frac{\psi(k_1, k_2 \dots k_{r-1}, k_r', k_{r+1} \dots A_1, a_1 \dots a_{s-1}, A_s', a_s', A_{s+1} \dots)}{\sqrt{k_s' a_s' t_s (A_s' a_s')}}}$$

für $k_r + A_s = k_r' + A_s'$. Aus allen Bedingungen, welche hierdurch repräsentiert sind, folgt

$$\frac{\psi_l(k_1, k_2 \dots k_{l-1}, k_{l+1} \dots A_1, a_1, A_2, a_2 \dots)}{\sqrt{k_1 k_2 \dots k_{l-1}, k_{l+1} \dots a_1 \cdot t_1 (A_1, a_1) \cdot a_2 \cdot t_2 (A_2, a_2) \dots}} = \chi_l (k_1 + k_2 \dots + k_{l-1} + k_{l+1} \dots + A_1 + A_2 \dots)$$

$$\frac{\psi_L(k_1, k_2 \dots A_1, a_1 \dots A_{l-1}, a_{l-1}, A_{l+1}, a_{l+1} \dots)}{\sqrt{k_1 k_2 \dots a_1 t_1 (A_1, a_1) \dots a_{l-1} \cdot t_{l-1} (A_{l-1}, a_{l-1}) \cdot a_{l+1} t_{l+1} (A_{l+1}, a_{l+1}) \dots}} = \chi_L [a_l (k_1 + k_2 \dots + A_1 \dots + A_{l-1} + A_{l+1} \dots)]$$

Außerdem ist aber $k_1 + k_2 + \dots + k_n + A_1 + A_2 \dots A_N$ gleich einer Konstanten $(n + N)\varkappa$ und müssen mit Rücksicht hierauf alle ψ als Ausdrücke einer und derselben Wahrscheinlichkeit einander gleich sein. Hieraus lassen sich die Funktionen χ bestimmen und man erhält

$$\chi_i (k_1 + k_2 \dots + A_1 + A_2 \dots) = h \sqrt{k_i}$$

$$\chi_L [a_i, (k_1 + k_2 \dots + A_1 + A_2 \dots)] = h a_i t_i (A_i, a_i).$$

Man erhält also für die Wahrscheinlichkeit, daß k_1 zwischen k_1 und $k_1 + dk_1 \dots A_1$ zwischen A_1 und $A_1 + dA_1$, a_1 zwischen a_1 und $a_1 + da_1 \dots$ liegt, den Ausdruck

$$h \sqrt{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot a_1 \cdot t_1 (A_1, a_1) \cdot a_2 \cdot t_2 (A_2, a_2) \dots A_N t_N (A_N, a_N) dk_1 dk_2 \dots$$

$$dA_1 da_1 dA_2 da_2 \dots,$$

wobei nur das Differential derjenigen Größe fehlt, welche man als durch die übrigen bestimmt annimmt. Dabei muß natürlich immer $k_1 + k_2 \dots + A_1 + A_2 \dots \cong (n + N)\varkappa$ sein und auch a_i kann bei gegebenem A_i ein bestimmtes Maximum, welches der Bewegung im Kreise entspricht, nicht überschreiten. Führt man statt der lebendigen Kräfte die Geschwindigkeiten der n Punkte ein, so findet man für die Wahrscheinlichkeit, daß dieselben zwischen c_1 und $c_1 + dc_1 \dots$ liegen und die Größen $A_1, a_1 \dots$ dieselben Werte, wie früher haben, den Ausdruck

$$h' c_1^2 c_2^2 \dots c_n^2 \cdot a_1 t_1 (A_1, a_1) a_2 t_2 (A_2, a_2) \dots t_N (A_N, a_N) dc_1 dc_2 \dots$$

$$dc_n dA_1 da_1 \dots dA_N,$$

welcher noch, wenn c_i als durch die übrigen bestimmt angenommen wurde, durch c_i zu dividieren ist. Führt man in derselben Weise, wie dies früher geschah, statt der A und a die Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsrichtung und Entfernung der N Punkte von ihren fixen Zentren ein, so ergibt sich, daß wieder die Wahrscheinlichkeit, daß zugleich m_1 im beliebig gelegenen Raumelemente ds_1 , m_2 in $ds_2 \dots$, M_1 in dS_1 , M_2 in $dS_2 \dots$; ferner die Endpunkte der Geschwindigkeiten $c_1, c_2 \dots C_1, C_2 \dots$ in den Raumelementen $d\sigma_1, d\sigma_2 \dots d\Sigma_1, d\Sigma_2 \dots$ und endlich der Endpunkt der letzten Geschwindigkeit c_i oder C_i auf dem Flächenelemente $d\omega_i$ liege, falls dies überhaupt möglich ist, proportional $ds_1 ds_2 \dots dS_1 dS_2 \dots d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\Sigma_1 d\Sigma_2 \dots d\omega$ dividiert durch die letzte Geschwindigkeit c_i oder C_i ist.

Daraus folgt, daß für jede beliebige Lage der Punkte und Größe ihrer Geschwindigkeiten für letztere jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist; ferner, daß für jede beliebige Lage der materiellen Punkte gegen ihre fixen Centra die Verteilung der verschiedenen Geschwindigkeiten dieselbe ist, wie sie in Aufgabe 8 gefunden wurde. Sie hängt bloß von der noch für die Geschwindigkeiten übrigen lebendigen Kraft, also von der Summe der Potentiale aller N Punkte bezüglich ihrer fixen Centra ab. Es ist daher für alle Lagen der materiellen Punkte und folglich auch allgemein die mittlere lebendige Kraft aller Punkt untereinander gleich.

III. Allgemeine Lösung des Problems des Gleichgewichtes der lebendigen Kraft.

Es seien n materielle Punkte im Raume mit den Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ gegeben. Die Wirkung je zweier aufeinander sei eine willkürliche Funktion ihrer Entfernung. Außerdem können beliebig viele derselben jeder von beliebigen Kräften gegen beliebig viele und beliebig gelegene feste Centra (Punkte von unendlicher Masse) gezogen werden. Die Kräfte, durch welche die Punkte affiziert werden, sind daher bloß der Bedingung unterworfen, daß sie Funktionen der Lage sämtlicher Punkte sind und eine Potentialfunktion haben. Im ganzen Systeme sei ein bestimmtes Quantum lebendiger Kraft enthalten; es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß jeder der materiellen Punkte sich an einem gegebenen Orte befinde und dabei die Geschwindigkeit eines jeden eine bestimmte Größe habe. Charakterisieren wir den Ort des Punktes m_1 durch die drei rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1, z_1 , den des Punktes m_2 durch x_2, y_2, z_2 usw., nennen die drei Komponenten der Geschwindigkeit c_1 des Punktes m_1 parallel zu den drei Koordinatenachsen u_1, v_1, w_1 , die entsprechenden Komponenten für den zweiten Punkt u_2, v_2, w_2 usw. und bezeichnen die Zeit, innerhalb welcher während des Verlaufes einer sehr langen Zeit gleichzeitig x_1 innerhalb der Grenzen x_1 und $x_1 + dx_1$, y_1 innerhalb y_1 und $y_1 + dy_1$, z_1 innerhalb z_1 und $z_1 + dz_1$, also m_1 innerhalb des Raumelementes $ds_1 = dx_1 dy_1 dz_1$, ferner m_2 in gleicher Weise innerhalb des Raumelementes

$ds_2 = dx_2 dy_2 dz_2 \dots m_n$ innerhalb $ds_n = dx_n dy_n dz_n$, dann noch u_1 innerhalb der Grenzen u_1 und $u_1 + du_1$, v_1 innerhalb v_1 und $v_1 + dv_1$, w_1 innerhalb w_1 und $w_1 + dw_1$; daher der Endpunkt von c_1 (wenn man sich dasselbe vom Anfangspunkte der Koordinaten aus in Größe und Richtung aufgetragen denkt) innerhalb des Raumelementes $d\sigma_1 = du_1 dv_1 dw_1$, ferner in in gleicher Weise der Endpunkt von c_2 innerhalb des Raumelementes $d\sigma_2 = du_2 dv_2 dw_2 \dots$, der von c_{n-1} innerhalb $d\sigma_{n-1} = du_{n-1} dv_{n-1} dw_{n-1}$, endlich der Endpunkt von c_n , welches seiner Größe nach bestimmt ist, auf dem Flächenelemente $d\omega_n$ liegt, dividirt durch diese sehr große Zeit mit $f(x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n, u_1, v_1, w_1 \dots u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1}, u_n, v_n) dx_1 dy_1 dz_1 \dots dz_n du_1 \dots du_{n-1} dv_{n-1} dw_{n-1} d\omega_n$.

Um alles durch die unter dem Funktionszeichen befindlichen Variabeln auszudrücken, also w_n als durch die übrigen bestimmt zu betrachten, wollen wir noch $d\omega_n$ durch du_n und dv_n ausdrücken. Es ist dann $du_n dv_n$ die Projektion von $d\omega_n$ auf die xy -Ebene, daher

$$d\omega_n = \frac{e_n}{w_n} du_n dv_n.$$

Nach Verlauf einer sehr kurzen Zeit δt sollen die Werte der Variabeln $x' = x_1 + \delta x_1, y_1' = y_1 + \delta y_1 \dots u_1' = u_1 + \delta u_1 \dots$ sein. Die neuen Grenzen derselben seien $dx_1' dy_1' \dots du_1'$; so hat man

$$\delta x_1 = u_1 \delta t, \delta y_1 = v_1 \delta t, \delta z_1 = w_1 \delta t, \delta x_2 = u_2 \delta t \dots;$$

ferner, wenn $\chi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n)$ das Potential des gesamten Systems sowohl auf sich selbst als auch bezüglich der festen Anziehungscentra ist

$$m_1 \delta u_1 = \frac{d\chi}{dx_1} \delta t, m_1 \delta v_1 = \frac{d\chi}{dy_1} \delta t, m_1 \delta w_1 = \frac{d\chi}{dz_1} \delta t, m_2 \delta u_2 = \frac{d\chi}{dx_2} \delta t \dots$$

Es ist daher

$$\frac{d\delta x_1}{dx_1} = \frac{d\delta y_1}{dy_1} = \frac{d\delta x_1}{dx_1} = \frac{d\delta x_2}{dx_2} \dots = \frac{d\delta x_n}{dx_n} = \frac{d\delta y_n}{dy_n} = 0.$$

Ebenso

$$\frac{d\delta u_1}{du_1} = \frac{d\delta v_1}{dv_1} = \frac{d\delta w_1}{dw_1} = \frac{d\delta u_2}{du_2} \dots = \frac{d\delta u_n}{du_n} = \frac{d\delta v_n}{dv_n} = 0.$$

Nur $d\delta z_n/dz_n$ verschwindet nicht, weil w_n Funktion der übrigen Variablen ist, nämlich

$$\frac{m_n u_n^2}{2} = \chi - \frac{m_1 u_1^2}{2} - \frac{m_1 a_1^2}{2} - \frac{m_1 w_1^2}{2} - \frac{m_2 u_2^2}{2} \dots - \frac{m_n u_n^2}{2} - \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

Es ist also

$$\frac{d\delta x_n}{dx_n} = \frac{dw_n}{dx_n} \delta t = \frac{1}{m_n w_n} \frac{d\chi}{dx_n} \delta t = \frac{\delta w_n}{w_n}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} dx_1' dy_1' dz_1' dx_2' \dots dx_n' dy_n' dz_n' du_1' dv_1' dw_1' \dots du_n' dv_n' \\ = \left(1 + \frac{d\delta x_1}{dx_1} + \frac{d\delta y_1}{dy_1} \dots \frac{d\delta v_n}{dv_n}\right) dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 \dots du_n dv_n \\ = \left(1 + \frac{\delta w_n}{w_n}\right) dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 \dots du_n dv_n. \end{aligned}$$

Die Zeit, während welcher x_1 zwischen x_1' und $x_1' + dx_1'$, y zwischen y_1' und $y_1' + dy_1'$... bis v_n zwischen v_n' und $v_n' + dv_n'$ liegt, ist unserer Annahme gemäß, indem wir $d\omega_n$ durch du_n, dv_n ausdrücken

$$\frac{c_n'}{w_n'} f(x_1', y_1' \dots v_n') dx_1' dy_1' \dots du_n' dv_n'.$$

Damit die Werte der Variablen in diese mit Strichen versehenen Grenzen eintreten, müssen dieselben notwendig vor der Zeit δt zwischen den Grenzen x_1 und $x_1 + dx_1$, y_1 und $y_1 + dy_1$... v_n und $v_n + dv_n$ gelegen sein, sowie umgekehrt jedesmal, wenn der letztere Fall eintritt, dieselben nach der Zeit δt zwischen x_1' und $x_1' + dx_1'$, y_1' und $y_1' + dy_1'$... v_n' und $v_n' + dv_n'$ liegen werden. Da wir aber δt als konstant angesehen haben, so muß der Zeitmoment, währenddessen die Werte der Variablen in die Grenzen x_1 und $x_1 + dx_1$, y_1 und $y_1 + dy_1$... v_n und $v_n + dv_n$ eintreten von demjenigen, währenddessen sie in die Grenzen x_1' und $x_1' + dx_1'$, y_1' und $y_1' + dy_1'$... v_n' und $v_n' + dv_n'$ eintreten, genau ebenso weit abstehen, wie der Moment, währenddessen sie aufhören, alle innerhalb der ersteren Grenzen zu liegen, von demjenigen, währenddessen sie aufhören, alle innerhalb der letzteren Grenzen zu liegen. Es muß daher die Zeit, während welcher sie im ganzen innerhalb der ersteren Grenzen liegen, gleich sein der Zeit, innerhalb welcher sie zwischen den letzteren Grenzen liegen; daher

$$\frac{c_n}{w_n} f(x_1, y_1 \dots v_n) dx_1 dy_1 \dots dv_n = \frac{c_n'}{w_n'} f(x_1', y_1' \dots v_n') dx_1' dy_1' \dots dv_n'.$$

Drückt man hier das Produkt der Differentiale $dx_1', dy_1' \dots dv_n'$ sowie w_n' durch $dx_1, dy_1 \dots dv_n$ und w_n aus, so ergibt sich

$$c_n f(x_1, y_1 \dots v_n) = c_n' f(x_1', y_1' \dots v_n').$$

Von den Werten der Variablen $x_1', y_1' \dots v_1'$ kann man zu den nach der Zeit $t + 2 \delta t$ stattfindenden $x_1'', y_1'' \dots v_n''$ übergehen usf., und man erhält daher allgemein

$$c_n^{(k)} f(x_1^{(k)}, y_1^{(k)} \dots v_n^{(k)}) = c_n f(x_1, y_1, \dots v_n).$$

Daraus folgt, da die unter dem Funktionszeichen stehenden Variablen im allgemeinen voneinander unabhängig sind, daß $c_n f(x_1, y_1, \dots v_n)$ eine Konstante ist. Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt m_1 innerhalb des Raumelementes ds_1 , der Punkt m_2 innerhalb $ds_2 \dots$, ferner der Endpunkt der Geschwindigkeit c_1 des ersten Punktes innerhalb $d\sigma_1$, der der Geschwindigkeit c_2 des zweiten innerhalb $d\sigma_2 \dots$, endlich der Endpunkt der Geschwindigkeit c_n des letzten Punktes auf dem Flächenelemente $d\omega_n$ liege, proportional dem Produkte

$$\frac{1}{c_n} ds_1 ds_2 \dots ds_n d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_{n-1} d\omega_n$$

ist, solange die geforderte Lage überhaupt möglich ist. Für alle ändern Lagen wird diese Wahrscheinlichkeit plötzlich Null. Hieraus folgt erstens, daß bei gegebener Lage der Punkte und Größe ihrer Geschwindigkeiten für letztere jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist; zweitens, daß bei gegebener Lage der Punkte die Verteilung der Geschwindigkeiten unter ihnen genau die in Aufgabe 7 gefundene ist, wenn man daselbst $n\chi - \chi$ statt $n\chi$ setzt und nur abhängt von dem Potentiale des Systems in der gegebenen Lage, daß also die mittlere lebendige Kraft aller Punkte für alle Lagen, daher überhaupt, gleich sein muß; drittens, daß die Wahrscheinlichkeit, daß m_1 innerhalb ds_1 , m_2 innerhalb $ds_2 \dots$, m_n innerhalb ds_n liegt, proportional

$$(n\chi - \chi)^{3n-2} ds_1 ds_2 \dots ds_n,$$

daher die Wahrscheinlichkeit, daß außerdem k_i zwischen k_i und $k_i + dk_i$ liegt, proportional

$$\sqrt{k_i (n\chi - \chi - k_i)^{3n-5}} dk_i ds_1 ds_2 \dots ds_n$$

ist. $n\chi$ ist die ganze im System enthaltene Arbeit. Dabei ist noch zu bemerken, daß Lagen unmöglich sein können, für

welche $\chi < n\pi$ ist, wenn sie durch lauter unmögliche Lagen von den wirklichen Lagen der Punkte des Systems getrennt sind.

Als spezieller Fall folgt aus dem ersten Satze, wie ich schon in meiner Abhandlung über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes gezeigt habe, daß die mittlere lebendige Kraft eines Gasatoms gleich der der progressiven Bewegung eines Moleküls ist. Dieser Beweis füllt aber auch eine in der Lösung aller übrigen Aufgaben gelassene Lücke aus; er zeigt nämlich nicht nur, daß für diese Verteilung der Geschwindigkeiten Gleichgewicht der lebendigen Kraft stattfindet, sondern auch, daß dasselbe in keiner anderen Weise möglich ist. Eine Ausnahme hiervon tritt nur ein, wenn die Variablen $x_1, y_1, z_1, x_2 \dots v_n$ nicht voneinander unabhängig sind. Es kann dieser Fall für alle Systeme von Punkten für gewisse spezielle Werte der Variablen eintreten, welche durch bestimmte Relationen aneinander geknüpft sind, die sich dann im ganzen Verlaufe der Bewegung erhalten, die aber, sobald man sie nur im mindesten stören würde, sich sogleich selbst vernichten würden (labiles Gleichgewicht der lebendigen Kraft), z. B. wenn alle Punkte und fixen Centra ursprünglich in einer mathematischen Linie oder Ebene liegen würden. Als stabiles Gleichgewicht ist dieser Fall nur möglich, wenn das Punktesystem so beschaffen ist, daß die Variablen für alle möglichen Anfangswerte nach einer bestimmten Periode stets wieder zu den Anfangswerten zurückkehren, ohne dabei alle mit dem Prinzip der lebendigen Kraft vereinbarten Werte angenommen zu haben. Alsdann sind statt einer Art des Wärmegebietes immer deren unendlich viele möglich, welche erst in ihrem Vereine dem oben gefundenen Gesetze gehorchen würden, wie dies in der Tat sogleich eintritt, wenn die Periodizität wie immer, z. B. dadurch, daß sich das Punktesystem in einem allseitig von elastischen Wänden umschlossenen Raume bewegt oder durch auch nur ein frei herumfliegendes Atom, das an elastischen Wänden anprallt, gestört wird.¹⁾

¹⁾ [Dieser letzte Absatz ist fraglich. Es ist nicht bewiesen, daß trotz der Reflexionen an elastischen Wänden bzw. trotz der Wirkung jenes Einzelatoms nicht noch außer der Gleichung der lebendigen Kraft noch andere Gleichungen bleiben, so daß das System nicht alle mit der 1. Gleichung verträgliche Werte durchläuft. Bem. a. d. Nachlaß.]

6.

Lösung eines mechanischen Problems.¹⁾

(Wien. Ber. 58. S. 1035—1044. 1868.)

Ich habe in einer Abhandlung in diesem Bande der Sitzungsberichte²⁾ die allgemeine Lösung folgendes Problems gegeben: Eine Anzahl materieller Punkte bewegt sich unter dem Einflusse von Kräften, für die eine Kraftfunktion existiert. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, daß sich jeder derselben durch ein bestimmtes Raumelement mit einer bestimmten Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung bewegt. So allgemein dieses Problem und so groß die Anzahl der hierher gehörigen speziellen Fälle ist, so ist es doch nicht so ganz leicht einen als Beispiel herauszufinden, für den sich die Rechnungen komplett durchführen lassen. Ich habe nun seitdem einen ganz speziellen, diesen allgemeinen Voraussetzungen unterstehenden Fall aufgefunden, für den dies mit großer Leichtigkeit vonstatten geht und halte es nicht für überflüssig, auf die Behandlung desselben theils zur Erläuterung, theils auch zur Verifikation des allgemeinen Theorems näher einzugehen. Ein beweglicher Punkt M mit der Masse 1 werde gegen³⁾ einen fixen Punkt O mit einer Kraft gezogen⁴⁾, deren Intensität durch $-(\alpha/2R^2) + (\beta/R^3)$ dargestellt werden soll, wobei R die Entfernung der Punkte O und M ist. Außerdem befindet sich in der Bahnebene des Punktes M eine fixe Gerade in der Entfernung γ von O und wird der Punkt M jedesmal, wenn er auf diese Gerade stößt, wie eine elastische Kugel an ihr reflektiert. Führen wir als Polarkoordinaten R und den Winkel Φ der Geraden OM mit der von O auf die fixe Gerade gefällten Senkrechten ein, so haben wir für die Bahn von M ,

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 5. S. 257. 17. Dezember 1868.

²⁾ Dieser Band Nr. 5.

³⁾ [von]. ⁴⁾ [abgestoßen, Bem. a. d. Nachlass.]

solange dasselbe nicht mit der fixen Geraden zusammenstößt, die Gleichungen:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2 \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = A + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R^2}, \quad R^2 \frac{d\Phi}{dt} = a.$$

Hier bedeutet A eine absolut konstante, a aber eine von einem Stoße bis zum nächsten konstante Größe, deren Wert jedoch durch jeden Stoß verändert wird. Hieraus folgt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dt} = \sqrt{A + \frac{\alpha}{R} - \frac{a^2 + \beta}{R^2}}, \\ d\Phi = \frac{a dR}{R \sqrt{A R^2 + \alpha R - a^2 - \beta}}; \end{array} \right.$$

daher:

$$(2) \quad \Phi - \varepsilon = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \beta}} \arccos \frac{2 \frac{a^2 + \beta}{R} - \alpha}{\sqrt{a^2 + 4A(a^2 + \beta)}},$$

wobei ε wieder im Intervall zwischen zwei Stößen konstant ist, aber durch jeden Stoß im allgemeinen ein anderes wird. Die Werte der zwei Konstanten a und ε charakterisieren die Bahn des Beweglichen M vollständig. Unser Problem ist daher gelöst, wenn wir die Wahrscheinlichkeit kennen, daß gleichzeitig a zwischen a und $a + da$, ε zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt. Betrachten wir eine sehr lange Zeit und bezeichnen mit $F(a, \varepsilon) da d\varepsilon$ das Verhältnis der Anzahl der Bahnen von M zwischen zwei sich folgenden Stößen auf die fixe Gerade, welche so beschaffen sind, daß für sie a und ε zwischen a und $a + da$ und ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen, zur Gesamtzahl jener Bahnen überhaupt, wofür man, da zwischen je zwei Stößen eine Bahn liegt und die Zahl derselben sehr groß ist, auch die Zahl der Stöße während jener Zeit setzen kann.

Fixieren wir ferner einen Stoß, vor dem die Werte der Konstanten a und ε waren; die Werte von R und Φ , dR/dt und $d\Phi/dt$ im Moment des Stoßes auf die fixe Gerade sollen r , φ , dr/dt und $d\varphi/dt$ heißen. Die Größen a , ε , dr/dt und $d\varphi/dt$ sollen durch den Stoß in a_1 , ε_1 , dr_1/dt und $d\varphi_1/dt$ verwandelt werden. Dann müssen r und φ zugleich der Gleichung (2) und der Gleichung der fixen Geraden $r \cos \varphi = \gamma$ genügen, man hat also:

$$(3) \quad \varphi - \varepsilon = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \beta}} \arccos \frac{2 \frac{a^2 + \beta}{\gamma} \cos \varphi - \alpha}{\sqrt{a^2 + 4A(a^2 + \beta)}}.$$

Der Punkt, dessen Koordinaten r und φ sind, muß aber auch in der Bahn liegen, welche das Bewegliche nach dem Stoße einschlägt. Man hat daher auch:

$$(4) \quad \varphi - \varepsilon_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \beta}} \arccos \frac{2 \frac{a_1 + \beta}{\gamma} \cos \varphi - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4 A (a_1^2 + \beta)}}.$$

Da der Stoß ein vollkommen elastischer sein soll, so bleibt die Komponente der Geschwindigkeit parallel der fixen Geraden ungeändert, die senkrecht gegen dieselbe verändert aber ihr Zeichen, es wird also:

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \varphi &= \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi, \\ \frac{dr_1}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi_1}{dt} \sin \varphi &= -\frac{dr}{dt} \cos \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= -\frac{dr}{dt} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + r \frac{d\varphi}{dt} 2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ r \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{dr}{dt} 2 \sin \varphi \cos \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert mit r multipliziert nach Substitution der Werte von r , dr/dt und $d\varphi/dt$:

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \sin \varphi \sqrt{A \gamma^2 + 2 \alpha \gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi} \\ \quad + a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{cases}$$

Die Grenzen da_1 , $d\varepsilon_1$ der Werte der Konstanten nach dem Stoße, wenn dieselben vor dem Stoße zwischen a und $a + da$, ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ lagen, findet man nach der bekannten Formel:

$$da_1 d\varepsilon_1 = \left(\frac{da_1}{da} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} - \frac{da_1}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{da} \right) da d\varepsilon.$$

Die Gleichung (5) liefert a_1 als Funktion von a und φ , während φ nach Gleichung (3) wieder Funktion von a und ε ist. Es ist daher:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{da} &= \left(\frac{da_1}{da} \right)_\varphi + \left(\frac{da_1}{d\varphi} \right)_a \frac{d\varphi}{da} \\ \frac{da_1}{d\varepsilon} &= \left(\frac{da_1}{d\varphi} \right)_\varepsilon \frac{d\varphi}{d\varepsilon}, \end{aligned}$$

wobei die eingeklammerten Differentialquotienten eine Ableitung bloß insofern bezeichnen, als die Variable im Zähler

die im Nenner laut derjenigen Gleichung explizit enthält, deren Nummer dem Differentialquotienten als Index beigefügt ist. ε_1 ist durch Gleichung (4) als Funktion von a_1 und φ gegeben. Es ist daher:

$$\frac{d\varepsilon_1}{da} = \left(\frac{d\varepsilon_1}{da_1}\right)_4 \cdot \frac{da_1}{da} + \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)_4 \cdot \frac{d\varphi}{da}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} = \left(\frac{d\varepsilon_1}{da_1}\right)_4 \cdot \frac{da_1}{d\varepsilon} + \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)_4 \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon}$$

Die Substitution aller dieser Werte ergibt:

$$\frac{da_1}{da} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} - \frac{da_1}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{da} = \left(\frac{da_1}{da}\right)_5 \cdot \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)_4 \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon}$$

Man findet aber:

$$\left(\frac{da_1}{da}\right)_5 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - \frac{2a \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi}}$$

Die Gleichung (3) liefert:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = 1 - \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi}}$$

Ebenso liefert die Gleichung (5):

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)_5 = 1 - \frac{a_1 \sin \varphi}{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a_1^2 + \beta) \cos^2 \varphi}}$$

Substituiert man hier den Wert von a_1 oder berücksichtigt man, daß

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a_1^2 + \beta) \cos^2 \varphi} = \frac{dr_1}{dt} = -\frac{dr}{dt} \cos 2\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \sin 2\varphi$$

ist, so findet man

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)_5 = 1 - \frac{2 \sin^2 \varphi \sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi} + a \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{2a \cos^2 \varphi \sin \varphi - (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi}}$$

Die Substitution aller dieser Werte aber liefert:

$$\frac{da_1}{da} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} - \frac{da_1}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{da} = \left(\frac{da_1}{da}\right)_5 \cdot \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)_4 \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon}$$

$$= \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi} - 2a \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi}}$$

$$\times \frac{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi} - a \sin \varphi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi} - 2a \cos^2 \varphi \sin \varphi}$$

$$\times \frac{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi}}{\sqrt{A\gamma^2 + \alpha\gamma \cos \varphi - (a^2 + \beta) \cos^2 \varphi} - a \sin \varphi} = 1$$

Es ist also $da_1 d\varepsilon_1 = da d\varepsilon$.

Alle Bahnen, für welche die Werte der Konstanten a und ε zwischen a und $a + da$, ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen, werden durch den Stoß des Beweglichen auf die fixe Gerade in solche verwandelt, für welche die Werte dieser Konstanten zwischen den Grenzen a_1 und $a_1 + da_1$, ε_1 und $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ liegen. Es ist aber klar, daß auch umgekehrt die Konstanten nach dem Stoße nur dann zwischen a_1 und $a_1 + da$, ε_1 und $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ liegen können, wenn sie vor demselben zwischen a und $a + da$, ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ lagen; denn durch den Ort des Zusammenstoßes und Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung nach demselben sind ja auch dieselben Größen vor dem Stoße, folglich durch a_1 und ε_1 , a und ε eindeutig bestimmt.

Ich bemerke hierbei noch, daß ich zwei Bahnen, die, ihrer Gestalt nach identisch, sich nur durch die Richtung unterscheiden, in welcher sie vom Beweglichen durchlaufen werden, keineswegs als identisch betrachte, indem für beide das Zeichen der Konstante a das entgegengesetzte ist. Zufolge des eben ausgesprochenen Satzes wird offenbar die Zahl der Bahnen, für welche die Konstanten zwischen a und $a + da$, ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen, gleich sein müssen der Zahl der Bahnen, für die dieselben zwischen a_1 und $a_1 + da_1$, ε_1 und $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ liegen. Das Verhältnis der ersteren Zahl zur Gesamtzahl der Stöße habe ich, wenn die Zeit, während welcher die Bewegung von M ins Auge gefaßt wird, sehr lang ist, mit $F(a, \varepsilon) da d\varepsilon$, das der letzteren Zahl zur Gesamtzahl der Stöße mit $F(a_1, \varepsilon_1) da_1 d\varepsilon_1$ bezeichnet.

Es muß also:

$$F(a, \varepsilon) da d\varepsilon = F(a_1, \varepsilon_1) da_1 d\varepsilon_1,$$

und wegen $da d\varepsilon = da_1 d\varepsilon_1$

$$F(a, \varepsilon) = F(a_1, \varepsilon_1)$$

sein. Aus Bahnen mit den Konstanten $a_1 \varepsilon_1$ mögen solche mit den Konstanten $a_2 \varepsilon_2$ entstehen; so gilt von $a_2 \varepsilon_2$ bezüglich $a_1 \varepsilon_1$ dasselbe, wie von $a_1 \varepsilon_1$ bezüglich $a \varepsilon$; es ist daher auch $F(a_1, \varepsilon_1) = F(a_2, \varepsilon_2)$. Setzt man diese Schlußweise fort, so ergibt sich, daß $F(a, \varepsilon)$ eine Konstante sein muß und also die Wahrscheinlichkeit, daß die Werte der Konstanten zwischen den Grenzen a und $a + da$, ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen, durch

$dad\varepsilon / \int \int dad\varepsilon$ gegeben ist, wobei das Integral über alle Werte zu erstrecken ist, welche die Konstanten im Verlaufe der Zeit annehmen können. Das Problem ist hiermit vollständig gelöst.

Das Resultat wird anschaulicher durch Einführung anderer Größen. Sei zunächst N die Anzahl der Stöße des Beweglichen auf die fixe Gerade während einer sehr langen Zeit dividiert durch diese Zeit, also die Anzahl der durchschnittlich auf die Zeiteinheit entfallenden Stöße, so ist $Ndad\varepsilon / \int \int dad\varepsilon$ die Anzahl der durchschnittlich auf die Zeiteinheit entfallenden Stöße, vor denen die die Bahn bestimmenden Konstanten zwischen a und $a + da$, ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ lagen, also auch die Anzahl der Bahnen, für welche die Konstanten innerhalb jener Werte liegen. Für jede dieser Bahnen liegt der Winkel Φ während der Zeit

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right) = \frac{R^2 d\Phi}{a}$$

zwischen den Grenzen Φ und $\Phi + d\Phi$. Es ist also die Zeit, während welcher im Verlaufe der Zeiteinheit durchschnittlich a zwischen a und $a + da$, ε zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, Φ zwischen Φ und $\Phi + d\Phi$ liegt, gegeben durch

$$\tau = \frac{CR^2}{a} da d\varepsilon d\Phi,$$

wobei die Konstante $N / \int \int dad\varepsilon$ durch C ersetzt wurde. Führen wir zunächst statt ε die Variable R ein, während wir a und Φ ungeändert lassen, so ergibt sich aus der Gleichung (2):

$$d\varepsilon = \frac{a dR}{R \sqrt{AR^2 + \alpha R - a^2 - \beta}},$$

daher:

$$\tau = \frac{CR da d\Phi dR}{\sqrt{AR^2 + \alpha R - a^2 - \beta}}.$$

Lassen wir nun die Variablen R und Φ ungeändert, und führen statt a den Winkel λ ein, den die Bewegungsrichtung mit dem Radiusvektor R macht, so erhalten wir:

$$\lambda = \text{arc ctg} \frac{\left(\frac{dR}{dt} \right)}{R \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)} = \text{arc ctg} \sqrt{\frac{AR^2}{a^2} + \frac{\alpha R}{a^2} - \frac{\beta}{a^2} - 1},$$

$$d\lambda = \frac{dR}{\sqrt{AR^2 + \alpha R - a^2 - \beta}}$$

und folglich:

$$\tau = CR dR d\Phi d\lambda.$$

Dies ist also die Zeit, während welcher durchschnittlich im Verlaufe der Zeiteinheit der Ort des Beweglichen in das Flächenelement $R dR d\Phi$ und seine Geschwindigkeitsrichtung innerhalb λ und $\lambda + d\lambda$ fällt. Es ist daher jeder Punkt der Ebene als Ort für das Bewegliche und für jeden Ort desselben jede Richtung in der Ebene als Bewegungsrichtung gleich wahrscheinlich, wenn nur überhaupt jeder Punkt der Ebene mit allen möglichen Geschwindigkeitsrichtungen durchlaufen wird. Wäre also M ein leuchtender Punkt und die Bewegung außerordentlich schnell, so erschiene die ganze Fläche, welche M bestreicht, gleichförmig erleuchtet. Ich will noch bemerken, daß die Rechnung nicht schwieriger wird, wenn man annimmt, die Kraft, mit der der Punkt M nach O gezogen wird, sei eine willkürliche Funktion der Entfernung OM , deren Integral $\frac{1}{2}\chi(R)$ sei, sowie die fixe Linie, an der M elastisch reflektiert wird, sei keine Gerade, sondern eine durch irgend eine Gleichung $R = \psi(\Phi)$ bestimmte Kurve. Statt der Gleichungen (1) und (2) wird dann die Bahn durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(1') \quad \frac{dR}{dt} = \sqrt{A + \chi(R) - \frac{a^2}{R^2}},$$

$$(2') \quad \Phi - \varepsilon = a \int_c^R \frac{dR}{R^2 \sqrt{A + \chi(R) - \frac{a^2}{R^2}}},$$

wobei c eine willkürliche, aber auch von einer Bahn zur anderen konstante Größe ist, a und ε dagegen durch jeden Stoß verändert werden. An die Stelle der Gleichungen (3) und (4), welche für den Moment des Zusammenstoßes gelten, treten, weil die Koordinaten r und φ des Beweglichen in diesem Momente auch der Gleichung der fixen Kurve $r = \psi(\varphi)$ genügen müssen, folgende:

$$(3') \quad \varphi - \varepsilon = a \int_c^{\psi(\varphi)} \frac{dR}{R^2 \sqrt{A + \chi(R) - \frac{a^2}{R^2}}},$$

$$(4') \quad \varphi - \varepsilon_1 = a_1 \int_c^{\psi(\varphi)} \frac{dR}{R^2 \sqrt{A + \chi(R) - \frac{a^2}{R^2}}}.$$

Um aus den Geschwindigkeiten des Beweglichen dr_1/dt und $rd\varphi_1/dt$ im Moment des Stoßes aber vor demselben, die Geschwindigkeiten dr/dt und $rd\varphi/dt$ im Moment nach dem Stoße zu finden, heiße α der Winkel zwischen dem Radiusvektor r und der im Punkte, dessen Koordinaten r und φ sind, an die fixe Kurve nach der Seite, wo O liegt, gezogenen Normalen; dann findet man wie im vorigen Falle aus den für den elastischen Stoß geltenden Gleichungen:

$$\frac{dr_1}{dt} = - \frac{dr}{dt} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2r \frac{d\varphi}{dt} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$r_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = 2 \frac{dr}{dt} \sin \alpha \cos \alpha + r \frac{d\varphi}{dt} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Aus der Gleichung der fixen Kurve $R = \psi(\Phi)$ ergibt sich $\operatorname{tg} \alpha = \psi'(\varphi)/\psi(\varphi)$; daher wenn ich statt $\psi(\varphi)$ und $\psi'(\varphi)$ einfach ψ und ψ' schreibe:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\psi^2 - \psi'^2}{\psi^2 + \psi'^2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\psi \psi'}{\psi^2 - \psi'^2}.$$

Es wird daher:

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \frac{dr}{dt} \frac{\psi'^2 - \psi^2}{\psi'^2 + \psi^2} + \psi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \frac{2\psi\psi'}{\psi^2 + \psi'^2}, \\ a_1 &= r^2 \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\psi^2\psi'}{\psi^2 + \psi'^2} \frac{dr}{dt} - a \frac{\psi^2 - \psi'^2}{\psi^2 + \psi'^2} \\ &= \frac{2\psi^2\psi'}{\psi^2 + \psi'^2} \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a^2}{\psi^2}} + a \frac{\psi^2 - \psi'^2}{\psi^2 + \psi'^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung

$$da_1 d\varepsilon_1 = \left(\frac{da_1}{da} \right)'_5 \cdot \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} \right)'_4 \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon}$$

bleibt vollkommen unverändert; aber es wird:

$$\left(\frac{da_1}{da} \right)'_5 = \frac{\psi^2 - \psi'^2}{\psi^2 + \psi'^2} - \frac{2\psi' \alpha}{(\psi^2 + \psi'^2) \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a^2}{\psi^2}}}.$$

Aus den Gleichungen (3') und (4') aber ergibt sich:

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{\psi^2 \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a^2}{\psi^2}}}{\psi^2 \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a^2}{\psi^2} - a\psi'}}$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)' = 1 - \frac{a_1 \psi'}{\psi^2 \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a_1^2}{\psi^2}}},$$

oder, indem man noch statt a_1 seinen Wert substituiert:

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi}\right)' = 1 - \frac{a_1 \psi'}{\psi^2 \frac{dr_1}{dt}} = 1 - \frac{2\psi^2 \psi'^2 \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a^2}{\psi^2}} + \psi'(\psi^2 - \psi'^2)a}{\psi^2(\psi'^2 - \psi^2) \sqrt{A + \chi(\psi) - \frac{a^2}{\psi^2}} + 2\psi^2 \psi' a}.$$

Die Substitution aller dieser Werte liefert wieder $da_1 d\varepsilon_1 = da d\varepsilon$. Es muß daher auch für diesen allgemeineren Fall die Anzahl den Bahnen, für welche der Wert von a zwischen a und $a + da$ und der von ε zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, proportional $da d\varepsilon$ sein. Die Konsequenzen dieser Gleichung sind dieselben, wie im früheren spezielleren Falle.

Über die Festigkeit zweier mit Druck übereinandergesteckter zylindrischer Röhren.

(Wien. Ber. 59. S. 679—688. 1869.)

Es sei ein hohler Zylinder aus einem homogenen und isotropen elastischem Materiale gegeben. Ein Querschnitt senkrecht zu seiner Achse sei ein Kreisring, begrenzt von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien r_0 und r_1 . Auf die ganze innere Mantelfläche des Zylinders wirke eine konstante normale Druckkraft, deren Intensität bezogen auf die Flächeneinheit p_0 sei; ebenso wirke auf die äußere Mantelfläche die normale Druckkraft p_1 . Auf die beiden senkrecht gegen die Achse gelegenen Endflächen endlich soll eine beliebige ebenfalls normale Zugkraft q wirken. Betrachten wir nun irgend einen Punkt des Zylinders, dessen Entfernung von der Achse des Zylinders r und von der Grundfläche desselben z ist, so ist die Projektion der Verschiebung, welche derselbe infolge der von den Kräften p_0 , p_1 und q hervorgebrachten Deformation des Zylinders erleidet, auf die Richtung der Geraden r

$$(1) \quad \rho = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} r - \frac{\lambda q r}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} + \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{2\mu(r_1^2 - r_0^2)r}.$$

Die Projektion derselben Verschiebung in der Richtung der Achse des Zylinders aber ist

$$(2) \quad \zeta = \left[\frac{(\lambda + \mu) q}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \right] z.$$

λ und μ sind die von Lamé eingeführten Elastizitätskonstanten. Legen wir ferner durch denselben Punkt drei Flächenelemente, von denen das erste senkrecht auf der Geraden r , das zweite in der Ebene dieser Geraden und der Achse des Zylinders, das dritte endlich senkrecht auf

1) Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 6. S. 82. 22. April 1869.

der Achse des Zylinders steht, so wirken auf alle diese Flächenelemente die im Zylinder geweckten elastischen Kräfte normal, und zwar ist die Intensität der elastischen Kraft, die auf das erste Flächenelement wirkt und die ich kurz als die radiale Hauptspannung bezeichnen will, bezogen auf die Flächeneinheit:

$$R = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Die Intensität der elastischen Kraft auf das zweite Flächenelement, die ich als die peripherische Hauptspannung bezeichnen will, wird sein:

$$\Phi = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Endlich die Intensität der elastischen Kraft, welche auf das dritte Flächenelement wirkt und die ich als die axiale Hauptspannung bezeichne, ist $Z = q$.

In der Praxis ist gewöhnlich p_0 weit größer als p_1 ; in diesem Falle wird Φ eine Zugkraft und hat seinen größten Wert für $r = r_0$, also an der Innenwand des Hohlzylinders. Derselbe ist:

$$(3) \quad \Phi_0 = \frac{p_0 (r_0^2 + r_1^2) - 2 p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Setzt man Φ_0 gleich der auf der Flächeneinheit bezogenen Zugkraft, welche das Material gerade noch zu ertragen vermag, also der Zugfestigkeit des Materials A , so erhält man die Gleichung:

$$(4) \quad A = \frac{p_0 (r_0^2 + r_1^2) - 2 p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

aus der bei gegebenem r_0 , r_1 und p_1 (letzteres z. B. gleich dem Drucke einer Atmosphäre) jener innere Druck p_0 bestimmt werden kann, welchen die Röhre gerade noch zu ertragen vermag. Es kann aber auch aus ihr bei gegebenem p_0 und p_1 jene Grenze bestimmt werden, unter welche das Verhältnis $r_1:r_0$ nicht sinken darf, damit die Röhre die gegebenen Druckkräfte auszuhalten vermöge. Für $p_0 = A + 2 p_1$ wird dieses Verhältnis unendlich, für größere p_0 imaginär; wenn daher der von innen auf die Röhre wirkende Druck die Grenze $A + 2 p_1$ überschreitet, so vermag sie denselben, selbst wenn man ihre Wände noch so stark macht, nicht mehr zu ertragen.

Die Ursache hiervon liegt darin, daß den größten Teil des von innen wirkenden Druckes die nahe an der Innenwand liegenden Schichten zu ertragen haben, während die weiter nach außen liegenden Schichten in immer kleinerem und kleinerem Maß davon affiziert werden, weshalb die Festigkeit des Rohres durch sehr weit von der Innenwand entfernt hinzugefügte Schichten nicht mehr erheblich gesteigert werden kann. Dieser Umstand ist namentlich bei der Konstruktion von Kanonen sehr unangenehm. Größere Gasspannungen als die Zugfestigkeit des Materials mehr zwei Atmosphären, die in diesem Falle wohl zu vernachlässigen sind, vermag das Geschützrohr selbst bei beliebiger Dicke nicht zu ertragen. Man hat, um diesem Übelstande abzuweichen, Geschütze konstruiert, welche aus zwei konzentrischen mit einem gewissen Drucke übereinandergedrückten zylindrischen Röhren bestehen. Die innersten Schichten des Geschützrohres sind infolge dieser Einrichtung im ursprünglichen Zustande mit einer gewissen Kraft zusammengedrückt und vermögen daher einen größeren Druck nach außen zu ertragen. Die äußeren Schichten sind allerdings schon im ursprünglichen Zustande gedehnt; allein da sie nur einen geringen Teil des von Innen wirkenden Druckes p_0 zu ertragen haben, so kann die Einrichtung so getroffen werden, daß sie nebst ihrer ursprünglichen Dehnung doch auch noch den von dem neu hinzugekommenen Drucke p_0 auf sie entfallenden Teil auszuhalten vermögen. Ich habe im vergangenen Wintersemester in meinen Vorlesungen über Elastizitätslehre als Beispiel die Bedingungen untersucht, unter welchen ein derartiges System zweier übereinandergedrückter zylindrischer Röhren das Maximum der Widerstandsfähigkeit besitzt und glaube wegen der Wichtigkeit, die dieses Problem in der Praxis erlangt hat, meine Rechnungen hiermit veröffentlichen zu sollen. Betrachten wir zwei derartige übereinandergeschobene zylindrische Röhren; der Radius des inneren Querschnittes der inneren Röhre sei $r_0 = \sqrt{\alpha}$, der des Querschnittes, welcher beiden gemeinsam ist, sei $\sqrt{\beta}$, endlich der Radius des äußersten Querschnittes sei $r_1 = \sqrt{\gamma}$. Im ursprünglichen Zustande möge das äußere Rohr das innere, mit einem Drucke C bezogen auf die Flächeneinheit, zusammenpressen, während auf die ganze Außenfläche unseres Doppelrohres ein kleiner Druck B ,

z. B. der einer Atmosphäre lastet. Es verwandle sich nun der Druck auf die innere Fläche unseres Rohres in P_0 , der auf die äußere Fläche in P_1 , der auf die beiden Endflächen in Q (im speziellen Falle der Kanonen bedeutet P_0 die Gasspannung, P_1 und Q aber werden gleich B). Nehmen wir nun an, daß in dem neuen Zustande der äußere Zylinder mit einer Kraft X auf den inneren drücke, so können wir auf jeden der beiden Zylinder die obigen Formeln anwenden, und zwar haben wir für den inneren Zylinder zu setzen:

$$p_0 = P_0, p_1 = X, q = Q, r_0^2 = \alpha, r_1^2 = \beta.$$

Für den äußeren Zylinder aber ist zu setzen:

$$p_0 = X, p_1 = P_1, q = Q, r_0^2 = \beta, r_1^2 = \gamma.$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung (3) liefert uns als größte peripherische Hauptspannung für den inneren Zylinder

$$(5) \quad \Phi_0 = \frac{P_0(\beta + \alpha) - 2X\beta}{\beta - \alpha}$$

und für den äußeren Zylinder:

$$(6) \quad \Phi'_0 = \frac{X(\gamma + \beta) - 2P_1\gamma}{\gamma - \beta}.$$

Die Unbekannte X ist dadurch bestimmt, daß die Radialverschiebung ϱ_0 , welche die Punkte der äußeren Mantelfläche des inneren Zylinders infolge des Auftretens der Kräfte P_0 und P_1 erleiden, gleich sein muß der radialen Verschiebung ϱ'_0 der Punkte der inneren Mantelfläche des äußeren Zylinders infolge des Auftretens derselben Kräfte. Es ist aber hierbei auf die innerste Fläche der Druck $P_0 - B$, auf die mittlere der Druck $X - C$, und auf die äußerste der Druck $P_1 - B$ hinzugekommen.

Die Deformation, welche diese neu hinzugekommenen Druckkräfte hervorbringen, wird nach dem Prinzip der Superposition der Wirkungen gerade so groß sein, als ob dieselben Kräfte einen noch undeformierten elastischen Körper affizieren würden; man findet daher ϱ_0 aus der Formel (1), indem man darin setzt:

$$p_0 = P_0 - B, p_1 = X - C, q = Q - B, r_0^2 = \alpha, r_1^2 = \beta, r^2 = \beta;$$

es ergibt sich:

$$\varrho_0 = \left[\frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{(P_0 - B)\alpha - (X - C)\beta}{\beta - \alpha} + \frac{(P_0 - B - X + C)\alpha}{2\mu(\beta - \alpha)} - \frac{\lambda(Q - B)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \right] \sqrt{\beta}$$

und ϱ_0' aus derselben Formel, indem man setzt:

$$p_0 = X - C, p_1 = P_1 - B, q = Q - B, r_0^2 = \beta, r_1^2 = \gamma, r^2 = \beta.$$

Da das Material der zweiten Röhre im allgemeinen ein anderes sein kann, so sollen ferner die Elastizitätskonstanten desselben mit λ' und μ' bezeichnet werden.

Man erhält dann:

$$\varrho_0' = \left[\frac{\lambda' + 3\mu'}{2\mu'(3\lambda' + 2\mu')} \frac{(X - C)\beta - (P_1 - B)\gamma}{\gamma - \beta} + \frac{(X - C - P_1 + B)\gamma}{2\mu'(\gamma - \beta)} - \frac{\lambda(Q - B)}{2\mu'(3\lambda' + 2\mu')} \right] \sqrt{\beta}.$$

Die Gleichsetzung beider Werte liefert als Bestimmungsgleichung für X :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\alpha\beta + \nu\alpha'}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha'\beta + \nu'\gamma}{\gamma - \beta} \right) (X - C) \\ & = \frac{(\alpha + \nu)\alpha}{\beta - \alpha} (P_0 - B) + \frac{(\alpha' + \nu')\gamma}{\gamma - \beta} (P_1 - B) + (\vartheta' - \vartheta)(Q - B), \end{aligned} \right.$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \alpha' = \frac{\lambda' + 2\mu'}{2\mu'(3\lambda' + 2\mu')}, \quad \nu = \frac{1}{2\mu}, \quad \nu' = \frac{1}{2\mu'},$$

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \vartheta' = \frac{\lambda'}{2\mu'(3\lambda' + 2\mu')}.$$

Die Einsetzung dieses Wertes für X in die beiden Formeln für Φ_0 und Φ_0' liefert sofort die Maxima der beiden peripherischen Hauptspannungen und läßt daher beurteilen, ob eine Gefahr des Zerspringens oder bleibender Veränderungen der Doppelröhre vorhanden ist. Dabei kann natürlich C auch aus den Dimensionen der beiden Röhren vor dem Übereinanderschieben bestimmt werden. Es ist, wenn δ die Differenz des äußeren Radius des inneren und inneren Radius des äußeren Zylinders bedeutet, δ gleich der Summe der durch die Kraft C hervorgebrachten radialen Verschiebungen der Außenfläche des inneren und der Innenfläche des äußeren Zylinders, daher

$$\delta = \left(\frac{\alpha\beta + \nu\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha'\beta + \nu'\gamma}{\gamma - \beta} \right) \sqrt{\beta} C.$$

Ich will mich nun mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen das System das Maximum der Festigkeit besitzt, wenn α und γ und natürlich das Material beider Röhren gegeben ist. Es ist evident, daß hierzu erforderlich ist, daß die beiden größten peripherischen Hauptspannungen Φ_0 und Φ_0' zu gleicher Zeit jene Grenze erreichen, welche das Material der Röhren gerade noch zu ertragen imstande ist. Denn würde diese Grenze für die eine Röhre früher als für die andere erreicht, so könnte man alles andere unverändert lassen und nur die Dicke dieser Röhre so lange verringern, bis auch sie bis zu jener Grenze angestrengt würde, die sie gerade noch zu ertragen vermag. Es könnte daher bereits für geringere Röhrendicke eine Konstruktion von gleicher Festigkeit und daher auch für diese Röhrendicke eine Konstruktion von größerer Festigkeit gefunden werden. Nennen wir die Zugfestigkeit der inneren Röhre A , die der äußeren A' , so erhalten wir daher für die günstigste Konstruktion gleichzeitig:

$$(8) \quad \begin{cases} A = \frac{P_0(\beta + \alpha) - 2X\beta}{\beta - \alpha}, \\ A' = \frac{X(\beta + \gamma) - 2P_1\gamma}{\gamma - \beta}. \end{cases}$$

Die Elimination von X aus diesen Gleichungen liefert:

$$(9) \quad (\beta - \alpha)(\beta + \gamma)A + 2\beta(\gamma - \beta)A' - (\beta + \alpha)(\beta + \gamma)P_0 + 4\beta\gamma P_2 = 0.$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden, um bei gegebenem α , γ , A , A' und P_1 die Größe β so zu bestimmen, daß P_0 , d. h. der Druck, den das Doppelrohr gerade noch zu ertragen vermag, ein Maximum wird. Es folgt nämlich aus derselben, wenn man die erwähnten Größen als konstant ansieht:

$$\begin{aligned} & (\beta + \alpha)(\beta + \gamma) \frac{dP_0}{d\beta} \\ & = (2\beta - \alpha + \gamma)A - (4\beta - 2\gamma)A' - (2\beta + \alpha + \gamma)P_0 + 4\gamma P_1, \end{aligned}$$

daher für das Maximum von P_0 :

$$(10) \quad (2\beta - \alpha + \gamma)A - (4\beta - 2\gamma)A' - (2\beta + \alpha + \gamma)P_0 + 4\gamma P_1 = 0.$$

Die Elimination des P_0 aus dieser und der Gleichung (9) aber liefert für β :

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta^2 + 2\alpha\gamma\beta + \alpha\gamma^2)A - (\alpha\beta^2 + 2\gamma\beta^2 + 2\gamma\alpha\beta - \alpha\gamma^2)A' \\ & \quad - 2\gamma(\beta^2 - \alpha\gamma)P_1 = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$\alpha(\beta + \gamma)^2(A - A') - 2\gamma(\beta^2 - \alpha\gamma)(A' + P_1) = 0.$$

Für $A = A'$, wenn also die Festigkeit des Materials beider Röhren gleich ist, ergibt sich daher:

$$\beta = \sqrt{\alpha\gamma} = r_0 r_1;$$

in diesem Falle ist es daher am vorteilhaftesten, den mittleren Radius gleich dem geometrischen Mittel des äußersten und innersten zu wählen. Sind A und A' verschieden, so erhält man für β folgenden Wert:

$$(11) \quad \beta = \frac{\alpha\gamma \pm \sqrt{\alpha b \gamma (\gamma - \alpha) + b^2 \alpha \gamma}}{b - \alpha},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\alpha(A - A') = a, \quad 2\gamma(A' + P_1) = b.$$

Dieser Ausdruck liefert für β einen Wert, der zwischen den Grenzen γ und α liegt, solange A zwischen den Grenzen

$$\frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} A' + \frac{\gamma - \alpha}{2\alpha} P_1$$

und

$$\frac{\alpha^2 + 4\alpha\gamma - \gamma^2}{(\alpha + \gamma)^2} A' - \frac{2\gamma(\gamma - \alpha)}{(\gamma + \alpha)^2} P_1$$

liegt. Ein Wert außerhalb der Grenzen α und γ hat natürlich keine Bedeutung; wenn daher die beiden Festigkeiten A und A' noch mehr voneinander verschieden sind, so kann durch Konstruktion einer derartigen Doppelröhre überhaupt kein Gewinn erzielt werden, sondern es ist vorteilhafter, das ganze Rohr bloß aus dem festeren Materiale zu konstruieren. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß das Material nicht durch die im Innern auftretenden Druckkräfte zerstört werde; die Bedingung hierfür wäre leicht aufzustellen; ich will dies jedoch unterlassen, da ja diese Gefahr meist nur sehr gering ist, indem die Druckfestigkeit der Materialien ihre Zugfestigkeit immer weit übertrifft. Den Wert des P_0 , also des größten inneren Druckes, den die Doppelröhre zu ertragen vermag, findet man, indem man in die Gleichung (10) den für β gefundenen Wert substituiert. Für den Fall, daß $A = A'$ ist, ergibt sich dann:

$$P_0 = \frac{4\gamma}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma})^2} (A + P_1) - A = \frac{4r_1^2}{(r_1 + r_0)^2} (A + P_1) - A.$$

Die folgende Tabelle mag zur Veranschaulichung des Effektes der Benutzung zweier Röhren aus gleichem Materiale dienen. Die erste Kolumne derselben enthält das Verhältnis des äußeren Röhrendurchmessers $2r_1$ zum inneren $2r_0$, die zweite die größte Gasspannung, welche ein einfaches Rohr von diesen Dimensionen zu ertragen vermag, berechnet nach Formel (4), die dritte die größte Gasspannung, welche das Doppelrohr bei der vorteilhaftesten Konstruktion zu ertragen vermag, berechnet nach der Formel (12). Der Druck auf die äußere Oberfläche des Rohres ist dabei als sehr klein vernachlässigt.

$\frac{r_1}{r_0}$	p_0	P_0
∞	A	$3 A$
4	0,882 A	1,560 A
3	0,800 A	1,250 A
2	0,600 A	0,778 A
1,5	0,385 A	0,440 A
1,2	0,180 A	0,190 A

Das Maximum der — freilich erst bei unendlicher Röhrenstärke — erzielbaren Festigkeit ist daher bei der Doppelröhre dreimal so groß als bei der einfachen.

Ist der äußere Radius doppelt so groß als der innere, so verhält sich die Festigkeit der Doppelröhre zu der der einfachen noch etwa wie 4 : 3. Für geringe Röhrendicken dagegen wird der Vorteil unerheblich; denn setzen wir in Formel (12) $r_1 = r_0 + \varrho$ und vernachlässigen alle Potenzen von ϱ bis auf die erste, so erhalten wir

$$P_0 = \frac{\varrho}{r_0} A + P_1.$$

Denselben Wert liefert in diesem Falle auch die Formel (4) für p_0 . Die Ursache hiervon ist leicht einzusehen; es sind nämlich dann alle Schichten nahe gleich angestrengt und es fällt der Vorteil, der sonst darin bestand, daß man die Überanstrengung der inneren Schichten durch größere Anstrengung der äußeren vermied, fort. Die hier berechnete Festigkeit ist natürlich nur anwendbar, wenn der Druck C , mit welchem die beiden Röhren zu Anfang übereinander geschoben wurden, so

gewählt wurde, daß das vorausgesetzte Maximum der Festigkeit wirklich erreicht wird, was in der Ausführung noch seine Schwierigkeit haben dürfte. Es ist dieser günstigste Wert von C durch die Gleichung (7) bestimmt, wobei der Wert von X aus einer der Gleichungen (8), der von P_0 aus der Gleichung (10), der von β aber aus der Gleichung (11) zu nehmen ist. Es ist bemerkenswert, daß derselbe auch gleich Null sein kann.

Ist das Material beider Röhren dasselbe, so ist

$$\beta = r_0 r_1, \quad P_0 = \frac{4r_1^2}{(r_1 + r_0)^2} (A + P_1) - A, \quad X = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} A + \frac{2r_1}{r_1 + r_0} P_1$$

und wird in der Gleichung (7) $x' = x$, $v' = v$.

Ich habe ferner bereits bemerkt, daß für die Kanonen, weil sowohl auf die äußere Oberfläche derselben, als auch auf ihre Endflächen bloß die atmosphärische Luft drückt, $P_1 = Q = B$ wird. Unter diesen Beschränkungen liefert die Gleichung (7), nachdem sie mit

$$\frac{(x + v) \beta (\gamma - \alpha)}{(\beta - \alpha) (\gamma - \beta)}$$

dividiert worden ist:

$$X - C = \frac{\alpha (\gamma - \beta)}{\beta (\gamma - \alpha)} (P_0 - B).$$

Die Substitution der eben bezeichneten Größen aber liefert:

$$C = \frac{r_1 (r_1 - r_0)^2 A + (2r_1^3 + r_1^2 r_0 + 4r_1 r_0^2 + r_0^3) B}{(r_1 + r_0)^3}.$$

Es ist noch von Interesse, die Verschiebung ζ der Teilchen des inneren Zylinders und ζ' der Teilchen des äußeren Zylinders parallel der Achse desselben zu suchen.

Die Gleichung (2) liefert, indem man darin dieselben Substitutionen wie früher in der Gleichung (1) macht:

$$\zeta = \left[\frac{(\lambda + \mu)(Q - B)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{(P_0 - B)\alpha - (X - C)\beta}{\beta - \alpha} \right] z,$$

$$\zeta' = \left[\frac{(\lambda' + \mu')(Q - B)}{\mu'(3\lambda' + 2\mu')} - \frac{\lambda'}{\mu'(3\lambda' + 2\mu')} \frac{(X - C)\beta - (P_1 - B)\gamma}{\gamma - \beta} \right] z,$$

wobei noch für $X - C$ sein Wert aus der Gleichung (7) zu substituieren ist. Die Werte von ζ und ζ' sind daher im allgemeinen ungleich; es wird daher noch ein Fortgleiten beider Röhren längs einander stattfinden, oder falls dies durch die gegenseitige Reibung verhindert ist, eine innere Spannung eintreten, welche jedoch die betrachteten Zustände nicht bedeutend

modifiziert. Nur wenn die Elastizitätskonstanten der beiden Röhren vollkommen gleich sind, wird auch ζ allgemein gleich ζ' . In diesem Falle erhält man nämlich aus der Gleichung (7):

$$X - C = \frac{\alpha(\gamma - \beta)(P_0 - B) + \gamma(\beta - \alpha)(P_1 - B)}{\beta(\gamma - \alpha)}$$

und dieser Wert liefert in unsere Ausdrücke für ζ und ζ' substituiert:

$$\zeta = \zeta' = \left[\frac{(\lambda + \mu)(Q - B)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha(P_0 - B) - \gamma(P_1 - B)}{\gamma - \alpha} \right] z.$$

Diese Gleichheit der Werte ζ und ζ' war übrigens schon nach dem Prinzip der Superposition der Wirkungen zu erwarten, indem ja die beiden Zylinder, wenn sie von einerlei Material sind, durch neu hinzukommende Kräfte genau in derselben Weise, wie ein einziger deformiert werden.

In der Tat ist diese Formel für $\zeta = \zeta'$ vollkommen identisch mit der Formel (2), wenn man darin die für unseren Fall geltenden Werte substituiert.¹⁾

¹⁾ Als ich diese Abhandlung bereits dem Drucke übergeben hatte, kam mir eine Abhandlung von Gadolin über dasselbe Thema zu Gesicht. Die von demselben für die Festigkeit des Doppelrohres im allgemeinen, sowie für die Bedingung der größten Festigkeit, wenn beide Röhren aus demselben Materiale sind, gefundenen Gleichungen fallen mit den hier entwickelten zusammen, wenn man statt C die Größe $\zeta = \delta/\sqrt{\beta}$ einführt. Die Bedingungen der größten Festigkeit, wenn das Material ein verschiedenes ist, hat er nicht der Rechnung unterzogen.

Über die elektrodynamische Wechselwirkung der Teile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt.¹

(Wien. Ber. 60. S. 69—87. 1869, u. Schlömilchs Z. S. 15. S. 16 ff. 1870).

Ampère gründete sein Gesetz für die Wechselwirkung zweier Elemente eines elektrischen Stromes auf qualitative Versuche. Seitdem fand dieses Gesetz durch die schönen quantitativen Versuche Webers eine ausgedehnte Bestätigung.

Allein Weber operierte bloß mit sog. Solenoiden, prüfte also bloß die Wirkung fester geschlossener Ströme auf andere feste geschlossene Ströme (wenigstens solcher, welche für das Experiment als in sich geschlossen angesehen werden konnten). Es erschien mir daher nicht ohne Interesse zu sein, die Wechselwirkung der Teile eines Stromes auch in Fällen quantitativ zu bestimmen, wo nicht jeder der festen Teile für sich bereits als ein geschlossener Strom angesehen werden kann. In diesen Fällen ist der quantitativen Bestimmung namentlich die große Zähigkeit des Quecksilbers hinderlich, das man als Verbindungsmittel der beweglichen Stromteile nicht entbehren kann. Ich untersuchte, um diesen Übelstand möglichst zu vermeiden, einen Strom von unveränderlicher Länge, aber veränderlicher Gestalt, so daß also Gleitstellen gänzlich vermieden wurden und sich die beweglichen Stücke an den Verbindungsstellen bloß im Quecksilber zu drehen brauchten. Die Reibung in demselben war auf diese Art freilich nicht ganz vermieden, aber sie erschien doch auf ein Minimum reduziert.

I. Beschreibung des Apparates.

Der Apparat, den ich zu diesem Zwecke anwandte, ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Die beiden Linien GEA und

¹) Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 6. S. 114. 10. Juni 1869.

HFD sind Kupferdrähte, die auf einer passenden hölzernen Unterlage festgemacht sind. Die Enden G und H derselben werden mit den Polen einer Batterie verbunden. Die

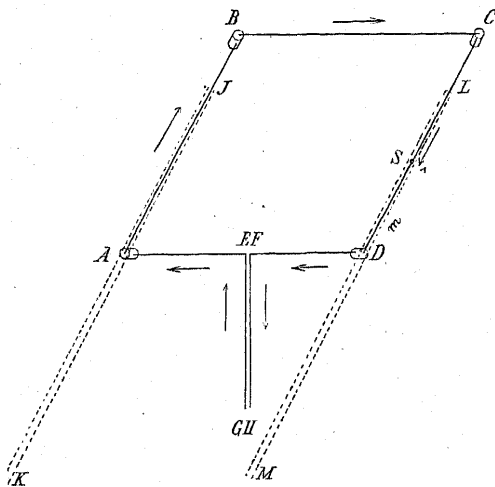


Fig. 1.

Stücke GE und HF laufen parallel und befinden sich in möglichst geringer Entfernung. Die Stücke EA und FD dagegen sind so gebogen, daß sie in eine und dieselbe horizontale Linie AD fallen.

Dieselben sind an den Enden A und D etwas nach abwärts gebogen und tragen daselbst je ein kleines Kupferschälchen. AB und CD sind ebenfalls zwei an den Enden etwas nach abwärts gebogene Kupferdrähte. Die Enden B und C derselben tragen zwei Kupferschälchen von derselben Beschaffenheit, wie die der früher betrachteten Drähte. Die Enden A und D dagegen sind mit einer feinen Stahlspitze versehen, welche in den Schälchen A und D aufrucht.

Um die Reibung der Stahlspitze zu vermindern, ist jedes der Kupferschälchen in der Mitte durchbohrt und in dasselbe ein Granathütchen, wie man dieselben bei Bussolen verwendet, eingelegt. Fig. 2 gibt einen Querschnitt des Schälchens bei D samt der darin ruhenden Spitze. Die Kupferdrähte AB und CD



Fig. 2.

sind an zwei hölzernen Stäben IK und LM befestigt, welche bei K und M mit passenden Gegengewichten versehen sind, so daß sie bei horizontaler Lage von AB und CD auf den Spitzen A und D balancieren. BC ist ebenfalls ein an seinen Enden mit Stahlspitzen versehener Kupferdraht, welcher genau in derselben Höhe in den Schälchen B und C balanciert; er trägt bei N etwas tiefer ein Gegengewicht.

Um die Reibung zu vermindern, sind an den Holzstäben IK und LM bei A und D Kokonfäden befestigt, welche über eine Rolle laufen und an dem anderen Ende so gewählte Gewichte tragen, daß auf die Spitzen A und D nur ein ganz kleiner Druck nach abwärts übrig bleibt. Die Länge der Linien AB , BC , CD und DA beträgt $338\frac{1}{2}$ mm, die Dicke der Drähte etwa 2 mm. Die Schälchen wurden nun so weit mit Quecksilber gefüllt, daß der Strom direkt vom Schälchen in die Kupferdrähte übergehen konnte und die Stahlspitzen nicht zu durchlaufen brauchte, weil dieselben sonst durch die starken angewandten Ströme gelitten hätten. Werden nun die Drahtenden G und H mit den Polen einer Batterie in Verbindung gesetzt, so durchfließt der Strom die Kupferdrähte in der durch die Pfeile angegebenen Richtung. Man sieht, daß die vom Strome durchflossene Figur ein Rhombus ist, in welchem bloß die Winkel der Seiten variabel sind. Umfließt der Strom den Rhombus von West über Nord nach Ost, so sucht sowohl die Einwirkung des Erdmagnetismus als auch die Wirkung des Stromes den Rhombus in ein Quadrat zu verwandeln. Hat dagegen der Strom die entgegengesetzte Richtung, so kehrt sich die Einwirkung des Erdmagnetismus um, während die des Stromes auf sich selbst unverändert bleibt. In diesem Falle ist das Quadrat eine labile Gleichgewichtslage und die stabile tritt bei irgend einem anderen Winkel ein. Derselbe wächst mit zunehmender Stromstärke, bis er endlich bei sehr großer Stromstärke gleich einem rechten wird, wo dann die labile Gleichgewichtslage aufhört, was durch die späteren Rechnungen begründet werden soll.

Alle diese Erscheinungen zeigen sich bei der großen Beweglichkeit des Apparates schon recht auffällig bei Anwendung von 6 Smeeschen Elementen, und dürfte sich daher der Apparat bei seiner leichten Herstellbarkeit auch als elektrodynamischer

Vorlesungsapparat gut eignen, wobei vielleicht noch die Granathütchen und Äquilibration durch die Rollen weggelassen werden könnte. Zum Zwecke der Messung war natürlich eine Kraft nötig, welche den Rhombus in eine bestimmte Lage zu bringen suchte. Es wurde zu diesem Zwecke an den Holzstab LM auch im Punkte S in der Entfernung von $98\frac{1}{2}$ mm von D ein Kokonfaden und vertikal unter demselben ein Gewicht von 10 g befestigt.

Das andere Ende des Kokonfadens wurde an einem horizontalen Stabe festgemacht, der um eine vertikale Achse drehbar war. Die Achse wurde außerdem noch mittels eines Senkels vertikal über die tiefste Stelle des Schälchens D gestellt. Das Gewicht sucht dann immer vertikal unter dem oberen Befestigungspunkt des Kokonfadens zu stehen und hält daher den Rhombus in einer bestimmten Lage mit einer bestimmten Kraft fest, welche Lage jedoch durch Drehung des Stabes, an dem der Kokonfaden festgemacht war, beliebig variiert werden konnte.

Es ist natürlich, daß dann der Winkel des Rhombus durch die elektrodynamischen Kräfte nur unbedeutend verändert wurde. Um diese Winkelveränderungen mit Genauigkeit messen zu können, war am Holzstabe LM im Punkte D ein kleiner Spiegel angebracht, auf den mittels eines Fernrohres visiert wurde. Der Spiegel war außerdem noch um eine vertikale Achse gegen den Holzstab drehbar. Der ganze Apparat befand sich, um gegen den Luftzug möglichst geschützt zu sein, in einem allseitig verschlossenen Kasten, der nur für den Spiegel ein mit einer planparallelen Glasplatte verschlossenes Loch hatte. Ich bemerke noch, daß der Draht AD direkt mittels einer Libelle, die übrigen Drähte aber durch Verschiebung der Gegengewichte auf den Holzstäben unter Vergleichung mit nahe anliegenden, mittels Libelle horizontal gestellten Stäben horizontal gemacht wurden.

II. Theorie der auf den Rhombus wirkenden Kräfte.

Ich will nun zur Berechnung der an diesem Apparat zu beobachtenden Erscheinungen übergehen.

Ich will zu diesem Zwecke die Länge einer Seite des

Rhombus $AB = l$ setzen (vgl. Fig. 3); ich nehme an, daß auf ein Längendifferential ds_1 der Seite AB , das sich in der Entfernung s_1 vom Punkte A befindet, infolge der elektrodynamischen Kräfte die Gesamtkraft $R_1 ds_1$, auf ein Längendifferential ds_2 der Seite BC die Gesamtkraft $R_2 ds_2$ und auf ein Längendifferential ds_3 der Seite CD in der Entfernung s_3 von D die Gesamtkraft $R_3 ds_3$ ausgeübt werde. Außerdem wirkt noch

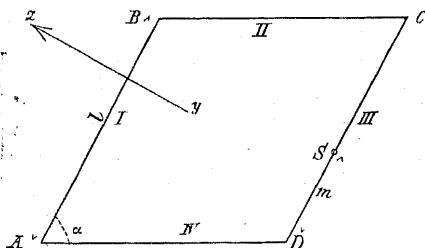


Fig. 3.

auf den Punkt S die horizontale Komponente Q des Zuges des dasselbst angehängten Gewichtes in einer Richtung senkrecht auf CD . Der Winkel der beiden Geraden AB und AD soll α heißen. Vergrößern wir denselben

um $\delta\alpha$, so soll das Element ds_1 die virtuelle Verschiebung δp_1 , das Element ds_2 die Verschiebung δp_2 , das Element ds_3 die Verschiebung δp_3 , endlich der Punkt S die Verschiebung δq erleiden. War der Winkel α eine Gleichgewichtslage, so muß die Gleichung bestehen:

$$\int_0^l P_1 ds_1 \delta p_1 + \int_0^l P_2 ds_2 \delta p_2 + \int_0^l P_3 ds_3 \delta p_3 + Q \delta q = 0,$$

worin mit P_1, P_2 und P_3 die Komponenten der Kräfte R_1, R_2 und R_3 in der Richtung der virtuellen Verschiebungen $\delta p_1, \delta p_2$ und δp_3 , also in einer Richtung senkrecht auf AB oder CD bezeichnet wurden. Dieselben, sowie die Kraft Q , sollen positiv gezählt werden, wenn sie die durch den Pfeil yz Fig. 3 dargestellte Richtung, negativ, wenn sie die entgegengesetzte Richtung haben.

Setzt man in diese Gleichung die Werte:

$$\delta p_1 = s_1 \delta \alpha, \quad \delta p_2 = l \delta \alpha, \quad \delta p_3 = s_3 \delta \alpha, \quad \delta q = m \delta \alpha$$

ein, wobei m die Länge des Stückes DS ist und dividiert durch $\delta \alpha$ weg, so ergibt sich:

$$(1) \quad \int_0^l P_1 s_1 ds_1 + l \int_0^l P_2 ds_2 + \int_0^l P_3 s_3 ds_3 + Q m = 0.$$

Die Kräfte $P_1 ds_1$, $P_2 ds_2$ und $P_3 ds_3$ bestehen aus zwei Teilen; der Komponente der Einwirkung des Erdmagnetismus $A_1 ds_1$, $A_2 ds_2$ und $A_3 ds_3$ in der Richtung yz , und der Komponente der Wirkung des Stromes auf das betreffende Stromelement in derselben Richtung.

Vom Erdmagnetismus wirkt auf ein horizontales Stromelement ds in horizontaler Richtung bloß die Vertikalkomponente, und zwar mit der Intensität $V i ds / \sqrt{2}$ gegen die Linke einer mit dem Gesichte nach abwärts im Strom schwimmenden Figur. In dieser Formel bedeutet V die Intensität der Vertikalkomponente, i die Stromintensität, gemessen in elektrodynamischem Maße. Diese Wirkung fällt, wenn der Strom von der Intensität i den Rhombus in der Richtung von West über Nord nach Ost durchfließt, für die Seite AB mit der Richtung yz zusammen. Man hat daher:

$$A_1 ds_1 = \frac{Vi}{\sqrt{2}} ds_1.$$

Für die Seite CD ist sie der Richtung yz entgegengesetzt, daher

$$A_3 ds_3 = -\frac{Vi}{\sqrt{2}} ds_3.$$

Für die Seite BC schließt sie mit yz den Winkel α ein; es wird also:

$$A_2 ds_2 = \frac{Vi}{\sqrt{2}} \cos \alpha ds_2.$$

Die Glieder, welche der Erdmagnetismus in die Gleichung (1) liefert, sind daher:

$$(2) \quad \frac{Vi}{\sqrt{2}} \int_0^l s_1 ds_1 + \frac{Vil \cos \alpha}{\sqrt{2}} \int_0^l ds_2 - \frac{Vi}{\sqrt{2}} \int_0^l s_3 ds_3 = \frac{Vi l^2 \cos \alpha}{\sqrt{2}}.$$

Um die Wirkung des Stromes auf sich selbst zu rechnen, will ich den Draht AB mit I , den Draht BC mit II , den Draht CD mit III und den Draht AD mit IV bezeichnen und die Glieder gesondert betrachten, welche die Wirkung eines jeden dieser Drähte auf jeden anderen liefert. Es seien zunächst in Fig. 4 LM und MN zwei im Punkte M zusammenstoßende Drähte, welche von einem Strome in der durch die

Pfeile angezeigten Richtung durchflossen werden und miteinander den Winkel β bilden. Die Abstoßung der Elemente ds

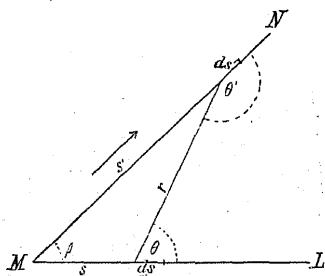


Fig. 4.

und ds' in den Entfernungen s und s' von M ist nach dem Ampèreschen Gesetze

$$p = \frac{i^2 ds ds'}{r^2} \left(\cos \beta + \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right);$$

darin ist:

$$r^2 = s^2 + s'^2 - 2 ss' \cos \beta$$

$$\cos \theta = \frac{s' \cos \beta - s}{r}; \quad \cos \theta' = \frac{s \cos \beta - s'}{r};$$

es ist daher:

$$p = \frac{i^2 ds ds'}{2r^4} \left(-s^2 \cos \beta - s'^2 \cos \beta + 3 ss' - s s' \cos^2 \beta \right).$$

Für die Wirkung des Drahtes IV auf I ist $\beta = \alpha$ zu setzen; die Komponente dieser Wirkung in der Richtung yz wird durch Multiplikation mit $s \sin \alpha / r$ gefunden und geht in die Formel (1) mit s' multipliziert ein. Die Wirkung des Drahtes IV auf I liefert daher in die genannte Formel:

$$B_{41} = \frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s s' (-s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}.$$

Für die Wirkung des Drahtes II auf I ist $\beta = 180 - \alpha$ zu setzen, s und s' sind jetzt die Distanzen der Stromelemente vom Punkte B . Dieselbe wird daher gleich:

$$\frac{i^2 ds ds' (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha)^2}.$$

Ihre Komponente in der Richtung yz wird wieder durch Multiplikation mit $s \sin \alpha / r$ gefunden. Multipliziert man zu-

dem noch mit dem Abstand des Elementes ds' von A , also mit $l-s'$, und integriert, so erhält man für den Ausdruck, welchen die Wirkung des Drahtes II auf I in die Gleichung (1) liefert

$$B_{21} = \frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{(l-s') s (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}.$$

Die Wirkung des Drahtes II auf III ist gerade so groß, wie die von IV auf I , aber sie ist entgegengesetzt gerichtet und mit $l-s'$ statt s' zu multiplizieren; sie liefert daher:

$$B_{23} = \frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{(l-s') s (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha - 3 s s' + s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}.$$

Die Wirkung des Drahtes IV auf III ist gleich und entgegengesetzt gerichtet der Wirkung von II auf I und mit s' statt $l-s'$ zu multiplizieren; liefert daher

$$B_{43} = - \frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s s' (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}.$$

Die Komponenten der auf die Bogendifferentiale des Drahtes II wirksamer Kräfte gehen in die Formel (1) mit l multipliziert ein. Sie sind gleich und entgegengesetzt bezeichnet mit den Komponenten der Wirkung des Drahtes II auf die übrigen Drähte. Es liefert daher die Wirkung des Drahtes I auf II :

$$B_{12} = - \frac{i^2 l \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}$$

und die Wirkung von III auf II :

$$B_{32} = \frac{i^2 l \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s' (-s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}.$$

Die Summe aller dieser Ausdrücke ist:

$$\begin{aligned} & B_{41} + B_{21} + B_{23} + B_{43} + B_{12} + B_{32} \\ &= i^2 \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s s' (-s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}} \\ &- i^2 \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s s' (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Es sind noch die Glieder zu bestimmen, welche die Wirkung je zweier untereinander paralleler Drähte liefert. Seien in Fig. 5 ds und ds' zwei Elemente der Drähte *I* und *III* in der

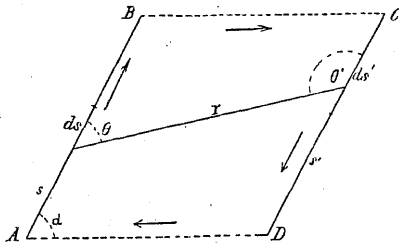


Fig. 5.

Entfernung s und s' von dem Punkte A und D , so ist nach dem Ampèreschen Gesetze ihre Abstoßung:

$$q = \frac{i^2 ds ds'}{r^2} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right),$$

wobei

$$\cos \theta = -\cos \theta' = \frac{l \cos \alpha + s' - s}{r}$$

$$r^2 = l^2 + (s' - s)^2 + 2l \cos \alpha (s' - s).$$

Nach Einsetzung dieser Werte erhält man:

$$q = \frac{i^2 ds ds'}{r^4} \left[r^2 - \frac{3}{2} (l \cos \alpha + s' - s)^2 \right].$$

Die Komponenten der Wirkung des Elementes ds' auf ds in der Richtung yz ergibt sich durch Multiplikation dieses Ausdruckes mit $\sin \theta = \frac{l \sin \alpha}{r}$, die der Wirkung des Elementes ds auf ds' durch Multiplikation mit $-\frac{l \sin \alpha}{r}$; erstere geht mit s , letztere mit s' multipliziert in die Gleichung (1) ein; es liefert daher die Wirkung des Drahtes *III* auf den Draht *I* in die genannte Formel:

$$B_{31} = i^2 l \sin \alpha \int_0^l s ds \int_0^l ds' \frac{r^2 - \frac{3}{2} (l \cos \alpha + s' - s)^2}{r^5}$$

und die Wirkung des Drahtes *I* auf *III* liefert:

$$B_{13} = i^2 l \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l s' ds' \frac{-r^2 + \frac{3}{2} (l \cos \alpha + s' - s)^2}{r^5}.$$

Die Abstoßung eines Elementes ds des Drahtes IV auf ein Element ds' des Drahtes II ist durch dieselbe Formel

$$q = \frac{i^2 ds ds'}{r^2} \left[r^2 - \frac{3}{2} (l \cos \alpha + s' - s)^2 \right]$$

gegeben, in der jetzt s den Abstand des Elementes ds von A , s' den des Elementes ds' von B bedeutet (Fig. 6).

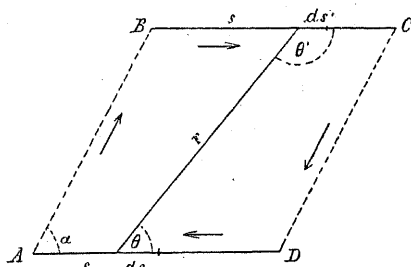


Fig. 6.

Von dieser Kraft ist die Komponente in der Richtung yz , also senkrecht auf AB zu nehmen. Bezeichnet θ den Winkel der Verbindungslinie r der Elemente ds und ds' mit AD , so ist diese Komponente

$$-q \sin(\alpha - \theta) = -\frac{q \sin \alpha (s' - s)}{r},$$

wegen

$$\cos \theta = \frac{l \cos \alpha + s' - s}{r}; \quad \sin \theta = \frac{l \sin \alpha}{r}.$$

Dieselbe ist noch mit l zu multiplizieren und zu integrieren und liefert daher in die Gleichung (1):

$$B_{42} = i^2 l \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' (s' - s) \frac{3/2 (l \cos \alpha + s' - s)^2 - r^2}{r^5}.$$

Die Summe aller Glieder, welche die Wirkung zweier paralleler Drähte in die Gleichung (1) liefert, ist daher:

$$\begin{aligned} & B_{31} + B_{13} + B_{42} \\ &= i^2 l \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' (s' - s) \frac{3 (l \cos \alpha + s' - s)^2 - 2 r^2}{r^5} \\ &= i^2 l \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{(s' - s) [(l \cos \alpha + s' - s)^2 - 2 l^2 \sin^2 \alpha]}{[(l \cos \alpha + s' - s)^2 + l^2 \sin^2 \alpha]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Die Integration liefert:

$$\int \int ds ds' \frac{s s' (-s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}} \\ = \frac{-s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + s s' (1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \sqrt{s^2 + s'^2 - 2 s s' \cos \alpha}}$$

daher, indem man das Zeichen von $\cos \alpha$ verwechselt:

$$\int \int ds ds' \frac{s s' (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 s s' - s s' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha)^{5/2}} \\ = \frac{s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + s s' (1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \sqrt{s^2 + s'^2 + 2 s s' \cos \alpha}}$$

Die Einsetzung der Grenzen Null und l , sowie Multiplikation mit $i^2 \sin \alpha$ liefert:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} B_{41} + B_{21} + B_{23} + B_{43} + B_{12} + B_{32} \\ = i^2 l \sin \alpha \left(\frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \end{array} \right.$$

Ferner findet man:

$$\int \int ds ds' \frac{[(l \cos \alpha + s' - s)^2 - 2 l^2 \sin^2 \alpha] (s' - s)}{[(l \cos \alpha + s' - s)^2 + l^2 \sin^2 \alpha]^{5/2}} \\ = \log(l \cos \alpha + s' - s + \sqrt{l^2 + (s' - s)^2 + 2 l \cos \alpha (s' - s)}) \\ - \frac{l \cos \alpha + s' - s}{\sqrt{l^2 + (s' - s)^2 + 2 l \cos \alpha (s' - s)}} \left(1 + \frac{(l \cos \alpha + s' - s) \cos \alpha}{l \sin^2 \alpha} \right).$$

Substituiert man in diesem Ausdrucke die Grenzen Null und l und multipliziert schließlich mit $i^2 \sin \alpha$, so erhält man:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} B_{31} + B_{13} + B_{42} \\ = i^2 l \sin \alpha \left[\log \frac{\cos \frac{\alpha}{2} (1 + \sin \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \frac{\alpha}{2})} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \end{array} \right.$$

Faßt man nun die unter (2) gegebenen vom Erdmagnetismus stammenden, ferner die unter (3) gegebenen von der Einwirkung der gegeneinander geneigten Drähte herrührenden, und endlich die unter (4) angeführten von der Wirkung der parallelen Drähte herstammenden Glieder zusammen, so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$\frac{V i l^2 \cos \alpha}{\sqrt{2}} + i^2 l \left[2 \operatorname{ctg} \alpha + \sin \alpha \log \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \right] + Q m = 0.$$

Da die Veränderungen der Gestalt des Rhombus durch den Strom nur geringe, die Länge der Kokonfäden aber eine ziemlich bedeutende war, so kann das von der Schwere herührende Moment $Q m$ proportional der durch den Strom hervorgerufenen Veränderung des Winkels α gesetzt werden. Nehmen wir daher an, dieser Winkel habe, bevor der Strom durchging, den Wert α_0 gehabt und sei durch die Einwirkung des Stromes um $\Delta \alpha = \alpha - \alpha_0$ gewachsen, so kann $Q m = -n \Delta \alpha$ gesetzt werden.

Das negative Zeichen ist zu wählen, weil durch ein Wachsen des Winkels α eine Kraft erweckt wird, welche denselben zu verkleinern strebt, also der Richtung yz entgegenwirkt. Setzt man noch:

$$\frac{V l^2}{\sqrt{2} n} = a, \quad \frac{2 l}{n} = b,$$

was für alle Versuche konstante Zahlen sind, so ergibt sich die Formel:

$$(5) \left\{ \Delta \alpha = a i \cos \alpha + b i^2 \left[\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{2} \log \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \right] \right\}.$$

III. Vergleichung der gefundenen Formel mit der Erfahrung.

Um die gefundene Formel experimentell zu prüfen, wurden dem Winkel α_0 des Rhombus, wenn kein Strom durch denselben ging, vier verschiedene Werte erteilt. Für jeden dieser Werte wurde bei drei für einen bei vier verschiedenen Stromstärken die Veränderung des Winkels $\Delta \alpha$ mittels der Spiegelablesung bestimmt, sowohl wenn der Strom von West über Nord nach Ost, als auch wenn er in der entgegengesetzten Richtung ging. Als Stromquelle dienten ein bis acht passend verbundene Grovesche Elemente.

Es zeigte sich bald, daß der Strom innerhalb der Dauer eines Versuches keineswegs als konstant betrachtet werden

konnte. Ich schaltete deshalb außer dem Rhombus noch ein in ziemlicher Entfernung befindliches Webersches Galvanometer in den Stromkreis ein, dessen Magnet jedoch nicht durch die dazu gehörigen Drahtrollen, die einen zu großen Widerstand gehabt hätten, sondern durch einen dicken, vom Strom durchflossenen Messingring abgelenkt wurde.

An demselben wurde jedesmal gleichzeitig mittels eines anderen Fernrohres die Stromstärke abgelesen. Die Genauigkeit, mit der die elektrodynamischen Kräfte am Rhombus gemessen werden konnten, steht freilich weit hinter der Genauigkeit zurück, welche bloß an Kokonfäden aufgehängte Magnetegewähren (wohl hauptsächlich wegen der Zähigkeit des angewendeten Quecksilbers). Namentlich war zu beachten, daß man die Schwingungen des Rhombus nicht durch passendes Öffnen und Schließen des Stromes rasch zur Ruhe bringen durfte. In diesem Falle zeigte sich die Ruhelage immer um einige Teilstriche im Sinne des früheren Ausschlages verschoben. Es blieb wahrscheinlich im Quecksilber noch eine kleine Deformation im Sinne des früheren Ausschlages zurück. Denn von einem Steckenbleiben kann um so weniger die Rede sein, da die Beweglichkeit des Rhombus so groß war, daß die wirkliche Ruhe des Spiegels gar nicht abgewartet werden konnte, sondern sein Stand aus mehreren Ausschlägen berechnet werden mußte. Wenn man dagegen die Schwingungen, statt sie zu dämpfen, jedesmal noch etwas verstärkte, so zeigte sich in den Ausschlägen sowie in der Ruhelage eine vollkommen befriedigende Konstanz.

Letztere wurde zur Vorsicht nach jeder Ablenkung separat abgelesen und zum Schluß das Mittel als wahre Ruhelage angenommen.

Folgendes waren z. B. die sukzessiven Ablesungen im Fernrohre, wenn kein Strom durch den Rhombus ging bei der ersten Beobachtungsreihe: $111\frac{1}{2}$, $110\frac{1}{2}$, 111, 113, 112, 111, $111\frac{1}{2}$, $112\frac{1}{2}$, 113, 111, 112, 112, 111, 111, $111\frac{1}{2}$.

Die Bestimmung des Winkels α_0 des Rhombus in seiner Ruhelage geschah durch Messung der Distanz zweier Punkte mittels des Stangenzirkels, welche auf den Drähten AB und AD in einer Distanz von 300 mm vom Punkte A markiert waren.

Damit hierbei die Schwingungen des Rhombus nicht hinderlich wären, wurde derselbe während dieser Messung jedesmal mittels einer in den Weg gestellten gabelartigen Vorrichtung arretiert; dabei erlitt allerdings der Winkel α_0 eine kleine Veränderung, allein aus der Zahl, welche jetzt im Fernrohre mit dem Fadenkreuze zusammenfiel und derjenigen, welche die wahre Ruhelage bildete, konnte unmittelbar auch der Winkel für die wahre Ruhelage berechnet werden. In der folgenden Tabelle sind die Ablesungen an dem mit dem Rhombus verbundenen Spiegel, sowie die jedesmaligen Stromstärken in Skalenteilen für die vier der Beobachtung unterzogenen Winkel zusammengestellt:

$\alpha_0 = 26^\circ 2'$		$\alpha_0 = 39^\circ 59'$		$\alpha_0 = 54^\circ 34'$		$\alpha_0 = 69^\circ 15'$	
Ab- lenkung	Strom- stärke	Ab- lenkung	Strom- stärke	Ab- lenkung	Strom- stärke	Ab- lenkung	Strom- stärke
-42	-134	-51	-124,5	-47 $\frac{1}{2}$	-120,2	105 ¹⁾	199,9
199	134,1	141	129	104	129,4	-34	-202,4
-42 $\frac{1}{2}$	-133,8	-53	-130,5	-48	-132,8	110 $\frac{1}{2}$	203,4
199	133,7	144	130,7	109	133,4	-33 $\frac{1}{2}$	-204
-5 $\frac{1}{2}$	-191,5	-49	-177,4	-48	-133,7	150	259,6
325 $\frac{1}{2}$	194	220	178,7	109	133,7	-27 $\frac{1}{2}$	-258,8
-4 $\frac{1}{2}$	-194,8	-50	-180,2	-51 $\frac{1}{2}$	-191,9	146	257,3
329	195,4	-48 $\frac{1}{2}$	-180,8	171 $\frac{1}{2}$	192,7	-29	-257
-5	-193	221 $\frac{1}{2}$	180	-49	-192,7	234 $\frac{1}{2}$	368
315	189,5	220	177,5	171	191	-1 $\frac{1}{2}$	-370,3
10	-215,9	-16	-255,5	-36	-254,5	-2	-372
369	212,9	350	252,3	248	254	231	365,7
6	-210,4	-19	-251	-36	-252,8	261	364,9
356 $\frac{1}{2}$	206	344	249,5	247	250,5	-4	-363
				384	355		
				10	-356,7		
				384	355,8		
				10	-352,9		

Die Ablenkungen in der Kolumne links sind positiv gezählt, wenn sich der Winkel α_0 vergrößerte, die Stromstärke ist positiv gezählt, wenn der Strom den Rhombus von West über Nord nach Ost durchfloß. Es erscheint zunächst wünschenswert jede Gruppe von Beobachtungen, welche nahezu bei

¹⁾ In Schlömilchs Journal steht hier 107. D. H.

gleicher Stromstärke gemacht wurden, auf genau gleiche Stromstärke zu reduzieren. Für jede Beobachtungsreihe ist das in Gleichung (5) auftretende α nur wenig von dem jedesmaligen α_0 verschieden. Setzt man daher letzteres für das erstere, so erhält man für den Ausschlag einen Ausdruck von der Form:

$$\Delta \alpha = A i + B i^2.$$

wobei

$$(6) \quad A = a \cos \alpha_0$$

$$B = b \operatorname{ctg} \alpha_0 + b \frac{\sin \alpha_0}{2} \log \frac{\cos \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha_0}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha_0}{2}\right)}$$

ist. Wechselt der Strom seine Richtung, so ändert das erste Glied $A i$ das Zeichen, $B i^2$ dagegen bleibt positiv; es wird also der neue Ausschlag, wenn man bloß die Größe, nicht das Zeichen von i berücksichtigt:

$$A' \alpha = -A i + B i^2.$$

Wenn die Stromintensität um eine kleine Größe δi ansteigt, so wächst der Ausschlag um:

$$(7) \quad A \delta i + B i \delta i,$$

wobei jedoch wieder das Zeichen von i berücksichtigt werden muß. Indem man diese Größe von dem bei der Stromintensität $i + \delta i$ abgelesenen Ausschlage abzieht, erhält man den Ausschlag, der durch die Stromintensität i hervorgerufen worden wäre. Dabei ist:

$$A = \frac{\Delta \alpha - A' \alpha}{2 i}, \quad B = \frac{\Delta \alpha - A' \alpha}{2 i^2}.$$

Wählt man für $\Delta \alpha$ und $A' \alpha$ aus jeder Gruppe von Beobachtungen, die bei nahezu gleicher Stromintensität gemacht wurden, diejenigen aus, bei denen der Strom möglichst konstant blieb, so erhält man für die 3 Gruppen der ersten Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 26^\circ 2'$.

$$A = 0,899, \quad 0,850, \quad 0,852$$

$$B = 0,00437, \quad 0,00426, \quad 0,00412;$$

ferner für die zweite Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 39^\circ 59'$.

$$A = 0,754, \quad 0,754, \quad 0,732$$

$$B = 0,00266, \quad 0,00264, \quad 0,00260$$

für $\alpha_0 = 54^\circ 34'$

$$A = 0,586, \quad 0,572, \quad 0,559, \quad 0,527$$

$$B = 0,00170, \quad 0,00165, \quad 0,00164, \quad 0,00156$$

endlich für $\alpha_0 = 69^\circ 15'$

$$A = 0,354, \quad 0,340, \quad 0,321$$

$$B = 0,000929, \quad 0,000883, \quad 0,000860.$$

Diese Werte können in die Formel (7) eingesetzt, und so die verschiedenen Ablenkungen auf gleiche Stromstärke reduziert werden. Die folgende Tabelle gibt die reduzierten Ablenkungen an; die Zahlen rechts sind die Stromstärken, auf welche die beobachteten Ablenkungen reduziert wurden.

$\alpha_0 = 26^\circ 2'$		$\alpha_0 = 39^\circ 59'$		$\alpha_0 = 54^\circ 34'$		$\alpha_0 = 69^\circ 15'$	
Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke
-42	134	-51,3	180	-49,2	133	107,3	208
198,8		142,4		107,7		-34	
-42,6		-53		-48		110,2	
199,6		143		108,6		-33,5	
-3,5		-48,5		-47,9		148,7	
325,5	194	222,2	180	108,3	192	-27,6	258
-5,1		-50		-51,5		146,6	
325,5		-48,7		170,7		-28,9	
-4,2		221,5		-49		236,4	
326,2		224,2		172,2		-1,6	
7,4	213	-19,1	250	-36,1	254	-2,6	370
369,2		345,3		248		235,1	
8,3		-19,6		-35,7		235,9	
374,7		345		251,9		-1,9	
				384			
		9	355				
		382,7					
				11,2			

Ein Blick auf die Werte der Konstanten A und B zeigt, daß dieselben mit wachsender Stromstärke abnehmen. Die Ursache hiervon liegt darin, daß wir in der Formel (5) α mit α_0 verwechselt haben, oder daß die elektrodynamische Kraft so berechnet wurde, als ob der Winkel des Rhombus nach der

Deformation derjenige gewesen wäre, den derselbe annimmt, wenn kein Strom hindurchgeht, während er doch in der Tat um $\Delta\alpha$ größer war. Es muß daher deswegen noch eine Korrektur an unsere Zahlen angebracht werden.

Wir können den Betrag dieser Korrektur berechnen, indem wir uns aus den gegenwärtigen Daten vorläufig angenäherte Werte der Konstanten a und b in Formel (5) verschaffen und diese Werte benutzen, um aus der Ablenkung für den Winkel $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ diejenige zu berechnen, welche durch dieselbe Stromstärke hervorgerufen worden wäre, wenn der ursprüngliche Winkel des Rhombus so gewählt worden wäre, daß er sich erst durch den Strom in α_0 verwandelt hätte.

Schreiben wir statt

$$\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{2} \log \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}$$

kurz $f(\alpha)$, so erhalten wir für den Ausschlag

$$\Delta\alpha = a i \cos \alpha + b i^2 f(\alpha).$$

Diese Größe wächst, wenn der Winkel α um $\Delta\alpha$ zunimmt, um

$$(8) \quad \left[a i \frac{d(\cos \alpha)}{d\alpha} + b i^2 \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right] \Delta\alpha.$$

Um daher die Ablenkung zu finden, die von demselben Strome hervorgebracht worden wäre, wenn der Winkel erst nach der Deformation α_0 gewesen wäre, haben wir diese Größe von der Ablenkung, bei der der Winkel nach der Deformation $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ war, abzuziehen.

Wenn $\Delta\alpha$ in Skalenteilen ausgedrückt ist, so bedeuten $d \cos \alpha / d\alpha$ und $df(\alpha) / d\alpha$ die Zuwächse von $\cos \alpha$ und $f(\alpha)$ für einen Ausschlag von einem Skalenteile. Nun wächst aber, wenn α um einen Grad zunimmt:

	für $\alpha = 26^\circ 2'$	für $\alpha = 39^\circ 59'$
cos α um:	- 0,00780,	- 0,01133,
$f(\alpha)$ um:	- 0,08684,	- 0,04317,
	für $\alpha = 54^\circ 34'$	für $\alpha = 69^\circ 15'$
cos α um:	- 0,01431,	- 0,01637,
$f(\alpha)$ um:	- 0,02967,	- 0,02433.

Es ist noch zu berechnen, um wieviel Grade sich der Winkel α bei einer Ablenkung von einem Teilstriche veränderte. Die Distanz des Spiegels von der Skala betrug 2318 mm.

Die Skalenteile hatten eine Distanz von 495/500 mm, es war daher die Winkelveränderung des Rhombus bei einer Ablenkung von einem Skalenteile:

$$\frac{495,180}{2,500,2318 \cdot \pi} = 0,012235 \text{ Grade.}$$

Multipliziert man mit dieser Zahl die Zuwächse von $\cos \alpha$ und $f(\alpha)$ für einen Grad, so erhält man als Zuwächse dieser Größen für eine Ablenkung von einem Skalenteile:

	für $\alpha = 26^\circ 2'$	für $\alpha = 39^\circ 59'$
$\frac{d \cos \alpha}{d \alpha} =$	- 0,00009541,	- 0,0001386,
$\frac{d f(\alpha)}{d \alpha} =$	- 0,001062,	- 0,0005281,
	für $\alpha = 54^\circ 34'$	für $\alpha = 69^\circ 15'$
$\frac{d \cos \alpha}{d \alpha} =$	- 0,0001751,	- 0,0002003,
$\frac{d f(\alpha)}{d \alpha} =$	- 0,0003640,	- 0,0002977.

Aus den Formeln (6) erhellt, daß wir a erhalten, indem wir A durch $\cos \alpha_0$, b , indem wir B durch $f(\alpha_0)$ dividieren. Es ergibt sich z. B. aus der 1. Beobachtungsgruppe $a = 1,0005$, $b = 0,00193$. Diese Werte sind wahrscheinlich etwas zu klein; ich will statt ihrer zum Zwecke der Korrektion in die Formel (8) die Werte $a = 1,045$, $b = 0,00206$ einsetzen; die korrigierten Ablenkungen werden dann genauere Werte der Konstanten a und b liefern, und dieselben können dann neuerdings in die Korrektionsformel eingesetzt werden. Würde sich zeigen, daß wir zufällig die genauen Werte der Konstanten a und b getroffen hätten, so wären wir natürlich dieser neuen Mühe überhoben. Wir kommen daher zu dem Resultate, daß man zu jeder Ablenkung die Größe der Ablenkung in Skalenteilen multipliziert mit folgenden Faktoren zu addieren hat:

für $\alpha = 26^\circ 2'$	mit $0,0000997 i + 0,000002181 i^2$,
für $\alpha = 39^\circ 59'$	mit $0,0001448 i + 0,000001085 i^2$,
für $\alpha = 54^\circ 34'$	mit $0,0001830 i + 0,000000748 i^2$,
für $\alpha = 69^\circ 15'$	mit $0,0002093 i + 0,000000611 i^2$.

Führt man diese Korrektion aus, so erhält man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte:

$\alpha_0 = 26^\circ 2'$		$\alpha_0 = 39^\circ 59'$		$\alpha_0 = 54^\circ 34'$		$\alpha_0 = 69^\circ 15'$	
Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke
-43	134	-51,3	130	-48,7	133	114,4	208
209,2		147,6		111,5		-33,4	
-43,6		-53		-47,5		117,6	
210		148,3		112,6		-32,9	
-3,8	194	-48,9	180	-47,4	192	162,9	258
358,4		235,6		112,3		-27,2	
-5,4		-50,5		-51,1		160,3	
358,7		-49,2		181,4		-28,5	
-4,5	213	235	250	-48,7	254	274,1	370
358		237,7		182,8		-1,6	
6,6		-19,6		-36,2		-2,6	
413,6		381,7		271,3		272,3	
7,8	194	-20,2	180	-35,8	192	273,1	208
417,4		380,8		275,1		-1,9	
				444,9			
				8,7			
				443,6	355		
				10,9			

Diese Ablenkungen sind nunmehr auf denselben Winkel α_0 reduziert; man erhält daher, wenn man je zwei Ablenkungen bei entgegengesetzter Stromstärke subtrahiert und durch $2i$ dividiert, die Größe $a \cos \alpha_0$; wenn man sie addiert und durch $2i^2$ dividiert, die Größe $b f(\alpha_0)$. Nimmt man jedesmal von allen bei gleicher Stromstärke und Stromrichtung gemachten Beobachtungen das Mittel, so ergibt sich auf diese Weise für die 1. Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 26^\circ 2'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0,9444, \quad 0,9356, \quad 0,9585,$$

$$b f(\alpha_0) = 0,0046363, \quad 0,0047003, \quad 0,0046585;$$

ferner für die 2. Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 39^\circ 59'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0,7696, \quad 0,7933, \quad 0,8020,$$

$$b f(\alpha_0) = 0,0028373, \quad 0,0028796, \quad 0,0028896;$$

für $\alpha_0 = 54^\circ 34'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0,6015, \quad 0,6042, \quad 0,6087, \quad 0,6118,$$

$$b f(\alpha_0) = 0,0018147, \quad 0,0017931, \quad 0,0018383, \quad 0,0018012;$$

endlich für $\alpha_0 = 69^\circ 15'$:

$$\begin{aligned} a \cos \alpha_0 &= 0,36749, & 0,36725, & 0,37189, \\ b f(\alpha_0) &= 0,0010046, & 0,0010043, & 0,0009905. \end{aligned}$$

Nun findet man aber:

$$\begin{aligned} &\text{für } \alpha_0 = 26^\circ 2' && \text{für } \alpha_0 = 39^\circ 59' \\ \cos \alpha_0 &= 0,89539, && 0,766231, \\ f(\alpha_0) &= 2,26393, && 1,39883; \\ &\text{für } \alpha_0 = 54^\circ 34' && \text{für } \alpha_0 = 69^\circ 15' \\ \cos \alpha_0 &= 0,579755, && 0,354291, \\ f(\alpha_0) &= 0,87583, && 0,48159. \end{aligned}$$

Dividiert man die obigen Zahlen durch diese Werte, so ergibt sich als Wert der Konstanten a

für die 1. Beobachtungsreihe:

$$1,051, 1,041, 1,067, \text{ im Mittel } 1,053,$$

für die 2. Beobachtungsreihe:

$$1,004, 1,035, 1,047, \text{ im Mittel } 1,029,$$

für die 3. Beobachtungsreihe:

$$1,037, 1,042, 1,050, 1,055, \text{ im Mittel } 1,046,$$

für die 4. Beobachtungsreihe:

$$1,037, 1,038, 1,049, \text{ im Mittel } 1,041.$$

Als Wert der Konstanten b aber ergibt sich

für die 1. Beobachtungsreihe:

$$0,002048, 0,002076, 0,002058, \text{ im Mittel } 0,002061,$$

für die 2. Beobachtungsreihe:

$$0,002028, 0,002059, 0,002066, \text{ im Mittel } 0,002051,$$

für die 3. Beobachtungsreihe:

$$0,002072, 0,002047, 0,002099, 0,002057, \text{ im Mittel } 0,002069,$$

für die 4. Beobachtungsreihe:

$$0,002086, 0,002085, 0,002057, \text{ im Mittel } 0,002076.$$

Die Abweichungen dieser verschiedenen Werte der Konstanten a und b sind nicht größer, als es nach den unvermeidlichen Fehlerquellen des Apparates zu erwarten war. Sie

stimmen zugleich mit den in der Korrekursionsformel angewandten Konstanten überein, was eine weitere Korrektion überflüssig macht. Die Mittelwerte bei den einzelnen Beobachtungsreihen werden noch etwas konstanter, wenn man die 1. Beobachtung der 2. Beobachtungsreihe, welche sich offenbar etwas anormal verhält, ausschließt; man erhält dann folgende Werte der Konstanten:

<i>a</i>	<i>b</i>
1,053,	0,002061,
1,041,	0,002062,
1,046,	0,002069,
1,041,	0,002076.

Es kann daher wenigstens innerhalb der Grenzen der Fehler, welche der gebrauchte Apparat notwendig mit sich führt, als nachgewiesen betrachtet werden, daß auch die Totalwirkung des Stromes, welcher einen Rhombus mit veränderlichem Winkel durchfließt, auf sich selbst als zusammengesetzt betrachtet werden kann, aus der Wirkung aller seiner Stromelemente aufeinander, von denen je zwei nach dem Ampèreschen Gesetz aufeinander wirken.

Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. R. Most: Ein neuer Beweis des zweiten Wärmegesetzes.

(Pogg. Ann. 137. S. 495. 1869.)

In der erwähnten Abhandlung stellt Most das Differential der einem Körper zugeführten Wärmemenge dQ als ein Flächenelement $CEFD$ (siehe Fig. 1), nämlich als Produkt einer Ordinate DC und eines Abszissendifferentials DF dar. Als Ordinate wählt er die jedesmalige absolute Temperatur T

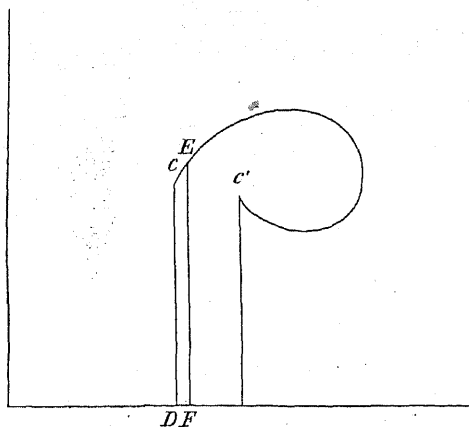


Fig. 1.

des Körpers; als Abszissendifferential muß er daher, damit das Flächenelement gleich der zugeführten Wärmemenge dQ werde, die Größe dQ/T , also als Abszisse $\int dQ/T$ auftragen. Daß er dQ/T als das Volumen eines bestimmten idealen Gases definiert, welches durch die Wärmemenge dQ vom absoluten Nullpunkt bis zur Temperatur T bei konstantem Volumen erwärmt werden kann, ist offenbar nicht wesentlich. Wenn der Körper einen vollständigen Kreisprozeß durchmacht,

so beschreibt der Endpunkt C der Ordinate im allgemeinen irgend eine Kurve CC' . Da der Körper zum Schlusse des Kreisprozesses wieder dieselbe Temperatur und dasselbe Volumen, wie zu Anfang besitzen muß, so muß die Ordinate des Endpunktes C' der Kurve so groß, wie die ihres Anfangspunktes sein. Ob auch die Abszissen beider Punkte gleich sein werden, hängt offenbar davon ab, ob das Differential dQ/T der als Abszisse aufgetragenen Größe ein vollständiges Differential ist oder nicht. Indem Most voraussetzt, daß die Kurve CC' eine in sich geschlossene ist, hat er also bereits die Annahme gemacht, daß dQ/T ein vollständiges Differential sei. Der Beweis des zweiten Hauptsatzes aus dieser Annahme wurde ihm natürlich nicht schwer.

Erwiderung an Hrn. Most.

(Pogg. Ann. 140. S. 635—644. 1870.)

Hr. Most wirft mir zuerst vor, ich hätte die Fälle, in denen dg/dx oder dg/dy singuläre Werte haben, nicht berücksichtigt. Es wäre dies jedenfalls nur eine Ungenauigkeit der Stilisierung, die die Richtigkeit meiner Einwürfe nicht im mindesten alteriert. Denn dieselben bleiben vollkommen aufrecht, wenn man in meinem Aufsätze nach den Worten: „Indem Hr. Most voraussetzt, daß die Kurve CC' eine in sich geschlossene sei, hat er also bereits die Annahme gemacht, dQ/T sei ein vollständiges Differential“ noch beifügt: „einer eindeutigen Funktion der den Zustand des Körpers bestimmenden Variabeln“. In der Tat involviert ja die Annahme, daß jeder Kreisprozeß durch eine geschlossene Kurve repräsentiert sei, nicht bloß die Voraussetzung, daß die als Abszissendifferential aufgetragene Größe dQ/T ein vollständiges Differential, sondern auch, daß sie das vollständige Differential einer eindeutigen Funktion des Zustandes des Körpers sei. Da sich nun der Leser diesen Zusatz leicht selbst ergänzt, so wäre es bei der Kürze meiner Note wohl zu entschuldigen gewesen, daß ich von den Ausnahmefällen, wo Diskontinuitäten und Mehrdeutigkeiten eintreten, absah. Zum Überflusse ist jedoch der Fall, den Hr. Most des weitläufigen diskutiert, und dessen Nichtberücksichtigung er mir hauptsächlich zum Vorwurfe macht, aus physikalischen Gründen gar nicht möglich; nämlich, daß das Integrale $\int dQ/T$ über gewisse um die die Punkte $a, b, c \dots$ beschriebene unendlich kleine Schlußkurven genommen, von Null verschieden ausfällt. Jede beliebige unendlich kleine Kurve stellt uns ja eine unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers dar. Nun ist aber leicht einzusehen, daß, wenn das Integrale $\int dQ/T$, über eine unendlich kleine Kurve genommen, einen endlichen Wert besitzen

soll, jedenfalls auch das Integrale $\int dQ$, über gewisse Teile jener unendlich kleinen Kurve erstreckt, endlich sein müßte, daß also zu einer unendlich kleinen Zustandsänderung des Körpers, d. h. zu einer solchen, wobei sich beide den Zustand des Körpers bestimmenden Variablen nur unendlich wenig ändern, eine endliche Wärmezufuhr gehören müßte. Dies ist aber durchaus undenkbar. Besonders anschaulich wird hierfür der Beweis, wenn man die Temperatur T und das Volum v als Koordinaten wählt. Da die Kurve, über welche integriert wird, unendlich klein sein soll, so ändert sich T im Verlauf der ganzen Integration unendlich wenig; es kann daher der Faktor $1/T$ vor das Integralzeichen geschrieben und

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ$$

gesetzt werden. Damit also das erstere Integral endlich wäre, müßte $\int dQ$, über dieselbe Kurve integriert, endlich ausfallen. (Der Fall $T=0$ kommt nicht in Betracht, da kein Körper auf den absoluten Nullpunkt abgekühlt werden kann.) Nun ist aber $dQ = dJ + A p dv$, daher, weil die Kurve geschlossen sein soll: $\int dQ = A \int p dv$. Es müßte also $\int p dv$ endlich sein. Dies ist aber unmöglich; denn bezeichnet P den größten Wert, welchen p innerhalb der Integrationsgrenzen annimmt, und ist ebenso V der größte, ω der kleinste Wert von v innerhalb der Integrationsgrenzen, so ist der absolute Wert von $\int p dv$, wenn der betreffende Punkt einmal umkreist wird, jedenfalls kleiner als $P(V - \omega)$, daher unendlich klein, weil wegen der verschwindenden Kleinheit der Integrationskurve $V - \omega$ unendlich klein ist. Somit wäre der erste Einwand des Hrn. Most erledigt, der ohnedies nicht bestimmt war, meinen Einwurf gegen seinen Beweis des zweiten Hauptsatzes zu entkräften, sondern der lediglich, und wie mir scheint nicht einmal in glücklicher Weise, die Stilisierung desselben tadelte. Mein Einwurf ging ja dahin, daß Hr. Most in dem Satze: „Soll nun bei irgend einem Wärmevergange ein Kreisprozeß eintreten, d. h. sollen in stetiger Folge dieselben Zuleitungen und später dieselben Ableitungen von Wärme eintreten, so muß die Kurve zu dem Punkte C zurückkehren, d. h. eine geschlossene sein“ (Pogg. Ann. 136. S. 141) bereits den zweiten Hauptsatz

in seinem ganzen Umfange vorausgesetzt habe. Denn es ist selbstverständlich, daß, wenn man als Abszisse oder Ordinate Größen aufträgt, welche nur vom augenblicklichen Zustande des Körpers, nicht aber von der Art und Weise, wie er in denselben gelangte, abhängen (wie z. B. die Temperatur, den Druck oder das Volum), die Kurve, welche uns einen Kreisprozeß darstellt, in sich geschlossen ist. Trägt man aber, wie es Hr. Most machte, auf eine der Koordinatenachsen $\int dQ/T$ auf, so hört dies auf selbstverständlich zu sein. Mit demselben Rechte könnte man ja auch $\int dQ$, $\int dQ/T^2$ oder überhaupt $\int dQ f(T, v)$ auftragen. Daß von allen diesen Ausdrücken nur der eine $\int dQ/T$ für jeden umkehrbaren Kreisprozeß eine geschlossene Kurve liefert, während sich in allen anderen Fällen die Kreisprozesse als nicht in sich zurückkehrende Linien darstellen würden, kann nur aus dem zweiten Hauptsatze selbst wieder bewiesen werden, dessen Gültigkeit also der zitierte Passus bereits voraussetzt. Hiermit ist wohl die Behauptung des Hrn. Most „das zweite Wärmegesetz sei eine theoretische allgemeine Folgerung aus der Auffassung der Wärme als Größe zweier Dimensionen“ (soll heißen als das Produkt $T \cdot dQ/T$) widerlegt. In seiner gegenwärtigen Abhandlung paraphrasiert nun Hr. Most seinen Beweis in ziemlich weitläufiger Weise, aber ohne dadurch die in die Augen springende *petitio principii* verdecken zu können.

Tragen wir wieder auf die Abszissenachse etwa das Volumen v , auf die Ordinatenachse den Druck p auf. Es sollen dem Körper der Reihe nach die unendlich kleinen Wärmemengen $q_1, q_2 \dots q_{n-1}, q_n$ zugeführt werden, so daß sich sein Zustand in der durch die Kurve ABC (Fig. 1) dargestellten Weise verändert. Wenn nun dem Körper wieder unter genau denselben Verhältnissen, aber in umgekehrter Ordnung die Wärmemengen $q_n, q_{n-1} \dots q_2, q_1$ entzogen werden, so daß er wieder den Weg CBA zurück beschreibt, so ist klar, daß er zum Schlusse wieder in den ursprünglichen Zustand

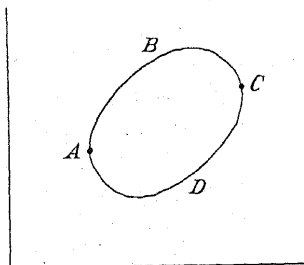


Fig. 1.

zurückkehrt und daß die ihm im ganzen entzogene Wärmemenge gleich ist der zugeführten. Dies findet aber nicht mehr statt, wenn der Körper auf einem anderen Wege wieder in den alten Zustand zurückgeführt wird, z. B. auf dem Wege $CD A$. Die Wärmemenge $q_1' + q_2' + q_3' \dots$, die ihm im ganzen hierbei entzogen werden muß, ist im allgemeinen nicht gleich der früher zugeführten, daher $\sum q$ mit Berücksichtigung des Zeichens für den ganzen Kreisprozeß nicht gleich Null. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man sämtliche q mit was immer für einer Funktion der zugehörigen Temperatur und des zugehörigen Volumens $f(T, v)$ multipliziert. Es wird wieder im allgemeinen nicht $q_1 f(T_1, v_1) + q_2 f(T_2, v_2) \dots$ gleich $q_1' f(T_1', v_1') + q_2' f(T_2', v_2') \dots$, daher auch nicht $\sum q \cdot f(T, v) = 0$ sein. Setze ich daher $q f(T, v) = m$, so ist im allgemeinen nicht $m_1 + m_2 \dots = m_1' + m_2' \dots$ oder $\sum m = 0$. Daran wird natürlich gar nichts geändert, wenn ich m in zwei Teile μ und ν zerlege, von denen μ gleich ist der zur Temperaturerhöhung verwendeten Wärme multipliziert mit $f(T, v)$, und ν gleich der zur Arbeitsleistung verwendeten Wärme multipliziert mit $f(T, v)$. Man kann sich daher die Sache auch nicht so vorstellen, als ob auf dem Wege ABC die Massen $m_1 + m_2 \dots$ in den Körper eingetreten und auf dem Wege $CD A$ die Massen $m_1' + m_2' \dots$ aus demselben wieder ausgetreten wären, weil ja die Summe der eingetretenen Massen nicht gleich der Summe der ausgetretenen wäre und sich der Körper zum Schlusse doch im selben Zustande wie zu Anfang befindet. Nun¹⁾ wenn man für $f(T, v)$ den Ausdruck $1/T$ wählt, folgt aus dem zweiten Hauptsatze, daß für jeden umkehrbaren Kreisprozeß $m_1 + m_2 \dots = m_1' + m_2' \dots$ daher $\sum m = 0$ ist. Jetzt kann man sich also die Sache, falls man will, so vorstellen, als ob $m_1, m_2 \dots$ gewisse in den Körper eintretende, $m_1', m_2' \dots$ aus dem Körper austretende Massen wären. Die Richtigkeit dieser Vorstellungsweise kann also aus dem zweiten Hauptsatze bewiesen werden, nicht aber umgekehrt. Ich wüßte in der Tat nicht, wo in der ganzen Deduktion Mosts ein Beweis

¹⁾ Um Hrn. Most die Mühe neuer Angriffe, die nicht zur Sache gehören, zu ersparen, bemerke ich, daß es mir bekannt ist, daß auch jede Funktion von $\int dQ/T$ dividiert durch T integrierender Faktor ist.

enthalten wäre, daß gerade für $f(T, v) = 1/T$ die Summe $\sum q f(T, v)$ verschwinde. Denn darin wird doch niemand einen Beweis erblicken wollen, daß er q/T erst als eine gewisse Menge absoluten Gases definiert, jetzt aber als Wärmemasse und T als ihren Bewegungszustand bezeichnet, was offenbar nur symbolisch zu verstehen ist. Denn daran denkt gewiß auch Hr. Most nicht, daß, wenn einem Körper Wärme zugeführt wird, wirklich eine gewisse Masse mit einem gewissen Bewegungszustande in denselben eintritt, und daß, wenn ihm dieselbe Wärmemenge bei einer höheren Temperatur zugeführt wird, wirklich eine kleinere Masse mit einem größeren Bewegungszustande in denselben eintrete. Bei bloß fiktiven Dingen aber, wie Mosts Wärmemassen, ist der Schluß nicht erlaubt, daß, wenn der Körper in denselben Zustand zurückkehren soll, in der einen Hälfte des Prozesses ebenso viele eintreten müssen, als in der zweiten Hälfte unter veränderten Umständen austreten. Man könnte für die Anschauungsweise Mosts etwa noch folgendes anführen. Die Wärme Q ist eine lebendige Kraft, daher von der Dimension einer Masse multipliziert mit einem Geschwindigkeitsquadrat, die Temperatur T ist von der Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats, daher ist Wärme eine Masse multipliziert mit einer Temperatur. Allein abgesehen davon, daß die zweite Behauptung bezüglich der Dimension von T wahrscheinlich nicht einmal richtig ist, wäre damit doch nur bewiesen, daß Q von der Dimension mT ist, aber sicher nicht, daß bei Zufuhr der Wärme Q wirklich die Masse Q/T mit dem Bewegungszustande T in den Körper eintritt. Und nur wenn buchstäblich Massen ein- und austreten würden, könnte man daraus, daß der Körper in denselben Zustand zurückgekehrt ist, schließen, daß ebenso viele ein- als ausgetreten sein müssen. Dann müßte aber auch $\sum m = 0$ sein, für den nicht umkehrbaren Kreisprozeß, so gut wie für den umkehrbaren. In der Tat ist mir, was Hr. Most von den nicht umkehrbaren Vorgängen behauptet, daß bei ihnen „ein Teil der positiven Wärme nicht zugeleitet, sondern durch Arbeit hervorgerufen“ sei, völlig unverständlich. Denn auch bei jedem umkehrbaren Kreisprozesse wird doch Wärme durch Arbeit hervorgerufen, sobald nur irgend eine Volumverminderung unter einem gewissen Drucke statthat, während gerade der

direkte Übergang der Wärme von einem heißeren zu einem kälteren Körper immer ein nicht umkehrbarer Vorgang ist, ohne daß dabei Arbeit ins Spiel käme. Nur noch ein Beispiel. Wir hätten zwei durch eine Scheidewand getrennte Gefäße, eins mit einem absoluten Gase gefüllt, das andere leer. Wir entfernen plötzlich die Scheidewand, ohne dem Gase Wärme zuzuführen. Dasselbe vergrößert dann sein Volumen ohne Temperaturveränderung, indem es auch das zweite Gefäß erfüllt. Es treten also nach der Anschauungsweise Mosts weder Wärmemassen in dasselbe ein, noch aus ihm aus. Nun komprimieren wir es wieder langsam auf sein ursprüngliches Volumen und erhalten dabei seine Temperatur durch beständige Wärmeentziehung konstant. Dann ist dem Gase während des letzten Vorgangs Wärme entzogen worden; es sind also nach Mosts Vorstellung Wärmemassen aus demselben ausgetreten. Während des ganzen Vorgangs sind also Wärmemassen ausgetreten, ohne daß welche eingetreten wären, und trotzdem hat das Gas denselben Zustand, wie anfangs und trotzdem ließe sich auch dieser Vorgang in einer unbegrenzten Reihe von Turnen wiederholen, von denen jeder folgende den ersten gliche, womit denn doch der als Grundlage seines ganzen Beweises dienende Schluß Mosts, bündig widerlegt sein dürfte, daß sich der Körper nur dann zum Schlusse wieder in demselben Zu-

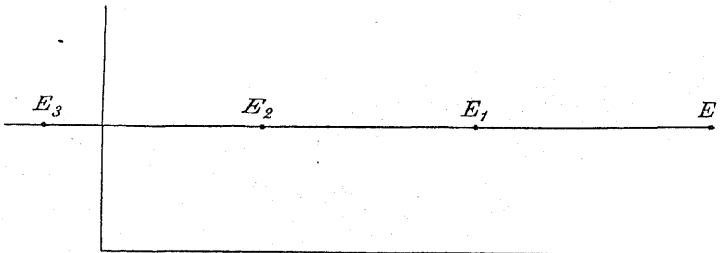


Fig. 2.

stande befinden könne, wie anfangs, wenn die Summe der eingetretenen gleich der Summe der ausgetretenen Wärmemassen ist, was uns übrigens, da ja die Wärmemassen keine wirklichen Massen sind, gar nicht wundernehmen kann. Wir können uns, wie es Most bei umkehrbaren Kreisprozessen macht, einen Punkt verzeichnen, dessen Ordinate die jedes-

malige Temperatur des Körpers ist, dessen Abszisse aber bei jeder Zustandsänderung des Körpers um dQ/T wächst. Derselbe bleibt während des ersten Teiles des Vorgangs in Ruhe und beschreibt während des zweiten eine Gerade EE_1 (Fig. 2), bei periodischer Wiederholung des Prozesses aber eine Reihe

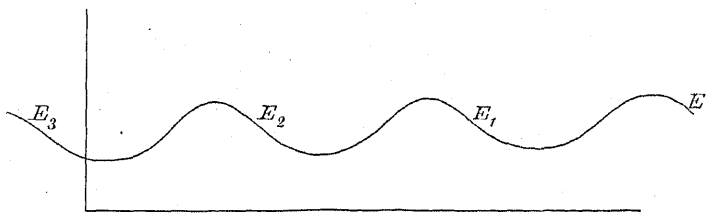


Fig. 3.

von Geraden EE_1 , E_1E_2 , $E_2E_3 \dots$. Natürlich könnte man dieselben auch durch kleine Temperaturveränderungen in geschlungene Kurven (Fig. 3) oder auch (Fig. 4) in solche verwandeln, die genau so aussehen, wie die von Hrn. Most in

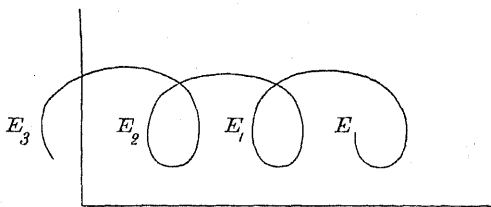


Fig. 4.

Pogg. Ann. 138. Taf. V, Fig. 24, gezeichnete. Es treffen hier alle Prämissen zu, aus denen Hr. Most schließen zu können glaubt, daß die Kurve eine geschlossene sei, und doch ist sie es nicht. Also weder daraus, daß der Körper zum Schlusse wieder denselben Zustand, wie anfangs hat, noch aus der Idee des Kreisprozesses, in welchem nach einer gewissen Zeit dieselben Zustände periodisch wiederkehren, folgt, daß die Kurve in sich zurückkehre, sondern einzig aus dem zweiten Hauptsatze. Man darf daher auch nicht *a priori* behaupten, daß der Körper, wenn T und $\int dQ/T$ in der in Fig. 4 dargestellten Weise variieren, in E_1 nicht im selben Zustande wie in E sein könne. Der neue Beweis Mosts enthält also wieder die

alte *petitio principii*; wie früher daraus, daß er dQ/T als Abszissendifferential aufträgt, so folgert er jetzt daraus, daß er diesem Differential den Namen Wärmemasse gibt, daß es, über eine geschlossene Kurve integriert, Null liefern müsse. Ich begreife überhaupt nicht, wie jemand, nur um nicht gestehen zu müssen, er habe in einem speziellen Falle geirrt, zu solchen Weitschweifigkeiten seine Zuflucht nehmen mag.

Um ja nicht mißverstanden zu werden, wiederhole ich nochmals: Die Berechtigung der Anschauungsweise Mosts läßt sich aus dem zweiten Hauptsatze folgern; es ergibt sich aus demselben, daß man sich die Zuführung der Wärmemenge dQ bei der Temperatur T so vorstellen kann, als ob eine Masse dQ/T mit dem Bewegungszustand T in den Körper eintrete; der Zufuhr derselben Wärmemenge bei höherer Temperatur entspricht dann der Eintritt einer kleineren Masse mit einem größeren Bewegungszustande. Insofern nämlich ist diese Vorstellungsweise erlaubt, als dann für jeden umkehrbaren Kreisprozeß die Summe der eingetretenen Massen gleich der Summe der ausgetretenen ist, während die zugeführte Wärmemenge im allgemeinen nicht gleich der entzogenen ist, was aber wohl eigentlich gar nichts Neues besagt. Nicht aber läßt sich umgekehrt aus der Anschauungsweise Mosts, deren Berechtigung sonst ganz unerwiesen und welche für nicht umkehrbare Kreisprozesse falsch ist, der zweite Hauptsatz ableiten, zu dessen Begründung ganz andere Prämissen erforderlich sind. Bekanntlich folgt erst aus dem Clausiusschen Postulate, daß man nicht ohne Ende Wärme in Arbeit verwandeln kann, daß der integrierende Faktor von dQ eine für alle Körper gleiche Funktion der Temperatur ist, zu deren Bestimmung dann die Eigenschaften idealer Gase dienen müssen. Wäre daher der Beweis aus so einfachen Prämissen wie sie Hr. Most zu Hilfe nimmt, möglich, so würden die Bemühungen der übrigen Physiker, ihn aus gewissen Axiomen abzuleiten, geradezu lächerlich erscheinen.

Es erübrigt noch die Frage, ob die Mostsche Vorstellungsweise von den Wärmemassen besonders anschaulich, das Koordinatensystem Mosts mit T als Ordinate und $\int dQ/T$ als Abszisse besonders zweckmäßig sei. Nun darüber läßt sich natürlich nicht streiten. Was der eine besonders anschaulich

findet, kommt wieder dem anderen verwirrt vor. Nur scheint mir die Tatsache nicht für die Anschaulichkeit der Mostschen Auffassungsweise zu sprechen, daß sie den Urheber selbst zu dem Fehlschlusse verleite, es sei darin ein Beweis des zweiten Hauptsatzes enthalten, ihn aber doch wieder so weit im Unklaren ließ, daß er in der ersten Abhandlung selbst fürchtet, die Strenge des Beweises zu hoch angeschlagen zu haben.

Über die von bewegten Gasmassen geleistete Arbeit.

(Pogg. Ann. 140. S. 254—263. 1870.)

Herr Dr. Kurz macht zu Kohlrauschs schönem Versuche über die Relation der Wärmekapazitäten der Luft die Bemerkung, daß in demselben die im Pumpenstiefel eingeschlossene Luft keine Arbeit leiste, sondern sich eher in der Lage eines in den luftleeren Raum ausströmenden Gases befinde. Da nun eine Überlegung, die ich bereits vor geraumer Zeit angestellt habe und die wenigstens allen hauptsächlichsten hierbei in Betracht kommenden Umständen Rechnung tragen dürfte, ganz das entgegengesetzte Resultat liefert, so wird deren Veröffentlichung wohl zur Richtigstellung der hierher gehörigen Begriffe beitragen. Es wäre zunächst offenbar ein grober Irrtum anzunehmen, daß die im Pumpenstiefel befindliche Luft bloß dann Arbeit leiste, wenn sie auch den Überdruck liefert, welcher den Kolben in Bewegung setzt. Diesen Überdruck übt in Kohlrauschs Versuch allerdings die Hand aus; allein dieselbe leistet doch nur einen kleinen Teil der zur Hebung des Kolbens und Überwindung des äußeren Luftdruckes erforderlichen Arbeit, während die Hauptmasse dieser Arbeit von dem Druck der inneren Luft geliefert wird. Das im Pumpenstiefel befindliche Gas würde nur dann keine Arbeit leisten, wenn unter dem Kolben ein vollkommen luftleerer Raum entstände, in welchem Falle es dieselbe Arbeit kosten müßte, den Kolben zu heben, ob sich unter demselben Luft befindet oder nicht, was bekanntermaßen nicht zutrifft. Um die Arbeit der im Pumpenstiefel und Rezipienten befindlichen Luftmasse zu finden, brauchen wir bloß zu wissen, unter welchem Drucke die oberste Schicht derselben in jedem Augenblick steht. Auf die ganze Luftmasse im Pumpenstiefel und Rezipienten wollen wir dann den ersten Hauptsatz der

mechanischen Wärmetheorie oder das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft anwenden. Dieselbe war zu Anfang in Ruhe; sie ist zu Ende, nachdem die etwaigen Strömungen in derselben aufgehört haben, wieder in Ruhe. Alle anderen auf dieselbe wirksamen Kräfte mit Ausnahme der auf seine Oberfläche wirksamen Druckkräfte können vernachlässigt werden. Von demselben leistet nur die auf die oberste Schicht wirksame Druckkraft Arbeit. Die von dieser Druckkraft geleistete Arbeit muß daher von der im Gase enthaltenen Wärme geliefert worden sein, das Gas muß einen äquivalenten Wärmeverlust erlitten haben. Wollten wir die Bewegung des Kolbens berechnen, so müßten wir natürlich auch den von außen auf denselben wirkenden Luftdruck, sowie den Zug der Hand kennen; für die Arbeit des Gases im Pumpenstiefel aber ist nur der Druck, unter dem die oberste Schicht desselben steht, maßgebend. Um über denselben ein Urteil zu fällen, wollen wir an Stelle des mit dem Rezipienten in Verbindung stehenden Stiefels eine einfachere dem Kalküle zugängliche Vorrichtung setzen. Wir betrachten nämlich die Bewegungszustände eines in einem zylindrischen Gefäße eingeschlossenen Gases, dessen Endflächen zur Achse des Zylinders senkrechte Ebenen sind, von denen die obere (der Kolben) irgend eine Bewegung ausführt. Der Weg, welchen diejenige zur Zylinderachse senkrechte Gasschicht, die sich im Anfangszustande in der Höhe x über dem Boden befand, nach der Zeit t in der Richtung der Achse des Zylinders zurückgelegt hat, heiße ξ , so gilt bekanntlich, so lange die Dichtigkeitsänderungen des Gases nicht zu groß sind, die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

a stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls im Gase dar. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$\xi = \varphi(at + x) + \psi(at - x)$$

die Gasschicht am Boden des Gefäßes, für welche $x = 0$ ist, muß immer in Ruhe sein, es muß also für $x = 0$, $\xi = 0$ sein, woraus sich ergibt: $\varphi(at) + \psi(at) = 0$ oder $\psi(u) = -\varphi(u)$. Wir erhalten also:

$$(2) \quad \xi = \varphi(at + x) - \varphi(at - x)$$

Zu Anfang der Zeit, also für $t = 0$ soll das gesamte Gas in Ruhe sein: für $t = 0$ ergibt sich:

$$\xi = \varphi(x) - \varphi(-x); \quad \frac{d\xi}{dt} = a\varphi'(x) - a\varphi'(-x).$$

Beide Größen müssen für den ganzen Zylinder verschwinden. Bezeichnen wir daher die Höhe desselben mit h so muß von $x = 0$ bis $x = h$

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = \varphi'(-x)$$

sein: die Differentiation der ersten Gleichung liefert

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x)$$

und diese mit der zweiten zusammengehalten gibt

$$\varphi'(x) = \varphi'(-x) = 0,$$

daher

$$\varphi(x) = \varphi(-x) = \text{const.}$$

Diese Konstante geht aber offenbar in die Rechnung gar nicht ein, da ja der Ausdruck für ξ bloß die Differenz zweier Funktionen φ enthält. Wir können daher setzen:

$$\text{von } x = 0 \text{ bis } x = h: \varphi(x) = \varphi(-x) = 0$$

oder

$$(3) \quad \text{von } x = -h \text{ bis } x = +h: \varphi(x) = 0.$$

Hierzu kommt nur noch die Bedingung: daß die unmittelbar am Kolben liegende Schicht die Bewegung des Kolbens mache. Dieselbe geht nämlich sicher nicht so rasch vor sich, daß hinter dem Kolben ein absolutes Vakuum entsteht. Nennen wir daher den Weg, welchen der Kolben zur Zeit t in der Richtung der Achse des Zylinders zurückgelegt hat, $f(t)$, so muß für $x = h$, $\xi = f(t)$ werden; wir erhalten daher:

$$\varphi(at + h) - \varphi(at - h) = f(t)$$

oder indem wir $at + h$ gleich u setzen:

$$(4) \quad \varphi(u) = \varphi(u - 2h) + f\left(\frac{u - h}{a}\right).$$

Liegt u zwischen den Grenzen h und $3h$, so wird offenbar $u - 2h$ zwischen den Grenzen $-h$ und $+h$ liegen, daher

$\varphi(u - 2h)$ zufolge der Gleichung (3) verschwinden. Wir erhalten daher von $u = h$ bis $u = 3h$

$$(5) \quad \varphi(u) = f\left(\frac{u-h}{a}\right).$$

Liegt u zwischen $3h$ und $5h$, so liegt $u - 2h$, was wir Kürze halber v nennen wollen, zwischen h und $3h$; es ist daher zufolge der Gleichung (5):

$$\varphi(v) = f\left(\frac{v-h}{a}\right),$$

daher nach Substitution des Wertes von v :

$$\varphi(u - 2h) = f\left(\frac{u-3h}{a}\right).$$

Die Gleichung (4) liefert daher für alle Werte des u , welche zwischen $3h$ und $5h$ liegen:

$$\varphi(u) = f\left(\frac{u-3h}{a}\right) + f\left(\frac{u-h}{a}\right).$$

Fährt man in dieser Schlußweise fort, so findet man allgemein für jede ganze Zahl n , wenn u zwischen $(2n-1)h$ und $(2n+1)h$ liegt:

$$\varphi(u) = f\left(\frac{u-(2n-1)h}{a}\right) + f\left(\frac{u-(2n-3)h}{a}\right) + \dots + f\left(\frac{u-h}{a}\right),$$

was nichts anderes besagt, als daß die durch die Kolbenbewegung hervorgerufene Welle, sowohl am Boden als auch am Kolben beständig reflektiert wird. Dieser Wert in die Gleichung (2) eingesetzt, gibt die Lösung unseres Problems. Wir wollen den Druck erfahren, unter welchem die oberste Schicht unseres Gases steht. Bezeichnen wir mit ρ_0 die ursprüngliche Dichte unseres Gases, mit ρ die Dichte der Schicht x zur Zeit t , so ist bekanntlich

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right).$$

Die Gleichung (2) liefert uns:

$$\frac{d\xi}{dx} = \varphi'(at+x) + \varphi'(at-x),$$

daher für die oberste Schicht des Gases oder für $x = h$

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \varphi'(at+h) + \varphi'(at-h).$$

Es wird sich nun immer eine ganze Zahl k von solcher Beschaffenheit finden lassen, daß at zwischen $2kh$ und $2(k+1)h$ liegt, daß also

$$(7) \quad 2k + 1 = \frac{at}{h} \pm \varepsilon$$

gesetzt werden kann, wobei $\varepsilon < 1$ ist.

Setzen wir dann $at - h = u$, so liegt u zwischen $(2k+1)h$ und $(2k-1)h$; es ist also zu Folge der Gleichung (6);

$$\varphi(u) = f\left(\frac{u - (2k-1)h}{a}\right) + f\left(\frac{u - (2k-3)h}{a}\right) \dots f\left(\frac{u-h}{a}\right)$$

daher

$$\varphi'(u) = \frac{1}{a} f'\left(\frac{u - (2k-1)h}{a}\right) + \frac{1}{a} f'\left(\frac{u - (2k-3)h}{a}\right) \dots \frac{1}{a} f'\left(\frac{u-h}{a}\right)$$

und nach Einsetzung des Wertes von u :

$$\varphi'(at-h) = \frac{1}{a} \left[f'\left(t - \frac{2k}{a}h\right) + f'\left(t - \frac{2k-2}{a}h\right) + \dots f'\left(t - \frac{2}{a}h\right) \right].$$

In derselben Weise ergibt sich:

$$\varphi'(at+h) = \frac{1}{a} \left[f'\left(t - \frac{2k}{a}h\right) + f'\left(t - \frac{2k-2}{a}h\right) + \dots f'(t) \right]$$

daher

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \frac{2}{a} \left[f'\left(t - \frac{2k}{a}h\right) + f'\left(t - \frac{2k-2}{a}h\right) + \dots f'\left(t - \frac{2}{a}h\right) + \frac{1}{2} f'(t) \right].$$

Nehmen wir zuerst an, der Kolben bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit, setzen wir also $f(t) = ct$; dann ist $f'(t) = c$, daher

$$\frac{d\xi_h}{dx} = (2k+1) \frac{c}{a}$$

oder wenn wir für $2k+1$ seinen Wert aus der Gleichung (7) substituieren:

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \frac{ct}{h} \pm \frac{\varepsilon c}{a}.$$

Die Dichte ϱ_h der obersten Schicht zur Zeit t ist also gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_h} = \frac{1}{\varrho_0} \left(1 + \frac{d\xi_h}{dx} \right) = \frac{1}{\varrho_0} \left(1 + \frac{ct}{h} + \frac{\varepsilon c}{a} \right).$$

Die Länge des Zylinders zur Zeit t ist gleich der ursprünglichen Länge h desselben mehr dem vom Kolben zurückgelegten Weg ct . Bezeichnen wir die Dichte, welche dem Gase zukäme, falls es in dem Raume, den es jetzt einnimmt in Ruhe wäre mit ϱ_s und nennen sie Kürze halber die statische Dichte desselben, so verhält sich die statische Dichte ϱ_s zur

ursprünglichen ϱ_0 umgekehrt wie die jetzige Länge $h + ct$ zur ursprünglichen h des Zylinders. Es ist also:

$$\frac{1}{\varrho_s} = \frac{1}{\varrho_0} \left(1 + \frac{ct}{h} \right).$$

Die wirkliche Dichte der obersten Schicht unseres Gases unterscheidet sich daher von der statischen nur um eine Größe, die klein, von der Ordnung des Verhältnisses der Kolbengeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit ist. Es wird sich daher auch der wirkliche Druck, unter dem jene oberste Schicht steht, von demjenigen, unter dem das Gas stehen würde, wenn es bei seinem jetzigen Volumen und seiner jetzigen Temperatur in Ruhe wäre, nur um eine Größe von dieser Ordnung unterscheiden. Der Fehler, den man begeht, wenn man bei Berechnung der Arbeit statt des wirklichen Druckes diesen zugrunde legt, ist daher außerordentlich klein. Eine ganz ähnliche Gestalt wie $d\xi_h/dx$ nimmt die Größe $d\xi/dx$ für die übrigen Schichten des Gases an und man findet leicht, daß sich auch Dichte und Druck der übrigen Schichten nur um eine ebenso kleine Größe von der statischen Dichte und dem statischen Drucke unterscheiden. Es folgt hieraus überhaupt, daß die Bewegung des ganzen Gases ruhiger vor sich geht, als man sich dies vielleicht im ersten Augenblicke vorstellt, was für Kohlrauschs Versuch von großer Wichtigkeit ist.

Es ist klar, daß die Bewegung des Kolbens in der Natur nicht gleichförmig sein wird. Ich will daher noch einen anderen extremen Fall betrachten und setzen

$$f(t) = \lambda \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right);$$

es wird dann

$$f'(t) = \frac{2\pi\lambda}{\tau} \sin \frac{2\pi t}{\tau},$$

die Geschwindigkeit des Kolbens variiert also nach dem Sinusgesetze. Dann wird:

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \frac{4\pi\lambda}{a\tau} \left[\sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{2kh}{a} \right) + \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{2k-2h}{a} \right) \dots \right. \\ \left. \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{2h}{a} \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]$$

oder nach Summierung der Sinusreihe:

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \frac{2\pi\lambda}{a\tau \sin \frac{2\pi h}{a\tau}} \left[\cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi h(2k+1)}{a\tau} \right) - \cos \frac{2\pi h}{a\tau} \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right]$$

und nach Einführung des Wertes von $2k+1$ aus Gleichung (7)

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \frac{2\pi\lambda}{a\tau \sin \frac{2\pi h}{a\tau}} \left[\cos \frac{2\pi \varepsilon h}{a\tau} - \cos \frac{2\pi h}{a\tau} \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right]$$

$a\tau$ ist die Strecke, durch welche sich der Schall während der Zeit τ fortgepflanzt hätte; dieselbe ist offenbar sehr groß gegen h ; vernachlässigen wir daher die Glieder von der Ordnung $(h/a\tau)^2$, so können wir setzen:

$$\sin \frac{2\pi h}{a\tau} = \frac{2\pi h}{a\tau}, \quad \cos \frac{2\pi \varepsilon h}{a\tau} = \cos \frac{2\pi h}{a\tau} = 1$$

und erhalten:

$$\frac{d\xi_h}{dx} = \frac{\lambda}{h} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right).$$

Der vom Kolben zurückgelegte Weg aber ist

$$f(t) = \lambda \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right),$$

es ist also wieder bis auf Glieder von der Ordnung $(h/at)^2$ genau $d\xi_h/dx = f(t)/h$. Alle weiteren Schlüsse bleiben wie im vorigen Falle; es unterscheiden sich also wirkliche Dichte und Druck nur um Glieder von der Ordnung $(h/at)^2$ von der statischen. Es ist übrigens leicht den Beweis für diese angenäherte Gleichheit unabhängig von der Form der Funktion $f(t)$ zu führen. Setzt man zunächst $2h/a = \Delta$, so kann man den Ausdruck für $d\xi_h/dx$ wie folgt schreiben:

$$(8) \quad \frac{d\xi_h}{dx} = \frac{\Delta}{h} [f'(t - k\Delta) + f'(t - (k-1)\Delta) \dots f'(t - \Delta) + \frac{1}{2}f''(t)].$$

Nun ist aber bekanntlich

$$f'(t) - f'(t - \Delta) = \Delta f''(t) + \frac{\Delta^2}{2} f'''(t - \varepsilon_1 \Delta)$$

$$f'(t - \Delta) - f'(t - 2\Delta) = \Delta f''(t - \Delta) + \frac{\Delta^2}{2} f'''(t - \Delta - \varepsilon_2 \Delta)$$

⋮

$$f'(t - (k-1)\Delta) - f'(t - k\Delta) = \Delta f''(t - (k-1)\Delta)$$

$$+ \frac{\Delta^2}{2} f'''(t - (k-1)\Delta - \varepsilon_3 \Delta).$$

Ferner ergibt sich, weil at zwischen $2kh$ und $(2k+2)h$, daher $t - 2kh/a$ zwischen Null und $2h/a$ liegt, also $t - k\Delta = \varepsilon_4 \Delta$ gesetzt werden kann.

$$f'(t - k \Delta) - f'(o) = \varepsilon_4 \Delta f''(t - k \Delta) + \frac{\varepsilon_4^2 \Delta^2}{2} f'''(\varepsilon_5 \Delta)$$

worin übrigens $f'(o) = 0$ ist. Die Addition aller dieser Gleichungen liefert uns:

$$f(t) = \Delta [f'(t) + f'(t - \Delta) \dots f'(t - (k - 1) \Delta) + \varepsilon_4 f'(t - k \Delta)] - \frac{\Delta}{2} \cdot p$$

wobei p jedenfalls kleiner als der größte Wert der zweiten Ableitung $f''(u)(t + \Delta)$ ist. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{1}{2} f'(t) + f'(t - \Delta) + f'(t - 2 \Delta) \dots f'(t - k \Delta) \right] \\ = f(t) - \frac{\Delta f''(t)}{2} + \varepsilon_5 \Delta f'(t - k \Delta) + \frac{\Delta}{2} \cdot p. \end{aligned}$$

Die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_5$ sind hier gewisse echte Brüche. Wir erhalten daher mit Rücksicht auf die Gleichung (8)

$$\frac{d \xi_h}{dx} = \frac{f(t)}{h} - \Delta \frac{f'(t)}{2h} + \varepsilon_5 \Delta \frac{f'(t - k \Delta)}{h} + \Delta \frac{p}{2h}.$$

Die Größe $d \xi_h / dx$ unterscheidet sich daher in der That nur um eine Größe von der Ordnung Δ von $f(t)/h$, woraus wieder folgt, daß auch Dichte und Druck nur um eine Größe von der Ordnung Δ von den statischen verschieden sind. Wenn man daher bei Berechnung der Arbeit statt des wirklich in einem Momente auf dem Gase lastenden Druckes den statischen, d. h. jenen Druck setzt, den das Gas ausüben würde, wenn es bei dem Volumen und bei der Temperatur, die es in dem Momente hat, in Ruhe wäre, so begeht man, wenn nicht $f'(t)$ oder $f''(t)$ sehr groß sind, höchstens einen Fehler von der Ordnung des Verhältnisses der Länge des Gefäßes zum Weg, den der Schall während des Versuches zurücklegt. Setzt man statt des wirklichen Druckes immer den Druck, unter dem das Gas zu Anfang oder zu Ende des Versuches stand, so begeht man natürlich einen Fehler von der Ordnung des Verhältnisses der Druckänderungen zum Gesamtdruck des Gases, welcher jedoch dadurch noch bedeutend vermindert wird, daß man das Mittel zwischen dem Anfangs- und Enddrucke in die Rechnung einführt.

Unsere Rechnung ist allerdings nicht vollkommen strenge, indem die partielle Differentialgleichung (1) nur gilt, wenn die Dichtigkeitsänderungen im Gase verschwindend klein sind. Man würde jedoch irren, wenn man glaubte, dadurch würden in unserem Resultate Fehler von der Ordnung des Verhältnisses

der Dichtigkeitsänderungen zur Gesamtdichtigkeit herbeigeführt. Wir sahen nämlich, daß sich in jedem Zeitmomente die Dichtigkeiten der verschiedenen Schichten nur um eine Größe von der Ordnung h/a von der statischen und daher auch untereinander unterscheiden. Für jeden Zeitmoment wird daher mit weit größerer Annäherung die partielle Differentialgleichung (1) gelten; nur wird die Größe a oder die Schallgeschwindigkeit während des Versuches etwas variieren und zwar auch nur wegen der eintretenden Temperaturschwankungen, indem dieselbe ja unabhängig von der Dichte ist. Es ist aber leicht einzusehen, daß eine Veränderlichkeit der Größe a unsere aus der Formel (8) gezogenen Schlüsse nicht alteriert. Es werden nämlich dann nur in der Summe die verschiedenen Δ ungleich groß; dieselbe nähert sich aber trotzdem für kleine Δ noch immer dem bestimmten Integrale.

Der von uns der Rechnung unterzogene Fall ist allerdings von dem Versuche Kohlrauschs etwas verschieden; weit mehr nähert sich derselbe der Form, welche Witte dem Versuche gab und es wäre leicht, ihn genau in der hier beobachteten Form auszuführen. Übrigens wird die Größenordnung des Unterschiedes zwischen dem wirklichen und statischen Drucke, auch wenn man statt des einfachen zylindrischen Gefäßes einen mit einem Zylinder verbundenen Rezipienten hat, keine andere werden. Nur ist zu bemerken, daß der Querschnitt der Verbindung nicht zu klein sein darf. Am wenigsten ist die Ansicht Kurz' gerechtfertigt, daß das Gas nicht arbeite und die Theorie die Temperaturveränderung desselben überhaupt leugne. Der in der mechanischen Wärmetheorie vorausgesetzte Fall, daß der Druck immer gleich dem Gegendruck sei, tritt allerdings nur bei unendlich langsamer Bewegung des Kolbens ein; aber es war Zweck der gegenwärtigen Abhandlung durch vollständige Durchführung der Rechnung wenigstens in einem speziellen Falle zu zeigen, wie wenig sich beide unterscheiden, wenn nur die Kolbengeschwindigkeit klein gegen die Schallgeschwindigkeit ist, was übrigens auch durch die verhältnismäßig kleine Beschleunigung des Kolbens (dieselbe ist ja die Differenz von Druck und Gegendruck, wenn man die Reibung und den Druck der Hand mit einbezieht) bezeugt wird.

Graz, im November 1869.

Noch Einiges über Kohlrauschs Versuch zur Bestimmung des Verhältnisses der Wärmekapazitäten von Gasen.

(Pogg. Ann. 141, S. 473—476. 1870.)

Dieser Versuch verdankt Hrn. Witte zwei Verbesserungen, die sich in der Folge als sehr nützlich erweisen dürften; nämlich das Manometer mit momentaner Kommunikation und die Anwendung von Gefäßen, die nicht wie Stiefel und Rezipient der Luftpumpe durch einen verhältnismäßig engen Kanal in Verbindung stehen. Was jedoch die Theorie des Versuches betrifft, so beging Hr. Witte ein Versehen. Um das Verhältnis der Wärmekapazitäten zu bestimmen, denkt er sich nämlich (Pogg. Ann. 138, S. 158) ein Gas von der Temperatur t' bei konstantem Drucke zur Temperatur t erwärmt und dann ohne Wärmezufuhr auf sein ursprüngliches Volumen komprimiert. Die Temperatur soll dabei auf t'' steigen. Er glaubt, daß man ihm hierbei im ganzen dieselbe Wärmemenge zuführen müsse, als wenn man es direkt bei konstantem Volum von der Anfangstemperatur t' auf die Endtemperatur t'' erwärmen würde. Dieser Schluß ist jedoch nicht erlaubt, da die zugeführte Wärme nicht bloß vom Anfangs- und Endzustande abhängt. Die vollständige Formel für das Verhältnis der Wärmekapazitäten lautet vielmehr:

$$(1) \quad \frac{c_p}{c_v} = \frac{\log p' - \log p}{\log v - \log v'}$$

wobei c_p die Wärmekapazität bei konstantem Drucke, c_v die bei konstantem Volumen, p und v Druck und Volum zu Anfang, p' und v' zu Ende des Prozesses sind. (Siehe Zeuners Wärmelehre, S. 131.) Die Formel Wittes gilt nur als Annäherungsformel für kleine Kompressionen (denn bei kleiner Kompression wird der Unterschied beider Wärmemengen klein von der zweiten

Ordnung) und man kann aus ihr keineswegs den Schluß ziehen, daß c_p/c_v Funktion des Druckes oder der Temperatur sei, wie es Witte in einer späteren Abhandlung (Pogg. Ann. 140, S. 657 und 658) tut. Vielmehr machen sowohl theoretische Betrachtungen als auch die Experimente Regnaults wahrscheinlich, daß c_p/c_v nahezu konstant ist, wenngleich eine absolute Konstanz für die in der Natur vorkommenden Gase natürlich nicht zu erwarten steht.

Die Ableitungsweise der Formel (1) setzt voraus, daß der Kolben in jedem Momente unter demselben Drucke stehe, unter dem er stehen würde, wenn das Gas in dem Raume, den es augenblicklich erfüllt, bei seiner (mittleren) Temperatur im Gleichgewicht wäre, daß, wie man sich in der Wärmetheorie ausdrückt, der Druck gleich dem Gegendruck ist. Ich habe nun nachgewiesen, daß, wenn der vom Gase erfüllte Raum ein Zylinder ist, die Dichte der unmittelbar am Kolben anliegenden Gasschicht in jedem Augenblicke nur sehr wenig von der Dichte abweicht, die das Gas hätte, wenn es seinen Raum gleichförmig erfüllen würde; und da die Geschwindigkeit dieser Gasschicht gleich der Kolbengeschwindigkeit ist, so muß auch der Druck, unter dem der Kolben steht, nahe gleich dem Druck sein, den das Gas bei seinem augenblicklichen Volumen und Temperatur ausüben würde, folglich ist auch die Arbeit in beiden Fällen nahe dieselbe. Die bei Ableitung der Gleichung 1) gemachten Voraussetzungen sind also dann nahe erfüllt. Die Behauptung Kurz', daß hierbei eine Verwechslung von Druck und Arbeit stattfinde, beruht auf einem Mißverständnis. Wenn ich dagegen in meiner früheren Abhandlung sagte: „Es wäre ein grober Irrtum“ usw., so behauptete ich damit nicht, daß Hr. Kurz wirklich in diesen Irrtum verfallen sei. Ich meinte bloß, daß man beim Lesen des Schlusses seiner Abhandlung leicht zu diesem Irrtum verleitet werden könne. Wenn Hr. Kurz bloß ausdrücken wollte, daß der Verbindungskanal zwischen Stiefel und Rezipient in Kohlrauschs Versuche so eng war, daß unter dem Kolben nahezu ein Vakuum entstand und daher die im Rezipienten befindliche Luft in den leeren Raum ausströmte, so kann ich dem um so weniger entgegenreten, als mir die Weite dieses Verbindungskanals durchaus unbekannt ist. Möglicherweise war dies die Ursache, weshalb Kohlrausch

den Wert c_p/c_v zu klein erhielt: nur weshalb die Theorie die Temperaturerhöhung überhaupt leugnen sollte, begriff ich nicht. Schließlich erlaube ich mir, für den Versuch Kohlrauschs folgende Form vorzuschlagen:

Das Gas befinde sich in einem einzigen zylindrischen Gefäß, in das ein luftdicht schließender Kolben bei einigen Versuchen tiefer, bei anderen weniger tief eingesenkt wird. Nahe am Boden des Gefäßes seien mehrere Manometer angebracht, um den Druck sowohl im Momente des Endes der Kolbenbewegung als auch beliebige Zeit später bestimmen zu können. Kolben und Manometerhähne werden durch eine Maschinerie getrieben, um nicht nur die größte Übereinstimmung bei den einzelnen Versuchen erzielen, sondern auch die Art und Weise der Kolbenbewegung genau bestimmen zu können. Die Zeitmomente könnten telegraphisch registriert werden. Es ist dann der Druck in jedem Augenblicke nur wenig vom Gegen- drucke verschieden und ihre Differenz könnte zu dem noch berechnet werden. Außerdem könnte der Abkühlungskoeffizient für jedes Volumen des Gases besonders bestimmt werden. Auf diese Weise könnte vielleicht auch die Beantwortung der Frage versucht werden, wie rasch die Umsetzung der progressiven Bewegung der Moleküle in Bewegung der Atome gegen einander (sog. intramolekulare) geschieht. Es ist zwar nicht wahrscheinlich, aber immerhin nicht außerhalb des Bereiches der Möglichkeit, daß diese Umsetzung eine längere Zeit beanspruche.

Graz, den 11. November 1870.

Über die Ableitung der Grundgleichungen der Kapillarität aus dem Prinzipie der virtuellen Geschwindigkeiten.

(Pogg. Ann. 141. S. 582—590. 1870.)

In Pogg. Annalen 139, S. 239 verallgemeinerte Hr. Stahl die schöne von Gauss herrührende Ableitungsweise der Grundgleichungen der Kapillarität aus dem Prinzipie der virtuellen Geschwindigkeiten in ähnlicher Weise, wie Poisson ihre direkte Ableitung aus der Betrachtung der Kräfte, indem er ihre Anwendbarkeit auch für den Fall des Vorhandenseins eines Flüssigkeitshäutchens von variabler Dichte bewies. Es scheint mir jedoch hiermit der Hauptmangel, welcher der Methode von Gauss in ihrer gegenwärtigen Form anhaftet, noch immer nicht beseitigt, nämlich daß in derselben die über alle Molekülpaare zu erstreckenden Summen durch Integration berechnet werden. Es setzt dies voraus, daß nicht nur die von einem Moleküle sehr entfernten, sondern auch die unmittelbar anliegenden Moleküle nur einen verschwindenden Teil in die betreffenden Summen liefern. Während nun ersteres als experimentell hinlänglich festgestellt betrachtet werden kann, so ist die letztere Annahme durch gar nichts bewiesen, im Gegenteil, viele Gründe, deren Auseinandersetzung hier nicht in meiner Absicht liegt, machen dieselbe unwahrscheinlich, wenn nicht unmöglich. Wenn aber die unmittelbar an einem Moleküle anliegenden Moleküle Endliches in die Summen liefern, so ist die Berechnung derselben durch Integration wegen der Diskontinuität der Materie unmittelbar um das Molekül herum offenbar nicht anwendbar. Es ist dies bekanntlich der Grund, weshalb man die Auswertung der Summen durch Integration in der Elastizitätstheorie bereits längst verlassen hat. Man konnte dies um so leichter, als sich alle

wesentlichen Konsequenzen durch bloßes Räsonnement aus den Summenformeln auch ohne deren wirkliche Auswertung ziehen lassen, wodurch nicht nur jenes Bedenken gehoben, sondern auch die Form der Deduktion vereinfacht wird. Außerdem hat Gauss nicht berücksichtigt, daß die Flüssigkeitsmoleküle in der Regel aus verschiedenen heterogenen Gattungen von Atomen bestehen, um welche nach der Hypothese vieler Physiker noch Ätherhüllen gelagert sind. Ich pflegte nun in meinen Vorlesungen die Gauss'sche Methode in einer Form darzustellen, welche gleich jener in der Elastizitätslehre üblichen Darstellungsweise alle diese gegen dieselbe möglichen Einwürfe beseitigt und sich zudem durch verhältnismäßige Einfachheit empfehlen dürfte. Alle mühsamen Integrationen sind dabei ganz vermieden und man gelangt lediglich durch wiederholte Anwendung eines schon aus der Elastizitätslehre geläufigen Schlusses zu den Grundgleichungen der Kapillaritätstheorie. Die Anregung jener Frage durch die Arbeit Stahls gibt mir Gelegenheit auch meine Methode zu veröffentlichen, ohne daß ich jedoch, da mir die betreffende Literatur teilweise nicht zur Verfügung steht, zu entscheiden vermag, ob nicht eine ähnliche oder gar dieselbe bereits früher angewandt wurde.

Betrachten wir eine beliebige Anzahl von Flüssigkeiten, deren jede homogen ist, dabei jedoch aus verschiedenen Gattungen von Atomen, wie Wasser aus Wasserstoff- und Sauerstoffatomen bestehen kann. Dieselben seien teils miteinander, teils mit den Wänden fester Körper in Berührung, teils besitzen sie freie Oberflächen. Unsere Voraussetzung ist, daß die Kraftfunktion

$$\varphi(r) = \int f(r) dr$$

der zwischen je zwei Atomen wirksamen Kraft $f(r)$, welche übrigens für verschiedene Paare verschieden sein kann, nur für unendlich kleine r einen von Null verschiedenen Wert besitzt, für jede endliche Distanz aber ohne merklichen Fehler gleich Null gesetzt werden darf. Wir wollen eine Distanz, in der man gerade schon den Wert von $\varphi(r)$ für alle Atompaare gleich Null setzen darf, kurz den Radius der Wirkungssphäre nennen. Es wird dann die Dichte der Flüssigkeit nur in un-

merklicher Entfernung von der Oberfläche oder Berührungsfläche mit einem heterogenen Körper von der normalen Dichte der Flüssigkeit verschieden sein können. Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen muß dann die Variation der Doppelsumme $\sum \sum \varphi(r)$ mehr der Variation der Kraftfunktion der von außen auf die Flüssigkeiten und etwa in sie eingetauchten beweglichen festen Körper wirksamen Kräfte gleich Null sein. Die Doppelsumme ist über alle Paare von Flüssigkeitsatomen sowie auch über diejenigen Atome fester Körper zu erstrecken, welche mit ihnen in Wechselwirkung stehen. Es geschieht dies am besten so: Man wählt ein beliebiges Atom und bildet die Summe $\sum \varphi(r)$ erstreckt über alle Flüssigkeitsatome, die in seiner Wirkungssphäre liegen. Diesen Ausdruck, den wir mit S bezeichnen wollen, bildet man für alle Flüssigkeitsatome, und addiert alle so erhaltenen Ausdrücke; man bildet also die Summe $\sum S$ erstreckt über alle Flüssigkeitsatome. Die Hälfte dieser Summe ist dann bekanntlich das Potential der gesamten Flüssigkeit auf sich selbst. Ebenso betrachtet man irgend ein Atom, welches in der Wirkungssphäre von Atomen fester Körper liegt und bildet für dasselbe die Summe $\sum \varphi(r)$ erstreckt über alle Atome fester Körper, die sich in der Wirkungssphäre des betrachteten Atoms befinden. Nennen wir ihren Wert T , so ist die Summe $\sum T$, erstreckt über alle Flüssigkeitsatome im Bereich der Wirkung der festen Körper, das Potential der festen Körper auf die Flüssigkeiten. Es ist also das gesamte zu variierende Potential:

$$\sum \sum \varphi(r) = \frac{1}{2} \sum S + \sum T.$$

Um näheres über den Wert der beiden rechts stehenden Summen zu erfahren, wollen wir jede der Flüssigkeiten in außerordentlich viele außerordentlich kleine Flüssigkeitselemente zerlegen, die jedoch sehr groß gegen die Wirkungssphäre sein sollen. Betrachten wir irgend eine der Flüssigkeiten, etwa diejenige, welche den Raum A (Fig. 1) erfüllt. Lediglich um den Ausdruck zu vereinfachen, sei dieselbe Wasser; die Übertragbarkeit derselben Schlüsse auf andere Flüssigkeiten bedarf kaum der Erwähnung. Die Einteilung dieser Flüssigkeit soll nun in folgender Weise geschehen: Wir teilen zuerst ihre gesamte Oberfläche, also sowohl den freien Teil derselben als

auch sämtliche Flächen, längs welcher sie mit den übrigen Flüssigkeiten oder festen Körpern in Berührung steht, in sehr viele, sehr kleine Flächenelemente. Über jedem derselben errichten wir einen Zylinder, dessen Basis das betreffende Flächenelement und dessen Höhe mindestens um den Radius der Wirkungssphäre größer ist, als die Dicke des jeweiligen sogenannten Flüssigkeitshäutchens, d. h. jenes Teiles der Flüssigkeit, innerhalb dessen die Gruppierung der Atome von der Begrenzung der Flüssigkeit beeinflußt wird, daher namentlich die Dichte von der normalen abweicht. Diese Dicke wird natürlich im allgemeinen verschieden sein, je nachdem die Oberfläche frei ist oder sich hinter derselben der eine oder

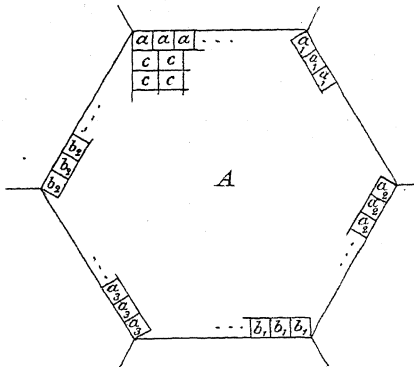


Fig. 1.

andere Körper befindet. Da sie aber jedenfalls verschwindend klein ist, so ist die Legung jener sehr kleinen zylindrischen Flüssigkeitselemente immer möglich. In unserer Figur sind dieselben mit $a, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ bezeichnet. Es soll dabei die Höhe aller Zylinder a untereinander gleich gemacht werden, ebenso die aller Zylinder a_1 usw. Den noch übrigen Teil der Flüssigkeit endlich, welcher also durchaus gleiche Dichte und überhaupt gleichförmige Beschaffenheit hat, teilen wir in beliebiger Weise in die sehr kleinen Flüssigkeitselemente c . Wir schreiten nun zur Betrachtung der Summe $\sum S$, und zwar wollen wir zunächst über sämtliche Atome irgend eines der Flüssigkeitselemente c summieren. Jedes Sauerstoffatom aller dieser Elemente befindet sich genau unter denselben Umständen,

es wird daher der Ausdruck $S = \sum \varphi(r)$ für jedes Sauerstoffatom gleich ausfallen, folglich jedes ein gleichgroßes Glied in unsere Summe liefern. Jedes Wasserstoffatom liefert im allgemeinen ein anderes Glied; allein die von den Wasserstoffatomen gelieferten Glieder sind unter sich wieder gleich. Da nun die Flüssigkeitselemente groß gegen die Wirkungssphäre sind, so ist sowohl die Zahl der in einem Flüssigkeitselemente befindlichen Sauerstoffatome als auch die der Wasserstoffatome proportional der Größe des Elementes. Es besteht also die Summe $\sum S$ erstreckt über die Atome eines Elementes c aus einer Reihe von gleichgroßen Summanden, deren Zahl der Größe des betreffenden Elementes proportional ist. Ihr Wert ist daher selbst dem Volumen des Elementes proportional.

Das Resultat ist also: Jedes der Elemente c liefert in $\sum S$ ein Glied, dessen Größe gleich einer dem Wasser bei dieser Temperatur und diesem Drucke eigentümlichen Konstanten γ multipliziert mit dem Volumen des Elementes ist, das wir gleich mit demselben Buchstaben wie das Element selbst, also ebenfalls mit c bezeichnen wollen. Die Gesamtheit der Glieder, welche sämtliche Flüssigkeitselemente c liefern, ist daher gleich $\gamma \cdot \sum c$, wobei $\sum c$ das Volumen des ganzen von diesen Flüssigkeitselementen erfüllten Raumes ist. Es ist klar, daß die Gültigkeit dieses sowie der folgenden Schlüsse nicht alteriert wird, wenn sich etwa die beiden Wasserstoffatome eines Wassermoleküls unter verschiedenen Umständen befänden, wie dies bei komplizierteren Molekülen ohne Zweifel eintritt, dieselben wären dann wie ganz heterogene Atome zu betrachten. Nicht einmal die Molekularbewegung, welche wir Wärme nennen, macht unsere Schlüsse ungültig, da sich die hierdurch herbeigeführten Abweichungen bei der großen Zahl der Moleküle in einem Flüssigkeitselement im Durchschnitt wieder aufheben. Nach denselben Prinzipien geschieht die Diskussion der Glieder, welche die übrigen Flüssigkeitselemente in $\sum S$ liefern. Betrachten wir etwa die an der freien Oberfläche anliegenden mit a bezeichneten Elemente. Die Oberflächenelemente, welche die Basis dieser zylindrischen Flüssigkeitselemente bilden, können mit um so größerer Annäherung als eben betrachtet werden, je kleiner die Elemente selbst sind. Falls diese strenge unendlich klein

wären, könnten sie daher ohne allen Fehler als eben angesehen werden. Diese Bedingung kann bei wirklichen Flüssigkeiten allerdings nicht strenge, aber doch mit großer Annäherung erfüllt werden und unsere Aufgabe ist, die Bestimmung des Grenzfalls, dem sich die Gesetze des Flüssigkeitsgewichtes um so mehr nähern, je kleiner die Wirkungssphären sind. Wenn auch die wirklichen Flüssigkeiten jenen Gesetzen nicht absolut genau gehorchen, so ist die Abweichung doch völlig unmerklich und könnte eine theoretische Bestimmung derselben erst dann versucht werden, wenn man über die Größe der Wirkungssphäre und die Natur des Wirkungsgesetzes näheres wüßte. Behufs der Berechnung jenes Grenzfalls können wir also sämtliche Flüssigkeitselemente a als senkrechte Zylinder mit ebener Basis betrachten. Zunächst ist nun klar, daß sich nicht alle Sauerstoffatome in einem der Elemente a unter denselben Umständen befinden, weil ja die Dichte der Flüssigkeit von der Oberfläche gegen das Innere zu variiert. Da aber die Basis sowohl unseres Flüssigkeitselementes als auch der unmittelbar anliegenden als eine Ebene betrachtet werden kann, so befinden sich alle in einer und derselben Distanz δ von jener Basis befindlichen Sauerstoffatome unter denselben Bedingungen. Die Anzahl derselben ist aber proportional der Größe a des Oberflächenelementes, welches die Basis des betreffenden Flüssigkeitselementes bildet. Es ist also der Teil, welchen die in der Distanz δ von der Oberfläche befindlichen Sauerstoffatome des Flüssigkeitselementes a in ΣS liefern, proportional der Basis desselben. Dasselbe gilt auch von den Sauerstoffatomen in der Distanz δ' , sowie von denen in der Distanz δ'' von der Oberfläche usw. Und da das gleiche auf die Wasserstoffatome anwendbar ist, so übersieht man leicht, daß der Teil, welchen irgend eines der Flüssigkeitselemente a in ΣS liefert, aus lauter Gliedern besteht, die einander gleich und deren Anzahl dem Flächeninhalte seiner Basis proportional ist, welchen Flächeninhalt wir ebenfalls a nennen wollen, daß folglich auch der Teil, welchen alle an der freien Oberfläche anliegenden und mit a bezeichneten Elemente liefern, gleich einer anderen dem Wasser eigentümlichen Konstanten α multipliziert mit dem Flächeninhalte der gesamten freien Oberfläche Σa ist. Ein

Bedenken könnte sich wegen der am Rande der freien Oberfläche befindlichen Flüssigkeitselemente erheben, von denen das Gesagte im allgemeinen nicht gelten wird. Allein da sämtliche Elemente außerordentlich klein sind, so verschwindet die Zahl der am Rande befindlichen gegen die der übrigen, und da ein einzelnes am Rande befindliches Element jedenfalls nicht unendlichmal mehr als ein anderes in $\sum S$ liefert, so kann die Summe aller von den Randelementen gelieferten Glieder gegen die Summe der von den übrigen gelieferten vernachlässigt werden. Wir wollen noch mit c' das Volumen bezeichnen, welches die in irgend einem unserer Flüssigkeitselemente a enthaltene Wassermasse einnehmen würde, wenn sich die Moleküle derselben nicht an der Oberfläche befänden, sondern rings mit Wasser umgeben wären. Man überzeugt sich dann leicht durch Wiederholung der eben gemachten Schlüsse, daß c' ebenfalls proportional der Größe des Oberflächenelementes a , also $c' = \varepsilon a$, $\sum c' = \varepsilon \cdot \sum a$ ist. Es wird nun nicht mehr notwendig sein, dieselben Schlüsse in extenso auch bei dem Flüssigkeitselemente $a_1, a_2 \dots$, die an den Berührungsflächen mit den anderen Flüssigkeiten anliegen, sowie bei den Elementen $b_1, b_2 \dots$, die an den Berührungsflächen mit den festen Körpern anliegen, zu wiederholen. Man übersieht sofort, daß man unter Anwendung genau derselben Schlußweise zum Resultate gelangt, daß auch die Teile, welche diese Flüssigkeitselemente in $\sum S$ liefern, jedesmal proportional den betreffenden Oberflächenelementen sind. Sie können also gleich gesetzt werden: $\alpha_1 \sum a_1$; $\alpha_2 \sum a_2 \dots \beta_1 \sum b_1$, $\beta_2 \sum b_2 \dots$, wobei $\sum a_1$, $\sum a_2 \dots \sum b_1$, $\sum b_2 \dots$ die Flächeninhalte der Kontaktflächen des Wassers mit den anderen Körpern, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \beta_1, \beta_2 \dots$, aber Konstanten sind, die selbstverständlich von der Natur und dem Zustande der in Kontakt befindlichen Körper abhängen. Es ist also:

$$\sum S = \gamma \sum c + \alpha_1 \sum a_1 + \alpha_2 \sum a_2 \dots + \beta_1 \sum b_1 + \beta_2 \sum b_2 \dots$$

Die Atome der mit b bezeichneten Flüssigkeitselemente liefern auch Glieder in $\sum T$, und zwar ist jedes Glied wieder proportional der entsprechenden Oberfläche; daher $\sum T' = \beta'_1 \sum b_1 + \beta'_2 \sum b_2 \dots$; addiert man hierzu $\frac{1}{2} \sum S$, so ergibt sich:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \sum \sum \varphi(r) &= \frac{1}{2} \sum S + \sum T = \frac{\gamma}{2} \sum c + \frac{\alpha_1}{2} \sum a_1 + \frac{\alpha_2}{2} \sum a_2 \dots \\ &+ \left(\frac{\beta_1}{2} + \beta_1' \right) \sum b_1 + \left(\frac{\beta_2}{2} + \beta_2' \right) \sum b_2 \dots \end{aligned} \right.$$

Um diesen Ausdruck zu transformieren, bezeichnen wir durch $c'', c''' \dots c^{(k)}, c^{(k+1)} \dots$ die Volumina, welche die Flüssigkeitselemente $a_1, a_2 \dots b_1, b_2 \dots$ einnehmen würden, falls sie ganz von Wasser umgeben wären; wir haben hernach:

$$\begin{aligned} \sum c'' &= \varepsilon_1 \sum a_1, \quad \sum c''' = \varepsilon_2 \sum a_2 \dots \\ \sum c^{(k)} &= \eta_1 \sum b_1, \quad \sum c^{(k+1)} = \eta_2 \sum b_2 \dots \end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \eta_1, \eta_2 \dots$ sind da wieder gewisse Konstante. Mit Rücksicht auf diese Gleichungen, sowie auf die Gleichung $\sum c' = \varepsilon \sum a$, können wir die Gleichung (1) in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \sum \sum \varphi(r) &= \frac{\gamma}{2} (\sum c + \sum c' + \sum c'' \dots \sum c^{(k)} + \sum c^{(k+1)} \dots \\ &+ \frac{\alpha - \varepsilon \gamma}{2} \sum a + \frac{\alpha_1 - \varepsilon_1 \gamma}{2} \sum a_1 + \frac{\alpha_2 - \varepsilon_2 \gamma}{2} \sum a_2 \dots \\ &+ \left(\frac{\beta_1 - \eta_1 \gamma}{2} + \beta_1' \right) \sum b_1 + \left(\frac{\beta_2 - \eta_2 \gamma}{2} + \beta_2' \right) \sum b_2 + \dots \end{aligned}$$

Hier ist $\sum c + \sum c' + \sum c'' \dots$, das Volum, welches unsere Wassermasse einnehmen würde, wenn sie ganz von Wasser umgeben wäre, also eine konstante Größe, deren Variation verschwindet. $\sum a, \sum a_1, \sum a_2 \dots \sum b_1, \sum b_2 \dots$ sind die Flächeninhalte der Berührungsflächen des Wassers mit den übrigen Körpern, ihre Koeffizienten $\alpha - \varepsilon \gamma / 2, \alpha_1 - \varepsilon_1 \gamma / 2 \dots$ aber reine Konstanten. Bildet man analoge Ausdrücke auch für alle anderen Flüssigkeiten, so gelangt man sofort zu dem Resultate von Gauss, womit also sämtliche Probleme der Kapillaritätstheorie auf Probleme der Variationsrechnung zurückgeführt sind. Auf den Umstand, daß die Gültigkeit dieser Gleichungen aufhört, wenn eine Flüssigkeit eine Spitze oder Kante hat, deren Dicke nicht groß gegen den Radius der Wirkungssphäre ist, hat schon Gauss aufmerksam gemacht. Es ist klar, daß die Unterabteilung der Räume $\sum a, \sum a_1 \dots$ in die Elemente $a, a_1 \dots$ auch ganz unterbleiben könnte; sie scheint mir jedoch das Verständnis zu erleichtern.

Graz den 11. November 1870.

Über eine neue optische Methode, die Schwingungen tönender Luftsäulen zu analysieren, gemeinschaftlich mit A. Toepler.¹⁾

(Pogg. Ann. 141, S. 321—352. 1870.)

1.

Bereits in Pogg. Ann. 128, S. 108, wurde von Toepler durch eine Reihe von Versuchen auf die Vorteile hingewiesen, welche das stroboskopische Prinzip bei der Beobachtung schwingender Bewegungen bietet. Betrachtet man einen schwingenden Körper, z. B. eine Saite, bei *intermittierendem* Lichte, und ist die Schwingungsdauer der Saite nur sehr wenig verschieden von dem Zeitintervall, in welchem die intermittierende Lichtquelle je einmal aufleuchtet, so sieht man die Saitenschwingung mit allen ihren Eigentümlichkeiten ganz langsam stroboskopisch reproduziert. Die Schwingungsdauer der stroboskopischen Bewegungserscheinung berechnet sich aus der Differenz zwischen Lichtintermittenz und Saitenschwingung genau so, wie die Schwebungen zweier sehr nahe gleichgestimmter Töne. Man kann also unter Beachtung der nötigen Vorsichtsmaßregeln stehende Schwingungen vieler Körper fast beliebig verlangsamt sehen und unter günstigen Verhältnissen ihre Details mit Meßinstrumenten verfolgen, wie jede andere langsame Bewegungserscheinung.

Von größtem Interesse war es nun, bei den Pfeifentönen unmittelbar die *Luftschwingungen* beobachten zu können, da durch solche Beobachtungen eine Reihe von bis jetzt experimentell sehr schwer zugänglichen Fragen (z. B. die Intensitäts- und Phasenverhältnisse der Partialtöne eines

¹⁾ Vorläufiger Bericht über diese Arbeit Wien. Anz. 7, S. 73. 24. März 1870 und Carls Repertorium 6, S. 174. 1870.

Pfeifenklanges) der Beobachtung und Messung unterworfen werden können. Nach einem Vorschlage von Boltzmann war ein günstiger Erfolg zu erwarten, wenn die Strahlen ein und derselben intermittierenden Lichtquelle zur Hälfte durch ruhende, zur Hälfte durch schwingende Luft geführt, und dieselben später zur Interferenz gebracht werden. Da hierbei die letzteren Strahlen durch den Wechsel von Verdichtung und Verdünnung abwechselnd eine Verzögerung und eine Vorausschiebung erfahren, *so muß eine schwingende Bewegung der Interferenzstreifen entstehen, welche wegen der Intermittenz der Lichtquelle nach dem stroboskopischen Prinzip verlangsamt erscheint*, also durch Messung verfolgt werden kann. Aus der gemessenen Bewegung der Interferenzstreifen läßt sich alsdann ohne Schwierigkeit die Bewegung der schwingenden Luftsäule berechnen. Die gebotenen Vorteile sind augenfällig, da man neben der Art und Intensität der Bewegung auch gleichzeitig mit größter Schärfe die Schwingungsdauer bestimmen kann.

Es wurde zu dem Ende von Toepler ein Apparat konstruiert, welcher den Vorschlag zunächst auf gedeckte Pfeifen anzuwenden erlaubt. Mit diesem Apparat haben wir eine Reihe von Messungen über Intensitätsverhältnisse usw. der Luftschwingungen angestellt. Dabei hat sich tatsächlich herausgestellt, daß nach möglichster Vermeidung der praktischen Schwierigkeiten durch das nunmehr erweiterte vibroskopische Prinzip ein Beobachtungsverfahren geboten ist, welches sich in bezug auf die Messung kleiner Zeitgrößen unbedenklich als ein sehr genaues Hilfsmittel bezeichnen läßt, wie die im zweiten Paragraphen mitgeteilten Resultate beweisen.

Beschreibung des Apparates. Zur Herstellung des stroboskopischen Sehens mußte zunächst eine bequem und genau regulierbare, intermittierende Lichtquelle geschaffen werden. Es wurde zu diesem Zwecke die bekannte Helmholtzsche Unterbrechungsgabel an den beiden Zinken mit leichten Spaltenschirmen versehen, welche dicht hintereinander stehen und bei der Anregung der Gabel in entgegengesetztem Sinne schwingen. Die Spalten lassen nur beim Übereinandergleiten in der Mittelstellung je einmal ganz kurze Zeit die Strahlen einer dahinter gestellten Lichtquelle hindurch. Fig. 1 zeigt die Zinkenenden *a* und *b* der horizontal gestellten Gabel. Auf das Zinkenende *a*

ist ein Schuh fest aufgeschraubt, welcher ein sehr leichtes Blechrähmchen c mit rechteckiger Öffnung trägt. Auf dieses Rähmchen kann durch kleine Schrauben eine dünne Blechplatte d aufgeschraubt werden, so daß die rechteckige Öffnung in c bis auf eine Spalte von beliebig zu wählender Weite verdeckt ist. An dem unteren Stimmgabelende b ist eine ganz

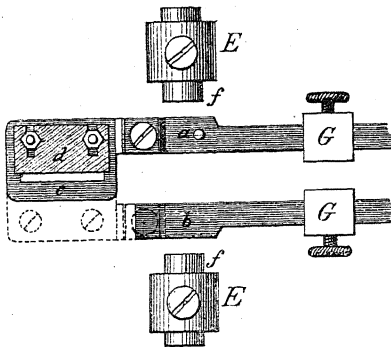


Fig. 1.

analoge Vorrichtung angeschraubt, bei welcher jedoch alle Teile in umgekehrter Lage geordnet sind. Die beiden Spaltenvorrichtungen schwingen so nahe hintereinander, als es ohne gegenseitige Störung zulässig ist. EE sind die mit verstellbaren Fortsätzen FF versehenen Pole des Elektromagneten, G und G die auf den Zinken verschieb-

baren Laufgewichte zum Tieferstimmen. Eine Erhöhung des Tones der Gabel erhält man, indem man die parallelen Beine der Gabel durch eine in der Figur nicht weiter angedeutete, eigentümliche Klemmvorrichtung vom Grunde der Gabel aus sukzessive verkürzt.

Die obere Gabelzinke dient zur Stromunterbrechung in den Windungen des Elektromagneten E und somit zur selbsttätigen Unterhaltung der Schwingungen. Es tritt nämlich bei a ein gekrümmter Stift hervor (in der Figur nicht abgebildet), welcher seitlich in ein Quecksilbernäpfchen eintaucht, so daß der durch die Gabel und den Elektromagneten geleitete Strom beim Aufwärtsschwingen unterbrochen wird, wie bei der Helmholtzschen Gabel. Man kann jedoch die Exkursionen beträchtlich steigern, wenn man dafür sorgt, daß die Stromschließung während der Aufwärtsbewegung des Gabelendes a sehr merklich länger dauert, als bei der Abwärtsbewegung. Diesen Zweck erreicht man am einfachsten durch einen kupfernen, am Ende konisch verzüngten Unterbrechungsstift. Derselbe ist ganz mit isolierender Substanz überzogen und nur seine End-

fläche, welche versuchsweise bis auf einen passenden Querschnitt abgefeilt wird, ist nackt. An diesem adhärirt das Quecksilber durch Amalgamation leicht in Form eines Fadens. Wird nun die Gabel stark angeschnellt, indem man gleichzeitig den Quecksilbernapf durch Handhabung einer Schraube von unten nähert, so wachsen die Exkursionen sehr rasch und das Auge sieht den Unterbrechungsfunken um etwa 2 mm gewissermaßen über der Quecksilberoberfläche schweben. Unsere Gabel gibt bei ihren tieferen Tönen mit einem Zink-Eisenbecher leicht Exkursionen von 6—7 mm¹⁾, und schwingt so viele Stunden fort. Das Quecksilber wird nicht mit Alkohol oder Wasser bedeckt.

Da bei unserer Einrichtung die Relativbewegung beider Spalten gleich zu setzen ist der doppelten Bewegung einer einzigen Spalte, so ist leicht zu erkennen, daß man zur Herstellung des stroboskopischen Sehens ziemlich weite Spalten anwenden kann, was mancherlei Vorteile hat. Man kann die Spaltenvorrichtung natürlich sehr bequem auch zur subjektiven Beobachtung von Schwingungen benutzen, indem man durch die vibrierenden Spalten mit Auge oder Fernrohr nach dem abgestimmten, schwingenden Körper hinblickt. Bei den vorliegenden Beobachtungen waren die Spalten stets vor der Öffnung eines Heliostaten aufgestellt, um ein intermittierendes Strahlenbündel zu erhalten. Hervorzuheben ist für *alle* Benutzungen der Gabel, daß sich die Spalten genau beim Durchgang durch ihre Ruhelage und nicht früher oder später decken müssen, da sonst die Lichtintermittenz, welche zweimal während einer Gabelschwingung wiederkehrt, zwei ungleiche Zeitintervalle bildet.

Damit das stroboskopische Sehen deutlich werde, muß die Zeit, während welcher Licht durch die Spalten dringen kann, immer klein sein im Verhältnis zu der Zeit einer Halbschwingung der Gabel. Nennt man letztere Zeit T , die Zeit des Licht-

¹⁾ *Demerkung.* Denselben Erfolg könnte man, wie leicht einzusehen, auch dadurch erzielen, daß man zwei genau gleichgestimmte Unterbrechungsgabeln derart kombiniert, daß je eine den Strom des Elektromagneten der anderen unterbricht. Die Schwingungen würden einen Phasenunterschied von $\frac{1}{4}$ Schwingung annehmen, so daß jede Gabel nur während der günstigen Hälfte ihrer Bewegung von ihrem Magneten affiziert würde.

durchganges t , ferner b die Spaltenweite und a die Amplitude der Bewegung, so findet sich leicht, daß

$$t = \frac{2T}{\pi} \cdot \arcsin \frac{b}{2a},$$

oder bei kleiner Spaltweite

$$\frac{t}{T} = \frac{b}{\pi a}$$

ist. Ist also $b = 1$ mm, $a = 3$ mm, so ist das Verhältnis

$$\frac{t}{T} \text{ nahe } = \frac{1}{9},$$

was bei den Versuchen bereits genügt. Trägt man die Zeit als Abszisse, die Helligkeit als Ordinate auf, so gestaltet sich der periodische Verlauf der Helligkeit graphisch, wie in Fig. 2¹⁾.



Fig. 2.

Vor der Beschreibung der andern Teile des benutzten Pfeifenapparates verweisen wir zunächst auf die Skizze Fig. 3, aus welcher die allgemeine Zusammenstellung ersichtlich ist. Auf die richtige Wiedergabe der Dimensionen ist hierbei nicht Rücksicht genommen; dieselben finden sich weiter unten. H ist ein Heliostat, in dessen Rohr eine mikrometrisch zu regulierende Spalte s eingesetzt ist. Dicht vor derselben werden die vibrierenden Stimmgabelspalten v genau in demselben Niveau aufgestellt. Auch die Spalte s hat bei den Versuchen, wie unten zu ersehen, einen bestimmten Zweck. Die horizontalen Lichtstrahlen gelangen von v aus auf das Ende der lotrecht gestellten Pfeife P . Dieselbe hat eine dünne, genau eben geschliffene Deckplatte e von Eisen, welche hermetisch an die Plangläser gg schließt. Letztere bilden zur Hälfte Teile der Pfeifenwand, zur Hälfte ragen sie über die Platte e hervor. Die Pfeife ist so aufgestellt, daß die von v ausgehenden Lichtstrahlen halb durch die Pfeife, halb dicht über der Deckplatte durch die beiden Glasscheiben gg gehen. In der Richtung der Strahlen folgt dann ferner das Interferenzprisma f , mit seiner brechenden Kante ebenfalls

¹⁾ Auch Prof. Mach in Prag benutzt die elektromagnetische Gabel, jedoch mit einfachem Spaltenschirm zu vibroskopischen Versuchen.

genau in die Ebene der Platte *e* eingestellt. Wird durch einen Schirm *d* mit entsprechender Öffnung störendes Seitenlicht abgehalten, so kann man sehr leicht in einiger Entfernung hinter der Pfeife die Fresnelschen Interferenzlinien beobachten. Zu dem Ende ist ein Rohr *k* mit Lupe *o* und Fadenkreuz *i* in der Strahlenrichtung aufgestellt, so daß das beobachtende Auge den Kreuzungspunkt der Fäden auf der Interferenzerscheinung deutlich projiziert sieht.

Sehen wir vorläufig von weiteren Einzelheiten ab, so ist klar, daß durch das Tönen der Pfeife die Lichtstrahlen, welche durch die Pfeife gingen, im Momente der Luftverdichtung eine Verzögerung, bei der Luftverdünnung eine Vorauseilung erfahren. Im ersten Falle müssen die Interferenzstreifen nach abwärts, im zweiten nach aufwärts vor dem Fadenkreuz rücken,

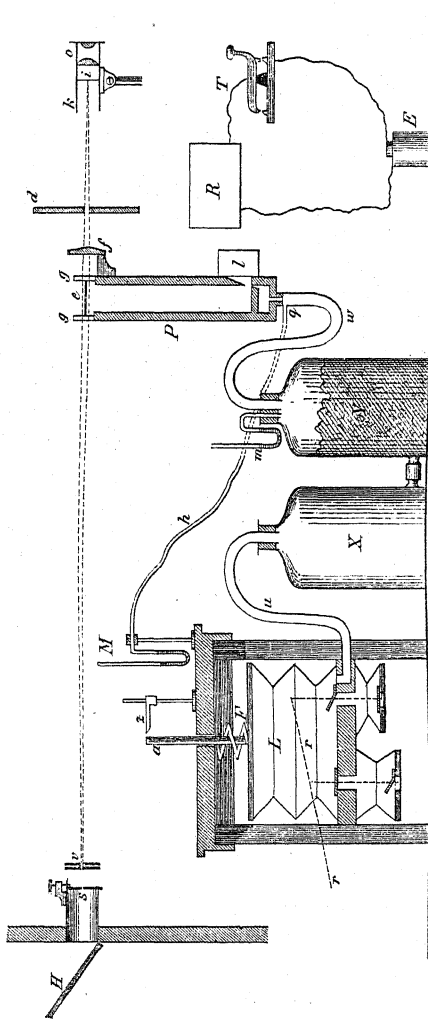


Fig. 3.

wie ohne Erörterung zu verstehen ist. Sind die Stimmgabelspalten in Ruhe, so daß also konstant Licht auf die Pfeife fällt, so schwingt die Interferenzfigur so schnell wie der Pfeifen-

ton. Daher wird die Erscheinung beim Anblasen der Pfeife sofort verworren, weil das Auge den Schwingungen nicht folgen kann. Wenn aber die Stimmgabel schwingt, das Licht also intermittiert, so tritt stroboskopisches Sehen ein und bei hinreichendem Einklange kann die Dauer einer Schwingung der Streifen sehr leicht bis auf 5 Sekunden und mehr gebracht werden.

Soll die stroboskopische Bewegung der Interferenzfigur gemessen werden, so sind jedoch mancherlei Schwierigkeiten zu beachten, welche bei unserem Apparate aber glücklich beseitigt werden konnten. Zunächst ist die Bewegung der Interferenzstreifen bei einmaligem Durchgang des Lichtes durch die Pfeifendicke zwar sichtbar, aber viel zu klein zu genauen Messungen. Es wurde daher das Licht zwischen den Platten *gg* (Fig. 3) sowohl innerhalb als außerhalb der Pfeife durch Spiegelung oftmals hin und her geführt, bevor dasselbe auf das Prisma *f* gelangte. Die Beschaffenheit des gedeckten

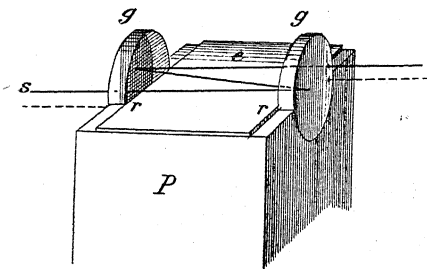


Fig. 4.

Pfeifenendes ist deutlicher aus Fig. 4 zu ersehen. Die Glasplatten *gg* waren kreisförmig und so genau planparallel, daß sie mit dem Theodoliten geprüft keine meßbare Ablenkung hindurchgehender Strahlen bewirkten. Auf der äußeren

Seite wurden sie bis auf ein kleines Segment belegt, wie aus den schraffierten Teilen der Fig. 4 zu ersehen ist. Die Platten paßten in halbkreisförmige Ausschnitte der Holzwände der Pfeife und waren 3 mm dick, während die Wanddicke der Pfeife etwa 8 mm betrug. Zuerst wurde nun die geschliffene Eisenplatte *e* auf die ganz ebenen Ränder der Pfeife aufgelegt und mit (in der Figur weggelassenen) Eisenschienen und Schrauben unwandelbar befestigt. Alsdann wurden die Glasplatten an die geschliffenen Kanten *rr* der Deckplatte dicht angelegt und mit Klebwachs am Holze leicht befestigt. Durch Druck mit dem Finger ist es nun bequem dahin zu bringen, daß die spiegelnden Flächen genau parallel stehen, was daran

zu erkennen ist, daß beim Hineinschauen durch eine der un-
belegten Stellen die vielfachen Spiegelbilder der Platte e genau
eine einzige Ebene zu bilden scheinen. Auf diese Weise konnte
es erreicht werden, daß die in der Richtung von s (Fig. 4) ein-
fallenden Strahlen in und außerhalb der Pfeife elfmal die
Pfeifendicke durchliefen und doch noch später sehr schöne
Interferenzlinien zeigten (natürlich nur bei direktem Sonnenlicht).

Nachdem in der eben besprochenen Weise die Spiegel
justiert waren, wurde das ganze Pfeifenende zur vollkommenen
Dichtung und Befestigung mit Wachs umgossen (natürlich mit
Ausnahme des Teiles der Deckplatte e gerade zwischen den
Spiegeln). Es ist jedoch noch eine Schwierigkeit zu beseitigen,
welche sich alsbald bei Vorversuchen herausstellte. Trotz der
dicken Holzwände der Pfeife und der Verschraubungen am
Ende derselben hat man bei starkem Tönen auf die Bewegung
der Pfeifenwände Rücksicht zu nehmen. Durch das Mit-
schwingen der Wände entsteht nämlich eine Vibration der
Spiegel, welche ohne Vorsichtsmaßregeln sogar eine weit größere
Bewegung der Interferenzfigur veranlassen kann, als der Wechsel
der Luftdichte in der Pfeife.¹⁾ Es genügte jedoch vollkommen,
das Pfeifenende, bevor die Spiegel nach obiger Vorschrift ein-
gesetzt wurden, von allen vier Seiten her in sehr starke,
schwere, hufeisenförmige Klemmvorrichtungen sehr fest ein-
zuspannen (auch diese sind in der Figur weggelassen). Ferner
ist, wie Fig. 3 nur andeutet, das Interferenzprisma mit der
Pfeifenwand fest verbunden. Natürlich würde eine Erschütterung
des Prismas ebenso schädlich sein, wie die der Spiegel. Aber
jene Einklemmung des Pfeifenendes beseitigt diese Störungen
hinreichend. Man hat außerdem ein sehr bequemes Mittel,
vor jedem Versuch den Einfluß der Wanderschütterung zu
kontrollieren. Man braucht nur die untere Hälfte der Glas-
scheibe gg (Fig. 3) zu verdecken, so daß nur Licht über der
Pfeife aufs Prisma fällt. Schiebt man dann Prisma und Lupe
auf ihren Trägern etwas aufwärts, so erscheint eine Interferenz-
figur von solchen Strahlen, die nur außerhalb der Pfeife ver-

¹⁾ Aus diesem Grunde ist das Resultat der Vorversuche, welches
in einer Notiz des K. K. akademischen Anzeigers in Wien mitgeteilt
wurde, etwas zu groß; man vergleiche die unten mitgeteilten genauen
Messungen.

laufen. Schwingen nun die Streifen beim Tönen der Pfeife mit, so rührt in diesem Falle die Bewegung allein von den Spiegeln oder dem Prisma her. Es war nun dieser Fehler durch obiges Hilfsmittel zwar nicht *absolut* zu vermeiden, denn bei möglichst starkem Anblasen gab die Wanderschütterung immer noch bei elfmaliger Reflexion eine Verschiebung der Interferenzfigur um etwa die Breite eines Interferenzstreifens. Allein ihr Einfluß konnte tatsächlich vernachlässigt werden bei den mäßigen Pfeifentönen, welche in den ersten Versuchsreihen des folgenden Paragraphen gemessen wurden. Die durch die Luftschwingungen veranlaßte Streifenverschiebung betrug hingegen selbst bei den schwächsten Pfeifentönen mehrere ganze Streifenabstände.

Wir wollen nun beschreiben, wie mit dem Apparate genaue Messungen ausgeführt werden. Es sei daher vorausgesetzt, daß die Pfeife durch einen konstanten Luftstrom angeregt werde, von dessen Erzielung noch unten die Rede sein wird. Ferner seien Stimmgabel und Pfeife so abgestimmt, daß die stroboskopische Schwingung der Interferenzlinien etwa 3 bis

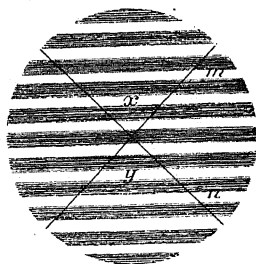


Fig. 5.

5 Sekunden dauert. Das Fadenkreuz wird zu den Streifen so angestellt, wie es Fig. 5 zeigt. Es ist nun bekannt, daß man zwar nicht mit Genauigkeit eine beliebige Stellung des Fadenkreuzungspunktes *zwischen* je zwei benachbarten Streifen abschätzen kann; es ist aber nicht minder bekannt, daß man mit einer sehr bemerkenswerten Genauigkeit erkennen kann, wenn der Kreuzungspunkt *mit der Mitte* eines dunklen oder

hellen Streifens koinzidiert, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man das Kreuz irgend eines feinen Winkelmeßapparates mikroskopisch wiederholt auf ein und denselben Streifen einstellt. Man erhält übereinstimmende Resultate, namentlich, wenn man durch passende Regulierung der Spaltenbreite die Streifen recht schwarz erscheinen läßt. Dies ist aber mittels der fixen Spalte *s*, welche mitten hinter der intermittierenden Spalte *v* steht (Fig. 3), während des Versuches ohne Störung der übrigen Teile möglich.

Es erhellt aus dem Gesagten, daß man auch bei langsamer Schwingung der Streifen nach oben und unten mit großer Zuverlässigkeit die Zeitpunkte angeben kann, in denen das Fadenkreuz scheinbar gerade über die Mitte eines hellen oder dunklen Streifens rückt. Bei unseren Versuchen war es nicht nötig, monochromatisches Licht zu benutzen, da wir vorläufig nur Pfeifenklänge untersuchten, bei denen in Maximo fünf dunkle Streifen bei einer Schwingung durchs Fadenkreuz gingen. Die mittleren Streifen der Interferenzfigur sind aber kaum farbig gesäumt, so daß wir im Interesse der Helligkeit weißes Licht wählen konnten, dann aber natürlich in der Rechnung die Wellenlänge der hellsten Spektralstrahlen zugrunde legen mußten.

Der Beobachter hatte nun, ins Okular o (Fig. 3) blickend, einen Taster T zur Hand, mit welchem ein galvanisches Element E geschlossen werden konnte, so daß auf dem Papierstreifen eines elektromagnetischen Registrierwerkes R die obigen Durchgangspunkte registriert wurden. Zugleich aber war in einer anderen Schließung ein in der Figur nicht verzeichnetes Sekundenpendel eingeschaltet, welches auf demselben Papierstreifen Sekundenpunkte markierte. Auf diese Weise war es möglich, die registrierten Beobachtungen auf absolutes Zeitmaß umzurechnen. Es ist nun sofort klar, daß die Abstände der vom Beobachter registrierten Punkte periodisch variieren müssen und daß aus denselben bei hinreichender Anzahl der registrierten Punkte der Verlauf der Dichtigkeitsänderung im Knoten, also auch die Bewegung der Luftteilchen in der Pfeife und Intensitätsverhältnisse der etwa vorhandenen Obertöne berechnet werden können.

Als Beispiel geben wir in Fig. 6 naturgetreu in wirklicher Größe das Ansehen eines Stückes des Streifens, welcher zu den ersten Messungen des folgenden Paragraphen diene, Messungen bei sehr geringer Tonstärke, welche, wie die Rechnung zeigt, bis auf eine äußerst kleine mittlere Differenz mit einer einfachen Sinusbewegung der Luftteilchen übereinstimmen. In der Horizontallinie von m bis m' sind die vom Sekundenpendel markierten Punkte, in der Linie nn' die Punkte des Beobachters zu finden. Eine ganze Auf- und Abwärtsbewegung der Interferenzlinien umfaßt also das Stück des

ragt, stets ein und dieselbe Höhe beibehält, was an einem seitlich angebrachten Zeiger z mit Leichtigkeit beurteilt werden kann. Allein das Belastungsgewicht schwankt dabei und bewirkt durch seine träge Masse in L Stöße, welche sich wellenartig bis zur Pfeife fortpflanzen. Diese Stöße aber müssen die Erscheinung trüben. Wenn man bedenkt, daß eine stroboskopische Streifenschwingung von 5 Sekunden Dauer nicht weniger als 900 Pfeifenschwingungen zusammenfaßt, so ist leicht zu verstehen, daß durch rasche Schwankungen in den gesetzmäßigen Elongationen ein Mattwerden der bewegten Interferenzstreifen entsteht, welches dieselben leicht bis zur Unkenntlichkeit verwischt. Der Masseneinfluß des Belastungsgewichtes läßt sich zum größten Teile unschädlich machen, indem man dasselbe gänzlich durch eine leichte, aber starke Feder F (Fig. 3) ersetzt, welche mit Hilfe des Zeigers z wie oben auf nahe konstanter Spannung erhalten wird. Nun blieben hauptsächlich noch die Stöße der Klappenventile unschädlich zu machen. Dies gelang denn auch, indem zwischen Gebläse und Pfeife zwei sehr große Glasballons eingeschaltet wurden, von denen der zweite zum größten Teil mit etwa nußgroßen, rauhen Kalksteinstücken gefüllt war. Wellenförmige Stöße, welche sich von L über u und X nach Y fortpflanzen, werden durch die vielen Reflexionen in der Füllung fast ganz vernichtet, während der Widerstand gegen die strömende Bewegung der Luft nicht beträchtlich ist. Ferner haben wir bei den meisten Versuchen zu den Leitungen u und w sehr lange Gummischläuche von etwa $\frac{3}{4}$ Zoll Weite benutzt. Zwei Wassermanometer m und M zeigten den Druck, ersteres im Ballon Y , das zweite unmittelbar unter dem Pfeifenhalse. Das letztere war der den Luftstrom regulierenden Hilfsperson unmittelbar sichtbar, indem ein Schlauch h die Verbindung von M bis q vermittelte. Es gelang nun leicht, wenigstens bei den schwächeren Erregungen der Pfeife, den Windstrom so konstant zu erhalten, daß das Manometer M sich während der Versuche gar nicht merklich änderte. Allerdings erschienen die Interferenzstreifen während der stroboskopischen Schwingung stets etwas matter, als im Ruhezustande, jedoch nicht so sehr, daß es die Messungen gehindert hätte.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß sich sowohl

die Pfeife, als auch die Lupe und der Taster auf gesonderten, soliden Unterstüzungen befanden, damit außer der Luftschwingung nicht etwa anderweitige Erschütterungen im Gesichtsfelde gesehen werden konnten.

Schließlich geben wir die wichtigsten Dimensionen des oben beschriebenen Apparates. Da zunächst eine Prüfung über die Genauigkeit der Messungen nötig war, so wählten wir eine solche Pfeife, welche bei nicht zu starker Anregung voraussichtlich den Grundton möglichst rein liefert, d. h. eine im Verhältnis zur Länge sehr dicke Pfeife. Unsere Pfeife sprach sehr gut an. Bei starkem Blasen, bei dem allerdings Obertöne hinzutraten, war der Klang sehr voll und kräftig. Um den Grundton ganz in den ersten Oberton überspringen zu lassen, mußte jedoch mit einer ganz beträchtlichen Vehemenz geblasen werden. Alle Beobachtungen wurden mit Sonnenlicht gemacht, da Lampenlicht schon bei dreimaliger Reflexion zu lichtschwache Interferenzlinien gab.

Schwingungszahl der Pfeife pro Sekunde . . .	181
Länge der Pfeife	360 mm
Querschnitt der Pfeife	59 und 52 „
Breite der Mundöffnung	52 „
Höhe der Mundöffnung	17 „
Dicke der Luftsäule zwischen den Glasplatten <i>gg</i> (Fig. 3).	58,5 „
Dicke der Glasplatten	3 „
Breite der lichtgebenden Spalte bei den meisten Versuchen	0,4 „
Exkursionen der schwingenden Spalten . . 5 bis	6 „
Abstand von <i>v</i> bis <i>g</i> in Fig. 3	4500 „
Abstand von der Pfeife bis zur Lupe	750 „

Außerdem sei noch erwähnt, daß es viel bequemer ist, während der Versuche die Pfeife und nicht die Gabel abzustimmen. Die Pfeife besitzt daher neben der Mundspalte zwei Schieber (*l* in Fig. 3), welche der Beobachter nur seitlich hervorzuziehen braucht, um die Pfeife tiefer zu stimmen. Ferner braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß es sich für bestimmte Fälle der Untersuchung empfehlen würde, das Licht in der Längsrichtung durch die gedeckte Pfeife zu senden.

2.

Luftschwingung in der gedeckten Pfeife.

Es wurde mit unserer Pfeife, welche wohl als eine sehr weite bezeichnet werden kann, zunächst die Luftschwingung bei möglichst mäßigem Anblasen analysiert. Da hierbei mit Sicherheit der einfachste Fall einer stehenden Welle zu erwarten war (Helmholtz, Tonempfindungen S. 152), so konnten wir an diesem Falle die Genauigkeit unserer Messungen prüfen. Alsdann wurde das Verfahren auf Schwingungen ausgedehnt, bei welchen Obertöne deutlich hervortraten.

Schwingungen bei schwachem Anblasen. Bei 28 mm Wasserdruck (es ist stets der bei q , Fig. 3, gemessene zu verstehen) begann die Pfeife zu tönen, jedoch matt. Der Druck wurde auf 40 mm gesteigert und dort konstant erhalten. Vor der Beobachtung war das Fadenkreuz auf den mittleren dunklen Streifen der Interferenzerscheinung (Fig. 5) eingestellt. Es zeigt sich nun beim Tönen, daß die Exkursionen der Streifen nach oben und unten, soweit man schätzen konnte, gleich waren. Die Streifen rückten etwa um den Abstand x bis y der Fig. 5 auf und nieder, was vorläufig andeutete, daß bei unserer Pfeife Verdichtungen und Verdünnungen gleich waren. (Nach den Versuchen von Kundt ist dies je nach der Stellung der Mundspalte durchaus nicht bei allen Pfeifen der Fall.) Die Gesamtverschiebung der Streifen wurde vorläufig auf etwa das 2,4 bis 2,5fache des Abstandes zweier dunkler Streifen geschätzt. (Diesen Abstand nennen wir in der Folge kurz „Streifenabstand“.)

Nun wurde diese Schwingung registriert. Es ist aus Fig. 5 ersichtlich, daß bei einer Halbschwingung zwischen x und y drei Minima und zwei Maxima der Helligkeit durchs Fadenkreuz gehen mußten, welche auf dem Papierstreifen (Fig. 6) Gruppen von je fünf Punkten lieferten. Es ist leicht einzusehen, daß in der Fig. 6 A dem mittleren, C und C' den beiden äußeren dunklen Streifen entsprechen, während B und B' die Durchgangspunkte der beiden Helligkeitsmaxima sind. Die Punkte D und D' gehören den beiden benachbarten Halbschwingungen an. Halbiert man die Abstände DC und $C'D'$, so stellen die Halbierungspunkte E und E' offenbar den Anfang und das Ende unserer Halbschwingung dar. Schon der

bloße Anblick der Punktreihe zeigte, daß bei dieser Tonstärke die Schwingungsform kaum wesentlich von einer einfachen Pendelbewegung abweichen kann. Der Umstand, daß die Abstände DC , $D'C'$ usw. der letzten Punkte benachbarter Halbschwingungen durchschnittlich denselben Wert hatten, bestätigte, daß bei unserer Pfeife Luftverdichtung und Verdünnung gleich groß waren, wenigstens innerhalb der Grenzen der Meßbarkeit.

Wir wollen zunächst nur die Bewegung der Interferenzstreifen als eine gegebene, stehende Schwingungserscheinung im Auge behalten und erst später über den Zusammenhang mit der Luftbewegung in der Pfeife sprechen; dieser Zusammenhang ist jedoch ein äußerst einfacher. Jede pendelartige Bewegung der Luftsäule erzeugt eine pendelartige Bewegung der Streifen.

Es war nun zunächst zu untersuchen, bis zu welchem Grade der Annäherung die bei obigem schwachen Tone registrierten Streifenschwingungen mit einer einfachen Sinusbewegung übereinstimmen. Zu dem Ende wurden die registrierten Punktabstände bei einer größeren Zahl von Schwingungen gemessen. Es ist klar, daß die stroboskopische Erscheinung bei den Beobachtungen trotz aller Vorsicht bald rascher, bald langsamer verlief; da dieselbe ja aus dem Unterschiede zweier Schwingungserscheinungen entspringt, deren kleinste Schwankungen somit von großem Einflusse sind. Von den registrierten Schwingungen wurden daher nur solche der Messung unterzogen, deren vorhergehende und nachfolgende möglichst gleichbeschaffen waren, während welcher also die Tonhöhe nicht bedeutend variiert haben konnte. Die Länge der in den folgenden Beobachtungsreihen gemessenen stroboskopischen Schwingungen betrug auf dem Papierstreifen zwischen 2,6 und 5 Sekunden, je nach der Abstimmung von Pfeife und Gabel, welch letztere natürlich auf die *Art* der Streifenbewegung *keinen Einfluß* hat. Die mittlere Dauer unserer stroboskopischen Schwingungen war also etwa 3,8 Sekunden.

Wir wollen nun die Zeit bei allen Schwingungen vom Durchgange des mittleren schwarzen Streifens, also vom Moment der Markierung des Punktes A in Fig. 6 zählen. Für den Fall einer einfachen Pendelbewegung ist dann die Ausweichung

des mittleren Streifens zur Zeit t gegeben durch die bekannte Formel

$$(1) \quad y = a \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Wir wollen ferner zur Messung dieser Ausweichungen die Distanz zweier schwarzer Streifen als Einheit wählen. Verfließt nun von der Markierung von A bis zu derjenigen des Punktes B (Fig. 6) die Zeit t_1 , so ist hier $y = \frac{1}{2}$, da der Punkt B dem nächsten hellen Streifen entspricht. Wir erhalten also:

$$(2) \quad \frac{1}{2} = a \sin \frac{2\pi t_1}{T}.$$

Ebenso ergibt sich

$$(3) \quad 1 = a \sin \frac{2\pi t_2}{T},$$

wenn man t_2 die auf dem Papierstreifen zu messende Zeit der Markierung des Punktes C nennt, da C den Durchgang des nächstfolgenden dunklen Streifens bezeichnet. Ebenso ist noch auf dem Papierstreifen der Abstand AE als Maß für die Zeit $T/4$ gegeben. Es ist klar, daß sich dann verhalten müssen:

$$(4) \quad t_1 : t_2 : \frac{T}{4} = AB : AC : AE.$$

Ebenso muß sich verhalten

$$(5) \quad t_1 : t_2 : \frac{T}{4} = AB' : AC' : AE'.$$

Um nun aus einer größeren Anzahl von registrierten Schwingungen die Unregelmäßigkeiten tunlichst zu eliminieren, so wurden von allen brauchbaren Schwingungen auf dem Papierstreifen unmittelbar die drei Distanzen $BB' = b$, $CC' = c$ und $EE' = e$ gemessen und für die ganze Beobachtungsreihe die Summen sämtlicher b , c und e gebildet, welche Summen wir mit Σb , Σc und Σe bezeichnen wollen. Anstatt der Gleichungen (4) und (5) können wir dann schreiben:

$$t_1 : t_2 : \frac{T}{4} = \Sigma b : \Sigma c : \Sigma e$$

oder

$$t_1 = \frac{\Sigma b}{\Sigma e} \cdot \frac{T}{4} \text{ und } t_2 = \frac{\Sigma c}{\Sigma e} \cdot \frac{T}{4}.$$

Durch dieses Verfahren sind die Ungleichförmigkeiten jedenfalls am zweckmäßigsten eliminiert, weil in diesem Verfahren den stroboskopischen Schwingungen mit längerer Dauer

(welche ohne Zweifel genauer registriert wurden) ein größeres Gewicht beigelegt ist.

Substituiert man die Werte für t_1 und t_2 in die Formeln (2) und (3), so müssen beide für a denselben Wert ergeben, wenn die Streifenbewegung in der Tat einer einfachen Pendelschwingung entspricht, oder wenn man

$$\beta = \frac{\sum b}{\sum e} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ und } \gamma = \frac{\sum c}{\sum e} \cdot \frac{\pi}{2}$$

nennt, so muß die Gleichung

$$\sin \gamma = 2 \sin \beta$$

erfüllt sein.

Zwei vorläufige Beobachtungsreihen ergaben nun zunächst für b , c und e folgende Werte in Millimeter.

I			II		
b	c	e	b	c	e
9	21	34	14	29	46,5
10	22	35	20	48	71
12	30	49	24,5	52	79
15	37	55	23	50,5	75
11	26	39	21	46	67
25	53	77	17	40	64
11,5	26	39	19	46	72
10	24	40	12,5	29	43
12	26	40	16	32,5	46
15	30,5	45,5	10	23	37
$\sum b =$ 130,5	$\sum c =$ 293,5	$\sum e =$ 453,5	$\sum b =$ 177	$\sum c =$ 396	$\sum e =$ 600,5

Das Verhältnis der drei Summen stimmt sehr gut überein. Berechnet man die Winkel β und γ in beiden Fällen, so ergibt sich:

Aus der Beobachtungsreihe I.

$$\begin{aligned} \beta &= 25^\circ 54' & \gamma &= 58^\circ 39' \\ \sin \beta &= 0,436802 & \sin \gamma &= 0,854005. \end{aligned}$$

Aus der Beobachtungsreihe II.

$$\begin{aligned} \beta &= 26^\circ 31' & \gamma &= 59^\circ 21' \\ \sin \beta &= 0,446458 & \sin \gamma &= 0,860297. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\sin \gamma = 2 \sin \beta$, welche die Bedingung ausdrückt, daß die Bewegung eine einfache Sinusbewegung sei,

ist also *sehr nahe* erfüllt. Berechnet man aus Formel (2) die Amplitude und nennt sie a' , nennt man ferner a'' die aus Formel (3) berechnete Amplitude der Streifenschwingung, so erhält man aus den Beobachtungen der Reihe I

$$a' = 1,1447 \quad a'' = 1,1710$$

aus der Reihe II

$$a' = 1,1200 \quad a'' = 1,1624.$$

Dies sind die einseitigen Exkursionen der Interferenzerscheinung, daher die Gesamtverschiebung das doppelte dieser Werte. Die Gesamtverschiebung war vorher auf 2,4 bis 2,5 geschätzt worden, was mit dem Ergebnis der letzteren Werte genügend übereinstimmt.

Hatten diese Vorversuche bereits ein zugunsten der Methode sprechendes Resultat geliefert, so mußte es uns wichtig erscheinen, einige mit größerer Sorgfalt ausgeführte Messungen nach derselben Art anzustellen. Es wurden daher noch drei Beobachtungsreihen mit ein wenig geringerer, aber konstanterer Windstärke angestellt. Die bestgelungenen Aufzeichnungen wurden während der Beobachtung durch ein telegraphisches Zeichen kenntlich gemacht. Die daran vorgenommenen Messungen ergaben folgendes Resultat:

III			IV			V		
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
8,5	17,5	24,5	9	20,5	31	11,5	25	37
7	15,5	23	10,5	22	33	10	23	35
7,5	18	26,5	9,5	21	31	11,5	24	36,5
7	16	24	8,5	20	29	11	23	33,5
8	17,5	26,5	9	20,5	31	11	25	36
13	30	44	12	25	37	13	29	42
13	28,5	44	10,5	23	33,5	12,5	30	44,5
9	20	31,5	11	24	34	14	32	46
9	19	30	12	27,5	40	13	29	42
11	24	35	14	34	50			
14	30	43						
10	22	32						
8	18	27						
$\sum b =$	$\sum c =$	$\sum e =$	$\sum b =$	$\sum c =$	$\sum e =$	$\sum b =$	$\sum c =$	$\sum e =$
125	276	411	106	237,5	349,5	107,5	240	352,5

Werden hieraus wie oben die Werte für β , γ , a' und a'' berechnet, so ergibt sich:

	III	IV	V
β	27° 22'	27° 18'	27° 27'
γ	60° 26'	61° 10'	61° 17'
$\sin \beta$	0,459683	0,458650	0,460974
$\sin \gamma$	0,869782	0,876026	0,877006
a'	1,0877	1,0901	1,0846
a''	1,1497	1,1415	1,1402

Die Bedingung $\sin \gamma = 2 \sin \beta$ oder $a' = a''$ ist also wiederum sehr nahe erfüllt, d. h. die Streifen haben jedenfalls sehr nahe eine einfache Sinusbewegung.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Beobachtungsmethode zu gewinnen, entsteht zunächst die Frage, um wieviel die Lage der markierten Punkte geändert werden müßte, damit die Übereinstimmung mit der einfachen Pendelbewegung eine vollkommene würde. Dies findet sich leicht, wenn man den Wert von γ als richtig annimmt und β aus der obigen Bedingungsgleichung berechnet; mit anderen Worten, wir setzen auf dem Papierstreifen (Fig. 6) die Punkte A , C und C' als im Mittel richtig markiert voraus und suchen, um wieviel die mittlere Lage von B und B' geändert werden müßte, damit die Bewegung dem einfachen Sinusgesetz entspricht. Legen wir dabei die Beobachtungsreihe V zugrunde, welche mit ihrer Abweichung zwischen III und IV in der Mitte liegt, so findet sich, daß zu $\gamma = 61^\circ 17'$ der Wert $\beta = 26^\circ 1'$ gehört. Die Beobachtung ergab $27^\circ 27'$, also eine Abweichung von nur $1^\circ 26'$. Da nun eine ganze stroboskopische Schwingung, welcher ein Winkel von 360° entspricht, im Mittel 3,8 Sek. dauerte, so ist der mittlere Fehler in der Zeitbestimmung der Punkte B und $B' = 0,0151$ Sek., oder aber, man müßte diese Punkte auf dem Papierstreifen nur um je 0,3 mm nach A hin verschieben, damit sie im Mittel der Voraussetzung einer einfachen Schwingung genügen.

Zunächst könnte man diese kleine Abweichung unvermeidlichen Fehlern (etwa der nicht absolut zu vermeidenden Spiegelerschütterung) zuschreiben. Dann ist aber dennoch die

Genauigkeit unserer Methode eine sehr erfreuliche, denn bedenkt man, daß die Schwingungen, deren Dauer in Wirklichkeit $\frac{1}{181}$ Sek. betrug, stroboskopisch auf 3,8 Sek., also im Verhältnis 1:688 verlangsamt erschienen, so beträgt die obige mittlere Abweichung von 0,015 Sek. auf absolutes Zeitmaß reduziert *nur* 0,000022 Sek. Bis auf diese kleine Größe ist also die Zeitbestimmung nach unserer Methode *mindestens* genau.

Es kann bei Betrachtung der Beobachtungsergebnisse auffallen, daß sich jedesmal $\sin \gamma$ kleiner als $2 \sin \beta$ herausstellte. Diese Tatsache würde sich aus einem schwachen Mitklingen der Obertöne der Pfeife ganz gut erklären lassen. Mit Berücksichtigung der Obertöne müßte nämlich die Exkursion der Streifen statt durch Formel (1) in folgender Weise dargestellt werden:

$$(6) \quad y = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_3 \sin \frac{6\pi t}{T} + a_5 \sin \frac{10\pi t}{T} + \dots,$$

da bei gedeckten Pfeifen die geraden Partialtöne fehlen. Behalten wir nur die beiden ersten Glieder der Reihe bei, so ergeben sich zur Berechnung der Koeffizienten a_1 und a_3 folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= a_1 \sin \beta + a_3 \sin 3\beta, \\ 1 &= a_1 \sin \gamma + a_3 \sin 3\gamma. \end{aligned}$$

Man erhält aus den fünf Beobachtungsreihen folgende Werte:

	a_1	a_3	$2(a_1 - a_3)$
I	1,1720	-0,0122	2,3684
II	1,1631	-0,0196	2,3654
III	1,1490	-0,0284	2,3548
IV	1,1399	-0,0231	2,3258
V	1,1383	-0,0250	2,3266

Da die Tonstärke dem Quadrat der Amplitude der Streifenbewegung proportional gesetzt werden kann, so würde die Intensität des Grundtones jene des mitschwingenden Obertones um mehr als das 2000fache übertreffen, wobei also letzterer neben dem ersteren für das Ohr allerdings verschwinden würde. Für die Zulässigkeit der obigen Erklärungsweise spricht jedenfalls die sehr große Übereinstimmung in den Werten

von a_3 , namentlich bei den letzten Beobachtungsreihen. Das negative Zeichen, welches sich aus allen Beobachtungen für a_3 ergibt, hat den Sinn, daß sich Grundton und Oberton in der Weise übereinander legen, wie es in Fig. 7 veranschaulicht ist. In dieser Figur sind die punktierten Linien einfache Sinuskurven, also die getrennten Darstellungen des Grund- und Obertones. Der Oberton macht Berg und Tal der Welle spitzer.¹⁾ Wenn man also ein sehr schwaches Mitklingen des ersten Obertones der gedeckten Pfeife als Ursache der überein-

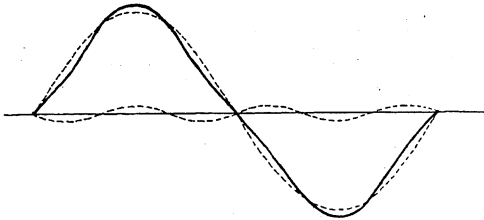


Fig. 7.

stimmenden Abweichung unserer Messungen vom einfachen Sinusgesetz gelten läßt, so darf als konstatiert betrachtet werden, daß bei sehr schwacher Anregung unserer Pfeife Grundton und erster Oberton sich derart zusammensetzen, daß bei beiden die Maxima und Minima der Dichtigkeit zusammenfallen. Bei sehr starker Anregung ist, wie weiter unten ganz unzweifelhaft zu ersehen, das Verhältnis gerade das umgekehrte.

Die in der dritten Kolumne zusammengestellten Werte von $2(a_1 - a_3)$ geben die berechnete Totalverschiebung der Interferenzstreifen unter der Annahme des gleichzeitigen Vorhandenseins der beiden obigen Partialtöne. Diese Werte stimmen noch besser, als die früher berechneten Werte $2a'$ und $2a''$ mit der anfänglichen Schätzung der Totalverschiebung (2,4 bis 2,5 Streifenabstände). Es erscheint also die Annahme des Obertones trotz der Kleinheit der aus den Messungen gefolgerten Werte immerhin als eine sehr wahrscheinliche.

Aus der Bewegung der Interferenzfigur läßt sich nun leicht der Dichtigkeitswechsel der Luft an der betreffenden

¹⁾ In der Zeichnung ist übrigens der Oberton im Verhältnis viel zu stark angenommen.

Stelle der Pfeife berechnen. Nennen wir l die Länge des Weges, welchen das Licht zwischen unseren Glasplatten durchwandert, ferner λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft von normaler Dichte, so entfallen auf jenen Weg bei normaler Luftdichte l/λ Lichtwellen. Sobald die Luftdichte eine Veränderung erfährt, ändert sich ihr Brechungsquotient und die Wellenlänge des Lichtes, und zwar ist die neue Wellenlänge

$$\lambda' = \frac{n}{n'} \lambda,$$

wenn n der ursprüngliche, n' der neue Brechungsquotient der Luft ist. Die Anzahl der Wellenlängen, welche jetzt auf den Weg l entfallen, ist l/λ' . Die Differenz dieser Zahl und der früher auf den Weg l kommenden Wellenzahl ist aber offenbar die Zahl der Interferenzstreifen, um welche sich die Erscheinung bei der Dichtigkeitsänderung der Luft in der Pfeife verschoben hat. Dieselbe ist also

$$k = \frac{l}{\lambda'} - \frac{l}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{n' - n}{n}.$$

Nun kann $n^2 - 1$ und bei Gasen jedenfalls auch $n - 1$ der Dichte proportional gesetzt werden. Bezeichnet daher ρ die ursprüngliche, ρ' die geänderte Luftdichte, so ist $\rho' - \rho$ die Verdichtung,

$$\frac{\rho' - \rho}{\rho} = \frac{n' - n}{n - 1}$$

und

$$k = \frac{(n - 1) l}{n \lambda} \cdot \frac{\rho' - \rho}{\rho}.$$

Es entspricht also der Verschiebung der Interferenzlinien um *einen* Streifenabstand die Dichtigkeitsänderung

$$\rho' - \rho = \rho \cdot \frac{n \lambda}{(n - 1) l}.$$

Da die Dicke der Luftsäule zwischen den Glasplatten 58,5 mm war und dieselbe vom Lichte neunmal durchlaufen wurde, so ist $l = 526,5$ mm zu setzen. Da ferner $n = 1,000294$ und $\lambda = 0,000575$ mm, so ergibt sich

$$\rho' - \rho = \rho \cdot 0,0037.$$

Wir ersehen also, daß die Verdichtung in aliquoten Teilen der normalen Luftdichte erhalten wird, indem man die Anzahl der Streifen, welche das Fadenkreuz passierten, mit

0,0037 multipliziert. Bei obigen Versuchen betrug die Totalverschiebung etwa 2,4 Streifenabstände. Daraus ergibt sich der Unterschied zwischen der größten und kleinsten Dichte der schwingenden Luft im Knoten unserer Pfeife = 0,00888 mal der normalen Luftdichte.

Um hieraus die Veränderung des Luftdruckes zu finden, muß man berücksichtigen, daß die Temperaturänderungen, welche den raschen Dichtigkeitswechsel begleiten, die Druckschwankungen vergrößern. Man hat die obige Dichtigkeitsänderung mit 1,41 zu multiplizieren, um die Druckveränderung zu finden. Die Differenz des größten und kleinsten Luftdruckes im Knoten betrug also bei obigen Versuchen 0,0124 Atmosphären.

Aus dem Gesetz der Dichtigkeitsänderung im Knoten kann endlich das Schwingungsgesetz für jede beliebige Stelle der Pfeife gefunden werden. Da die Dichtigkeitsänderung in unserem Falle sehr nahe das einfache Sinusgesetz befolgte, so muß auch die Luftbewegung in jedem Querschnitt sehr nahe eine einfache Pendelschwingung sein. Daher stellt sich die Exkursion ξ eines Luftteilchens im Abstände x vom Knoten zur Zeit t durch folgende Formel dar:

$$\xi = A \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \sin \frac{2\pi x}{cT},$$

wobei die Zeit t vom Durchgange der Luftteilchen durch die Ruhelage gezählt wird. In der Formel ist T die Schwingungsdauer = $\frac{1}{181}$ Sek., c die Schallgeschwindigkeit (340 m für unser Beobachtungslokal). Ferner ist $cT/4$ die theoretische Pfeifenlänge = 470 mm. Sie ist so beträchtlich größer, als die wirkliche Länge wegen des großen Querschnittes der Pfeife. Der Koeffizient A ergibt sich unmittelbar aus dem früher bestimmten Werte für die Verdichtung. Es ist nämlich, wenn man die normale Luftdichte zur Einheit wählt, und wenn man Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, die Dichte zur Zeit t ausgedrückt durch

$$1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{2\pi A}{cT} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2\pi x}{cT}.$$

Ihr größter Wert im Knoten ist daher $1 + 2\pi A/cT$, ihr kleinster $1 - 2\pi A/cT$, also der maximale Dichtigkeitsunter-

schied = $4\pi A/cT$. Diese Differenz wurde oben ermittelt; sie betrug 0,00888. Daher ergibt sich $A = 1,32$ mm. Mit dieser Bestimmung von A ist die Schwingungsamplitude der Luftteilchen in jedem Querschnitt der Pfeife gegeben. So wird z. B. die Bewegung der Teilchen in der Nähe der Mundöffnung der Pfeife, wo $x = 360$ mm zu setzen ist, ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} \xi &= A \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 360}{1878} \\ &= 1,241 \sin \frac{2\pi t}{T} \text{ mm.} \end{aligned}$$

Die Totalverschiebung (doppelte Amplitude) eines Luftteilchens im Inneren der Pfeife nahe der Mundöffnung war also bei unserem Tone = 2,482 mm. In der Mundöffnung selbst beträgt der Weg eines Teilchens wegen des verringerten Querschnitts 8,116 mm. Wenn wir die Resultate noch einmal zusammenstellen, so erhielten wir beim Anblasen der Pfeife mit etwa 40 mm Wasserdruck:

Dichtigkeitsänderung im Knoten in aliquoten Teilen der Normaldichte . . .	= 0,00888.
Unterschied des größten und kleinsten Luftdruckes im Knoten	= 0,0124 Atm.
Weg eines inneren Luftteilchens nahe bei der Mundöffnung	= 2,482 mm
Weg eines Teilchens in der Mundöffnung selbst	= 8,116 „

Pfeifenklang bei starkem Anblasen. Außer den obigen, mehr zur Kontrolle unserer Beobachtungsmethode ausgeführten Messungen, welche ein günstig zu nennendes Resultat lieferten, machten wir noch eine Messung bei bedeutend stärkerem Anblasen der Pfeifen um den Einfluß starker Obertöne zu bestimmen. Der Luftstrom wurde so weit verstärkt bis das Manometer unter dem Pfeifenhalse 24 mm Quecksilberdruck zeigte. Der Ton der Pfeife war hierbei sehr stark und voll, die Obertöne (wenigstens der erste) deutlich hörbar, der Grundton jedoch war vorherrschend. Die gesamte Verschiebung der Interferenzfigur betrug 4 bis 4,5 Streifenabstände, indem abwechselnd die Streifen m und n der Fig. 5 ins Fadenkreuz rückten.

Bei der allmählichen Steigerung des Luftdruckes im Blasebalg hatte es sich gezeigt, daß die Tonintensität anfangs zwar rasch, später aber in weit geringerem Maße wächst. Der Zusammenhang zwischen Tonstärke und Manometerdruck kann nach unserer Methode sehr genau ermittelt werden und bleiben hierüber noch weitere Mitteilungen vorbehalten. Die Tonhöhe änderte sich bei verstärktem Anblasen sehr merklich.

Indem nun obiger Luftstrom möglichst konstant erhalten und Pfeife und Gabel wiederum abgestimmt wurden, zeigte sich jedoch eine auffallende Veränderung in der Bewegungsart der Interferenzlinien. Ein Blick genügte, um zu erkennen, daß es sich hier nicht um eine einfache Pendelschwingung handelte. Die Streifen verharrten während des weitaus größeren Teiles der Schwingungszeit unbeweglich in ihren extremen Lagen. Der Übergang aus der höchsten Stellung in die tiefste (und umgekehrt) erfolgte nach jeder Halbschwingung fast sprunghaft, was einen ganz eigentümlichen Anblick gewährte und das genaue Registrieren aller einzelnen Streifendurchgänge unmöglich machte, abgesehen davon, daß bei dieser Tonstärke unser Gebläse nicht geeignet war, einen ganz konstanten Luftstrom zu erzielen. Wäre eine Markierung der einzelnen Durchgänge der dunklen Streifen möglich gewesen, so wäre

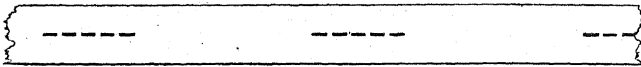


Fig. 8.

die registrierte Schwingung etwa ausgefallen, wie es Fig. 8 zeigt. Die langen Pausen bedeuten die höchste und tiefste Lage der Streifen, die fünf dichtgedrängten Punkte die kurze

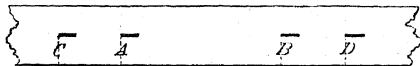


Fig. 9.

Zeit des Überspringens in die andere Lage. Wir mußten uns unter diesen Umständen damit begnügen, je eine Schwingung durch vier Punkte wie CA und BD in Fig. 9 aufzuzeichnen, und zwar bedeutet C z. B. den Anfang, A das Ende der Aufwärtsbewegung, A und B bedeutet die Zeit, während

welcher die Streifen in der höchsten Lage zu ruhen schienen, $B D$ bedeutet endlich die Zeit, während welcher die Streifen wieder in die tiefste Lage hinabsanken, um dortselbst wiederum eine längere Zeit zu ruhen. Die Bewegung während des Auf- und Abwärtsspringens schien, so weit sich beurteilen ließ, eine gleichförmige zu sein. Trägt man daher die Zeit als Abszisse, die Exkursionen der Streifen als Ordinaten auf, so gibt die Fig. 10 ein möglichst annäherndes Bild der Streifenbewegung. Die Zeitabstände der Punkte $C' A' B' D'$ sind die auf

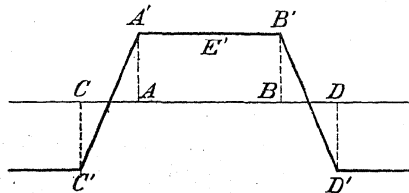


Fig. 10.

dem Papierstreifen registrierten vier Punkte. Das Registrieren selbst dieser vier Punkte war sehr schwierig, weil der plötzliche Übergang von Ruhe in rasche Bewegung den Beobachter stets überrascht und unsicher macht. Daher gelang es nicht, unmittelbar nacheinander mehrere Schwingungen zu verfolgen, vielmehr konnte nur mit Unterbrechungen registriert werden. Gemessen wurden (siehe Fig. 9) die Abstände CA , AB und BD . Als Beispiel geben wir einige Schwingungen.

CA	AB	BD
2,7 mm	6,5 mm	2,7 mm
4,0 „	11,5 „	5,2 „
3,5 „	10,5 „	3,7 „
5,0 „	13,0 „	5,2 „
5,5 „	15,7 „	7,0 „

Die Übereinstimmung muß unter obigen Rücksichten eine befriedigende genannt werden. Es ergibt sich, daß die Zeit, während welcher die Streifen stillstanden, 2,52 mal so groß war, als die Zeit der Auf- und Abwärtsbewegung. Nimmt man, um die Intensität der Partialschwingungen zu berechnen, an, daß die Stücke $C' B'$ und $A' B'$ der Schwingungskurve Fig. 10 geradlinig seien, was jedenfalls der Wahrheit am nächsten

kommt, so stellen sich die Elongationen wiederum durch die Reihe dar:

$$y = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_3 \sin \frac{6\pi t}{T} + a_5 \sin \frac{10\pi t}{T} + \dots$$

Für die Koeffizienten dieser Reihe finden sich folgende Werte:

$$a_1 = 2,6512$$

$$a_3 = 0,6698$$

$$a_5 = 0,2011$$

$$a_7 = 0,0077$$

$$a_9 = -0,0566$$

usw. usw.

Dies sind die Amplituden der Partialschwingungen, welche unsere Bewegung der Interferenzstreifen zusammensetzen. Bei der Rechnung ist die Totalverschiebung der Streifen ($2AA'$

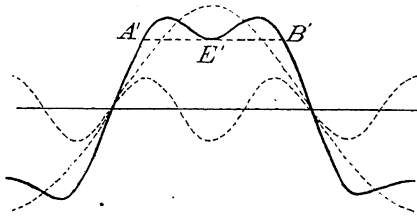


Fig. 11.

Fig. 10) = 4,3 zugrunde gelegt, wie es die Beobachtung im Mittel ergab. Die Amplitude des ersten Obertones ist also 3,958 mal, seine Intensität 15,655 mal kleiner, als die des Grundtones.

Will man von der Reihe für y nur die beiden ersten Glieder unter Vernachlässigung der übrigen berücksichtigen, so ergibt sich eine Bewegung, wie sie durch Fig. 11 dargestellt ist, welche jedoch offenbar der Wahrheit weniger nahe käme. Für diese Annahme berechnen sich a_1 und a_3 sehr einfach, da die Kurve Fig. 11 die Punkte A' , E' und B' mit der Kurve Fig. 10 gemein haben muß. Aus dieser Bedingung findet sich

$$a_1 = 3,0347$$

$$a_3 = 0,8847.$$

also das Verhältnis der Amplituden von Grundton und erstem Oberton = 3,43, das Verhältnis der Intensitäten = 11,77, welche Werte von den unter der vorigen Voraussetzung gefundenen nicht allzusehr abweichen.

Es ist hervorzuheben, daß der Koeffizient a_3 jetzt positiv erscheint, d. h. Grundton und erster Oberton setzen sich bei starker Anregung unserer Pfeife unzweifelhaft so zusammen, daß das Verdichtungsmaximum des ersteren mit dem Minimum des zweiten zusammenfällt, also umgekehrt, wie es bei sehr schwachem Anblasen vorausgesetzt werden konnte.

Da der Verlauf der Luftverdichtung durch dieselbe Kurve Fig. 10 dargestellt wird, so sieht man, daß die Dichtigkeitsänderung in der Pfeife jetzt nicht mehr stetig geschieht, sondern daß dieselbe aus fast plötzlichen Verdichtungs- und Verdünnungsstößen besteht, welche die Pfeife mit der Schallgeschwindigkeit durchlaufen. Es steht dies in guter Übereinstimmung mit Riemanns Untersuchungen über Luftschwingungen mit endlicher Amplitude, welche zu dem Resultate führen, daß sich bei intensiven Luftschwingungen immer derartige Verdichtungsstöße bilden müssen.

Was nun den Unterschied zwischen der größten und kleinsten Dichte im Knoten der Pfeife betrifft, so berechnet sich derselbe in analoger Weise, wie im ersten Falle. Er betrug 0,01887 der normalen Luftdichte, wobei auf einen kleinen Einfluß der Spiegelschütterung Rücksicht genommen ist, welcher hier schon anfang, sehr merklich zu werden. Der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Luftdruck war 0,02242 Atmosphären, die Totalverschiebung eines Luftteilchens im Schwingungsbauch fand sich = 5,275 mm, in der Mundöffnung = 17,24 mm.

Wurde die Pfeife mit 30 mm Quecksilberdruck angeblasen, so fand sich aus der Streifenverschiebung ein Unterschied des Maximal- und Minimaldruckes im Knoten von 0,03366 (etwa $\frac{1}{30}$) Atmosphären. Bei noch stärkerem Anblasen schlug der Ton gänzlich in den ersten Oberton um. Es sei bemerkt, daß die letztere, stärkste Druckschwankung beim Tönen unserer Pfeife noch bei weitem nicht den von Kundt an seiner Pfeife gefundenen Wert von $\frac{1}{18}$ Atmosphären erreicht. Die Kundtsche Pfeife wurde also wohl ganz erstaunlich stark angeblasen.

3.

Bemerkung über die Intensität der Luftbewegung an der Grenze der Hörbarkeit des Schalles.

Da sich durch die vorhergehenden Versuche Boltzmanns Vorschlag als sehr geeignet zur Vervollkommnung vibroskopischer Untersuchungen über Luftschwingungen erwiesen hatte, so schien es uns nicht uninteressant, wenigstens eine beiläufige Ermittlung der Amplitude der Luftbewegung im freien Raume an der Grenze der Hörbarkeit eines schwachen Tones zu versuchen. Die Dichtigkeitsänderungen im freien Raume sind so klein, daß unser Apparat noch einer bedeutenden Verfeinerung bedurft hätte, um dieselben direkt zu messen. Allein man kann sich bei dieser Frage auf die theoretischen Untersuchungen von Helmholtz stützen (Crelles Journal für Mathematik), nach welchen die Intensität der Bewegung für einen entfernten Punkt des freien Raumes berechnet werden kann, wenn die Bewegung in einer tönenden Röhre gegeben ist. Man kann also auch aus der Entfernung, in welcher ein Pfeifenton von bekannter Stärke fürs Ohr erlischt, die daselbst vorhandene Schwingungsweite finden.

Obwohl die Voraussetzungen, welche Helmholtz bei Ableitung seiner Formeln macht, von den Bedingungen unseres Versuches etwas abweichen, so dürfte doch die Menge des von der tönenden Röhre abgegebenen Schalles in beiden Fällen wenigstens der Größenordnung nach nicht verschieden sein, und auf eine größere Genauigkeit, als die Bestimmung der Größenordnung der Schallintensität an der Grenze der Hörbarkeit machen unsere Versuche vorläufig keinen Anspruch.

Wir begaben uns mit unserer oben beschriebenen Pfeife samt Manometer auf einen freien Platz in der Nähe der Stadt und bliesen die Pfeife möglichst genau mit derselben Stärke an, wie es bei den fünf ersten Versuchsreihen der vorigen Abhandlung der Fall war (Windstärke = 40 mm Wasserdruck, Amplitude nahe der Mundöffnung 2,48 mm). Alsdann bestimmten wir die Entfernung, in welcher der Ton für ein gutes Ohr unhörbar wurde. Als Mittel aller Versuche, welche zur Hälfte in der Richtung des herrschenden Windes, zur Hälfte gegen dieselbe gemacht wurden, ergaben sich 115 m.

Helmholtz fand für das Geschwindigkeitspotential im freien Raume den Ausdruck

$$(1) \quad \psi = -\frac{A Q}{2 \pi} \cdot \frac{\cos(k \varrho - 2 \pi n t)}{\varrho},$$

für das in der Pfeife:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{A}{k \cos k \alpha} \sin k(x - \alpha) \cos 2 \pi n t \\ - \frac{A k Q}{2 \pi} \cos k x \sin 2 \pi n t, \end{array} \right.$$

wobei wir bezüglich der Bezeichnung auf die Abhandlung von Helmholtz verweisen. In der letzten Formel ist das zweite Glied klein gegen das erste; dasselbe muß bei der Anwendung auf unserer Pfeife, bei welcher die Rückwand fest war, weggelassen werden, wie sich aus der Bedeutung dieses Gliedes ergibt. Erlaubt man sich diese Vereinfachung, so findet man für diese Differenz der größten und kleinsten Luftdichte im Knoten in aliquoten Teilen der normalen Luftdichte den Wert:

$$A = \frac{A k}{\pi n \cos k \alpha}.$$

Aus der ersten Formel aber ergibt sich, wenn man die Konstante A aus der eben gefundenen Gleichung bestimmt, für den Weg, welchen ein in der Distanz ϱ von der Pfeifenmündung befindliches Luftteilchen im freien Raume während einer Halbschwingung vollführt, der Wert

$$y = \frac{A \cdot Q \cdot \cos k \alpha}{2 \pi \varrho}.$$

Hierbei ist Q der Querschnitt der Pfeife (nicht der Pfeifenmündung), α die Differenz zwischen der wahren und der sogenannten theoretischen Pfeifenlänge, $\pi/2k$ aber die theoretische Pfeifenlänge selbst ($\frac{1}{4}$ Wellenlänge des Pfeifentones).

Bei unserem Versuche nun war

$$A = 0,009$$

$$Q = 3068 \text{ qmm}$$

$$\alpha = 109,5 \text{ mm}$$

$$\frac{\pi}{2k} = 469,5 \text{ mm}$$

daher $k \alpha = 20^{\circ} 59'$ im Winkelmaß. Hieraus ergibt sich der Weg eines Luftteilchens in der Entfernung $\varrho = 115000 \text{ mm}$

von der Pfeifenmündung, in welcher der Ton unhörbar wurde, also die Schwingungsweite an der Grenze der Hörbarkeit gleich

$$0,00004 \text{ mm}$$

das ist etwa $\frac{1}{10}$ von der Wellenlänge des grünen Lichtes.

Diese Kleinheit der Amplitude zeigt, wie erstaunlich empfindlich das Gehörorgan für musikalische Töne ist. Wir müssen ausdrücklich hervorheben, daß die Versuche um die Mittagszeit angestellt wurden, zu welcher Zeit das Tagesgeräusch aus der nahen Stadt nicht ausgeschlossen war. Ein feines, völlig ausgeruhtes Ohr würde gewiß in der Nacht noch viel kleinere Amplituden wahrnehmen.

Folgende Resultate sind nun leicht durch Rechnung zu finden. Die totale Dichtigkeitsänderung während der Schwingung beträgt an der Grenze der Hörbarkeit nach obigen Versuchen $13 \cdot 10^{-8}$ der normalen Luftdichte. Berechnet man ferner die mechanische Arbeit, welche an der Grenze der Hörbarkeit durch den Quadratmillimeter exponierter Fläche pro Sekunde geht, so ergibt sich für dieselbe 10^{-14} kgm.

An das Ohr werden also in der Sekunde etwa $\frac{1}{3} \cdot 10^{-12}$ kgm abgegeben, wenn man den Querschnitt des Gehörganges auf 43 qmm schätzt.

Man wird bei der erstaunlichen Kleinheit dieser mechanischen Arbeit unwillkürlich aufgefordert, die Empfindlichkeit des Ohres für Schall mit der des Auges für Licht zu vergleichen. Folgende Zahlenangabe mag der Abschätzung halber hier erwähnt werden. Nach Thomsen (Pogg. Ann. 125, S. 389) sendet eine Kerze, welche pro Stunde 8,2 g Walrat verzehrt, in der Sekunde $\frac{1}{35}$ kgm in Form von Strahlung aus. Davon kommen also auf 1 qmm in 115 m Distanz $\frac{1}{574} \cdot 10^{-10}$ kgm, also etwa 17 mal mehr, als unsere Pfeife in jener Entfernung in Form von Schall an lebendiger Kraft durch den Quadratmillimeter hindurchstrahlt.

Es ist also unsere Pfeife eine weit schwächere Quelle von lebendiger Kraft als jene Kerze, und man ersieht aus diesen allerdings nur approximalen Zahlen, daß *das menschliche Ohr in der Perzeption der ihm zugedachten Schwingungsarbeit mit dem Auge an Empfindlichkeit rivalisieren kann.*

Boiling-Points of Organic Bodies.

(To the Editors of the Philosophical Magazine and Journal.
Phil. Mag. (4). 42. S. 393. 1871.)

Gentlemen,

You would oblige me very much by inserting the following notice in your Philosophical Magazine. The very interesting treatise of Mr. Burden, „Boiling-points of Organic Bodies“ (Phil. Mag. June 1871, Supplementary Number), contains a mistake; for the author supposes that the velocity of gas-molecules having the temperature of $t^{\circ}C$ is to be found by multiplying the velocity at $0^{\circ}C$ by $1 + t/273$. But this velocity is really found by multiplying by $\sqrt{1 + t/273}$. It thence follows that, at the boiling-point of such substances as have a constant number in the last column of Mr. Burden's Tables, the quotient $(273 + t)^2 / \rho$ is constant, but not at all the velocity of a molecule. In this formula t signifies the boiling temperature, ρ the specific gravity of vapours.

Yours & c.

Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen.¹⁾

(Crelle Journ. 73. S. 111—134. 1871.)

Kirchhoff hat in einer Abhandlung im 71. Bande des Crelle Journ. nachgewiesen, daß auf zwei unendlich dünne in einer bewegten Flüssigkeit, die in der Unendlichkeit ruht, befindliche Ringe von der Flüssigkeit Druckkräfte ausgeübt werden, deren Moment für irgend eine Verrückung gleich dem Moment der Kräfte ist, mit welchen die Ringe aufeinander wirken würden, wenn gewisse elektrische Ströme in ihnen flössen. Er knüpft daran die Bemerkung, daß demzufolge die Ringe scheinbar dieselben Kräfte aufeinander ausüben, wie diese elektrischen Ströme. Diese Bemerkung hat aber nicht allgemeine Gültigkeit²⁾; wenn die Ringe in Bewegung sind, so können die miteinander verglichenen Kräfte sich noch durch Kräfte unterscheiden, die von der Bewegung der Ringe abhängen und deren Moment für jede Verrückung gleich Null ist. In der Tat zeigt die Rechnung, daß dies der Fall ist.

Da Kirchhoff den Beweis für die Richtigkeit des von ihm gefundenen Wertes der in der Flüssigkeit enthaltenen lebendigen Kraft nur für den Fall eines kreisförmigen Querschnittes der Ringe geliefert hat, so will ich mit der allgemeinen Berechnung der in der Flüssigkeit enthaltenen lebendigen Kraft für nicht kreisförmige Ringquerschnitte den Anfang machen; hierauf soll gezeigt werden, wie dieselbe mittelst des sogenannten Hamiltonschen Prinzips zur Berechnung der

¹ Vorläufiger Bericht über diese Arbeit Wien. Anz. 7. S. 146. 7. Juli 1870.

² Als ich Hrn. Kirchhoff in einem Gespräche auf diesen Umstand aufmerksam machte, teilte er mir mit, daß auch er ihn bereits bemerkt habe.

auf die Ringe wirksamen Kraft angewendet werden kann, wobei sich zeigen wird, daß die Art und Weise, wie zuerst die Herren Thomson und Tait dieses Prinzip auf Probleme der Hydrodynamik angewendet haben, im allgemeinen eine unerlaubte ist, in den von diesen Herren betrachteten Fällen aber infolge des Verschwindens gewisser Glieder zu keinem fehlerhaften Resultate führt. Zum Schlusse endlich will ich die direkte Bestimmung der auf jedes Oberflächenelement der Ringe wirksamen Druckkräfte in einer etwas allgemeineren Weise ausführen, was auch der einfachste Weg zu sein scheint, um zu dem für unendlich dünne Ringe geltenden Resultate zu gelangen. Es sei eine reibungslose Flüssigkeit von einer allseitig geschlossenen Fläche O umgrenzt. In derselben seien beliebig viele Körper eingetaucht, von denen alle oder doch einige einen mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllen. An jedem Punkte der Flüssigkeit soll ein im allgemeinen mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential existieren. Außer dem in der Flüssigkeit herrschenden Drucke sollen keine Kräfte auf die Flüssigkeitsteilchen wirken. Setzen wir zuerst voraus sämtliche eingetauchte Körper befinden sich in Ruhe; wir können uns einen für die folgenden Untersuchungen sehr brauchbaren Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential auf folgende Art verschaffen. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Flüssigkeit mit x, y, z die Komponenten der daselbst herrschenden Geschwindigkeit c mit u, v, w ; ferner dieselben Größen für einen anderen Punkt mit x', y', z', u', v', w' ; endlich mit r die Entfernung beider Punkte und definieren drei Größen A, B, C durch folgende über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum auszudehnende Integrale:

$$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{w'}{r} dx' dy' dz', \quad B = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{v'}{r} dx' dy' dz',$$

$$C = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{u'}{r} dx' dy' dz'$$

so ist:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{d^2 A}{dy^2} + \frac{d^2 A}{dz^2}, \quad v = \frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{d^2 B}{dy^2} + \frac{d^2 B}{dz^2}, \\ w = \frac{d^2 C}{dx^2} + \frac{d^2 C}{dy^2} + \frac{d^2 C}{dz^2}; \end{array} \right.$$

ferner

$$(2) \quad \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

Von der Richtigkeit der letzten Gleichung überzeugt man sich, indem man jeden dieser Ausdrücke in folgender Weise transformiert:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{u'(x-x')}{r^3} dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left| \frac{u'}{r} \right| dy' dz' - \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \cdot \frac{du'}{dx'} dx' dy' dz' \end{aligned}$$

und bedenkt, daß im ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raume

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

und an seiner Oberfläche $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$ ist, wenn λ, μ, ν die Richtungskosinus des betreffenden Oberflächenelementes sind. Der Umstand, daß der von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach zusammenhängender ist, stört die Richtigkeit dieser Transformationen nicht, da ja u, v, w überall eindeutig sind. Setzt man ferner:

$$L = \frac{dB}{dx} - \frac{dC}{dy}, \quad M = \frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}, \quad N = \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dz},$$

und transformiert die Differentialquotienten von A, B, C in derselben Weise wie früher, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$$

folgendes:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi} \int do \frac{\mu w_a - \nu v_a}{r}, & M &= \frac{1}{4\pi} \int do \frac{\nu u_a - \lambda w_a}{r}, \\ N &= \frac{1}{4\pi} \int do \frac{\lambda v_a - \mu u_a}{r}, \end{aligned}$$

wobei do ein Element der Flüssigkeitsoberfläche, u_a, v_a, w_a die daselbst herrschenden Geschwindigkeitskomponenten und λ, μ, ν die Kosinus der Winkel sind, welche die ins Innere der Flüssigkeit hinein auf do errichtete Normale mit den positiven Koordinatenachsen bildet. Die Integration ist über die gesamte Flüssigkeitsoberfläche, also sowohl die Oberfläche der

eingetauchten Körper als auch die Begrenzungsfläche 0 zu erstrecken. Nun ist aber

$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} = \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{d^2 A}{dy^2} + \frac{d^2 A}{dz^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) = u$$

infolge der Gleichungen (1) und (2). Wir erhalten daher:

$$(3) \quad u = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{r^3} [(y - y')(\lambda v_a - \mu u_a) - (z - z')(v u_a - \lambda w_a)].$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für v und w . Man sieht die Identität dieser Rechnung mit der von Helmholtz in seiner Theorie der Wirbelbewegung ausgeführten. Ich wiederhole sie hier bloß um die Anwendbarkeit der Formeln Helmholtz' für den Fall eingetauchter Körper analytisch zu beweisen. Wir können uns von derselben übrigens auch durch folgendes Raisonement überzeugen. Wir denken uns die Fläche 0 plötzlich hinweggenommen und unsere Flüssigkeit rings mit ruhender gleichartiger Flüssigkeit umgeben. Gleichzeitig nehmen wir auch sämtliche in die Flüssigkeit tauchende Körper hinweg und erfüllen ihren Platz mit ruhender Flüssigkeit. Es soll nun während eines Moments Reibung zwischen der neuhinzugekommenen und der ursprünglich vorhandenen Flüssigkeit stattfinden, die jedoch augenblicklich wieder aufhört. Es werden sich infolgedessen sämtliche Begrenzungsflächen der ursprünglich vorhandenen Flüssigkeit mit einer unendlich dünnen Schicht rotierender Flüssigkeitsteilchen überziehen, sie werden das, was Helmholtz Wirbelflächen genannt hat. Der Druck der Flüssigkeit wird zu beiden Seiten irgend eines Elementes dieser Wirbelflächen im allgemeinen verschieden sein, dieselben würden sich also sogleich zu bewegen und zu deformieren anfangen. Wir können dies jedoch verhindern, wenn wir auf jedes Flächenelement von außen eine Kraft wirken lassen, welche den auf dasselbe wirkenden Druckkräften das Gleichgewicht hält. Dann bleiben sämtliche Wirbelflächen in Ruhe und die Bewegung der Flüssigkeit ist also dieselbe wie im Falle, wo ihr Inneres durch die festen Körper ersetzt war. Jene Druckkräfte, welche auf die Außenseite der Wirbelflächen wirken, sind dieselben, denen im ersten Falle die Oberflächen der festen Körper ausgesetzt waren. Auf das letztere Problem aber sind die Formeln Helmholtz' unmittelbar anwendbar. Die für u , v , w gefundenen Ausdrücke sind die Komponenten der Kraft, welche

gewisse die Oberfläche durchfließende elektrische Ströme auf einen im Punkte x, y, z befindlichen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums ausüben. Setzen wir nämlich:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} g = \mu w_a - \nu v_a, \quad h = \nu u_a - \lambda w_a, \quad k = \lambda v_a - \mu u_a, \\ i = \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}, \end{array} \right.$$

so erfüllen diese Größen die Bedingung: $g\lambda + h\mu + kv = 0$; eine durch einen Punkt P der Oberfläche gezogenen Gerade G , deren Richtungskosinus den daselbst herrschenden Werten von g, h, k proportional sind, tangiert also die Oberfläche und steht zugleich senkrecht auf der Geschwindigkeitsrichtung H der Flüssigkeit im Punkte P . Sehen wir die Fläche als Wirbelfläche an, so ist i die Intensität und G die Richtung der durch P gehenden Wirbelfäden. Wir wollen nun die gesamte Oberfläche aller Körper sowie die Fläche O derart mit elektrischen Strömen bedeckt denken, daß die Richtung der Ströme in jedem Punkte P der Fläche parallel G ist, also mit den Koordinatenachsen Winkel macht, deren Kosinus $g/i, h/i, k/i$ sind. Die Intensität derselben aber soll so gewählt werden,

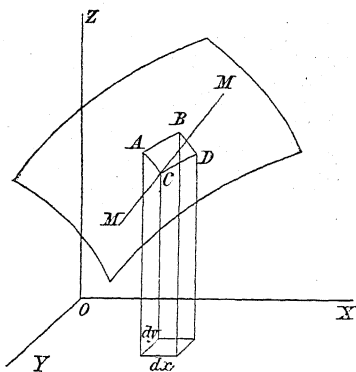


Fig. 1.

daß, wenn wir eine unendlich kleine gerade Linie dq parallel der Richtung H , also senkrecht auf der Richtung der Ströme durch P ziehen, die Gesamtintensität der durch dq gehenden Ströme gleich idq ist. Es erleichtert die Vorstellung, wenn wir uns sämtliche Oberflächen mit unendlich vielen elektrischen Strömen, die unendlich dicht gelagert sind und deren jeder eine konstante (für alle gleiche) unendlich

kleine Intensität ϵ besitzt, bedeckt denken. Die Anzahl der Ströme, welche dann durch unser Linienelement dq gehen, ist idq/ϵ . Schon aus dem Umstande, daß Wirbelfäden nirgends abbrechen können, folgt, daß alsdann sämtliche, die Oberflächen bedeckende elektrische Ströme geschlossen sein werden; daß nirgends welche beginnen oder plötzlich enden können. Man

kann sich hiervon übrigens auch in folgender Weise überzeugen. Wir betrachten ein Element der xy -Ebene $dx \cdot dy$ und legen durch dasselbe ein Prisma, dessen Seiten der z -Achse parallel sind. Dasselbe schneide aus irgend einer der Oberflächen das Element $ABCD$ aus (siehe Fig. 1); die Richtung der Ströme in diesem Elemente sei MN ; dann ist die Zahl der Ströme, welche durch AB gehen:

$$Z_1 = \frac{i \cdot AB \sin(MN, AB)}{\varepsilon}.$$

Der Richtungskosinus der Geraden MN sind g/i , h/i , k/i ; die der Geraden AB , welche auf der y -Achse und der Normalen zur Oberfläche senkrecht steht, sind:

$$\frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}, \quad 0, \quad -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}},$$

woraus man ohne Schwierigkeit findet:

$$\sin(MN, AB) = \frac{h}{i\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}.$$

Ferner ist dx die Projektion von AB auf die x -Achse, daher

$$AB = dx \frac{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}{\nu}.$$

Wir erhalten somit:

$$Z_1 = \frac{h dx}{\nu \varepsilon}.$$

Ebenso erhalten wir für die Zahl der durch AC gehenden Ströme den Wert:

$$Z_2 = \frac{g dy}{\nu \varepsilon}.$$

Die Zahl der elektrischen Ströme, welche durch CD austreten, ist

$$Z_1 + \frac{dZ_1}{dy} dy,$$

ebenso die Zahl der Ströme, welche durch BD austreten

$$Z_2 + \frac{dZ_2}{dx} dx.$$

Der Überschub der aus dem Flächenelemente $ABCD$ austretenden über die in dasselbe eintretenden, also die Zahl der in jenem Flächenelemente anfangenden Ströme, ist somit:

$$\frac{dZ_1}{dy} dy + \frac{dZ_2}{dx} dx = \left[\frac{d\left(\frac{g}{\nu}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{h}{\nu}\right)}{dy} \right] \frac{dx dy}{\varepsilon}.$$

Es ist aber infolge der Gleichungen (4)

$$\frac{g}{\nu} = \frac{\mu}{\nu} w_a - v_a, \quad \frac{h}{\nu} = u_a - \frac{\lambda}{\nu} w_a.$$

Stellen wir die Gleichung der betrachteten Fläche durch $z = f(x, y)$ dar, so ist:

$$\frac{\lambda}{\nu} = -\frac{df}{dx}, \quad \frac{\mu}{\nu} = -\frac{df}{dy},$$

folglich:

$$\frac{d\left(\frac{g}{\nu}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{h}{\nu}\right)}{dy} = \frac{du_a}{dy} - \frac{dv_a}{dx} + \frac{df}{dx} \cdot \frac{dw_a}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{dw_a}{dx}.$$

Bei Bildung der partiellen Differentialquotienten ist hier z infolge der Gleichung $z = f(x, y)$ als Funktion von x und y zu betrachten, daher

$$\frac{du_a}{dy} = \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial u_a}{\partial z} \cdot \frac{df}{dy};$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die anderen partiellen Differentialquotienten. Die geschlungenen ∂ bedeuten eine Differentiation, wobei x , y und z als unabhängig betrachtet werden. Berücksichtigen wir noch, daß allgemein, folglich auch für die Oberfläche die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial w_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_a}{\partial x} = \frac{\partial u_a}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_a}{\partial y} = \frac{\partial v_a}{\partial x},$$

so erhalten wir:

$$\frac{d\left(\frac{g}{\nu}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{h}{\nu}\right)}{dy} = 0.$$

Es nehmen also in unserem Oberflächenelemente keine neuen Ströme ihren Ursprung und da dies von jedem Elemente gilt, so werden nirgends auf den Flächen Ströme plötzlich anfangen oder enden, sondern alle Ströme werden geschlossen sein. Betrachten wir irgend ein Oberflächenelement do , bilden für jedes darin enthaltene Stromelement das Produkt aus seiner Länge in seine Intensität und addieren alle diese Produkte, so ist die so gebildete Summe, die wir mit $\sum \varepsilon ds$ bezeichnen wollen, gleich $i do$; ferner ist, wenn wir die Richtungskosinus der durch do fließenden Ströme, also die Größen g/i , h/i , k/i mit a , b , c bezeichnen:

$$\sum a \varepsilon ds = g do, \quad \sum b \varepsilon ds = h do, \quad \sum c \varepsilon ds = k do,$$

und man überzeugt sich leicht, daß die in Gleichung (3) für u, v, w gefundenen Werte nichts anderes als die durch -4π dividierten Komponenten der elektromagnetischen Wirkung aller jener Ströme auf einen im Punkte x, y, z befindlichen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums sind. Das Geschwindigkeitspotential im Punkte x, y, z ist daher das Potential der elektrischen Ströme auf jenen Magnetpol dividiert durch -4π . (Das Zeichen des Potentials ist so gewählt, daß die positiven Ableitungen gleich den Kräften sind).

Die betrachtete Verteilungsweise elektrischer Ströme auf Oberflächen, welche wir kurz als die Minimumanordnung bezeichnen wollen, besitzt eine erwähnenswerte Eigenschaft, nämlich, daß für dieselbe der Ausdruck

$$P = \frac{1}{2} \sum \sum \iint \frac{e^2 \cos \vartheta ds ds'}{r},$$

also das Potentiale sämtlicher Ströme aufeinander ein Minimum wird. Hierbei sind ds und ds' zwei Elemente der Ströme, r ihre Entfernung, ϑ ihr Winkel, die beiden Integrationen sind, über sämtliche Elemente irgend eines Stromes, die Summationen über alle auf den Oberflächen befindlichen Ströme auszudehnen, Bezeichnen wir die Projektionen des Elementes ds auf die Koordinatenachsen mit dx, dy, dz seine Richtungskosinus mit a, b, c ; dieselben Größen für ds' mit $dx', dy', dz', a', b', c'$, so wird:

$$P = \frac{e^2}{2} \sum \sum \iint \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r}.$$

Wir lassen nun die Lage sämtlicher Ströme auf den Oberflächen unendlich wenig variieren; die Länge der einzelnen Ströme kann sich dabei ändern, jedoch müssen dieselben dann durch Einschaltung neuer Stromelemente geschlossen erhalten werden. Die Gesamtintensität aller Ströme, welche den Querschnitt irgend eines Ringes durchfließen, ist dabei invariabel; sie ist nämlich durch den Zuwachs k bestimmt, den das Geschwindigkeitspotential bei Umkreisung des Ringes erhält. Ist diese Gesamtintensität nämlich gleich \mathfrak{J} , so wächst ihr Potential auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums bei Umkreisung des Ringes um $-4\pi \mathfrak{J}$ und da das Geschwindigkeitspotential gleich dem durch -4π dividierten Potential der Ströme ist, so muß \mathfrak{J} gleich k sein. Die Um-

kreisung ist positiv gerechnet, wenn sie bezüglich einer im Strome schwimmenden Figur von links über vorne nach rechts geschieht. Weil die Variation von P infolge der Lagenänderung sämtlicher ds gleich sein muß der Variation infolge der Lagenänderung sämtlicher ds' , so erhält man:

$$\delta P = \varepsilon^2 \sum \sum \iint \left\{ \frac{dx' d\delta x + dy' d\delta y + dz' d\delta z}{r} \right. \\ \left. - \frac{(dx dx' + dy dy' + dz dz') [(x-x') \delta x + (y-y') \delta y + (z-z') \delta z]}{r^3} \right\}.$$

Um die Differentiale der Variationen wegzuschaffen, integrieren wir den ersten Teil partiell; es ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß sämtliche Ströme geschlossen bleiben, daher die Variationen an der oberen und unteren Grenze gleich sind:

$$\delta P = \varepsilon^2 \sum \sum \int \int \frac{ds ds'}{r^3} \{ \delta x [(y-y') a' b + (z-z') a' c - (x-x') (bb' + cc')] \\ + \delta y [(z-z') c b' + (x-x') a b' - (y-y') (aa' + cc')] \\ + \delta z [(x-x') a c' + (y-y') b c' - (z-z') (aa' + bb')] \}; \\ = \sum \int \varepsilon ds \{ \delta x (cH - bK) + \delta y (aK - cG) + \delta z (bH - aG) \},$$

wenn

$$G = \sum \int \varepsilon ds' \frac{(y-y') c' - (z-z') b'}{r^3} = \int d\sigma \frac{(y-y') k' - (z-z') h'}{r^3},$$

$$H = \sum \int \varepsilon ds' \frac{(z-z') a' - (x-x') c'}{r^3} = \int d\sigma \frac{(z-z') g' - (x-x') k'}{r^3},$$

$$K = \sum \int \varepsilon ds' \frac{(x-x') b' - (y-y') a'}{r^3} = \int d\sigma \frac{(x-x') h' - (y-y') g'}{r^3},$$

gesetzt wird. G , H , K sind also nichts anderes als die Komponenten der Wirkung sämtlicher Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums. Dieselben werden auf den Oberflächen unbestimmt. Wir sahen nämlich, daß sie auf ihrer Außenseite gleich $-4\pi u_a$, $-4\pi v_a$, $-4\pi w_a$ sind; auf der Innenseite dagegen sind sie gleich Null, weil im ganzen Innern der Körper das Potential der Ströme auf einen Magnetpol eindeutig und an ihrer Oberfläche seine Ableitung normal zur Oberfläche gleich Null ist. Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, denken wir uns die Ströme in einer gleichförmigen Schicht von unendlich kleiner Dicke auf den Oberflächen verbreitet. Der Wert der Größen G , H , K ist dann an der Innenseite der Schicht gleich Null und nimmt gegen die Außen-

seite hin gleichförmig bis $-4\pi u_a$, $-4\pi v_a$, $-4\pi w_a$ zu. Die Verschiebungen δx , δy , δz sollen für sämtliche in einer Schicht übereinander liegende Stromelemente gleich angenommen werden. Wir müssen dann, wie sich leicht ausführlicher beweisen läßt, für G , H , K ihre Mittelwerte $-2\pi u_a$, $-2\pi v_a$, $-2\pi w_a$ setzen. Die Variationen δx , δy , δz sind dabei der Bedingung $\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z = 0$ unterworfen, da die Ströme die Oberflächen nicht verlassen sollen. Die Bedingung, daß δP verschwinde, reduziert sich daher auf:

$$\frac{cH - bK}{\lambda} = \frac{aK - cG}{\mu} = \frac{bG - aH}{\nu}.$$

Diese Bedingung ist in der Tat bei der von uns als Minimumanordnung bezeichneten Verteilungsweise der Ströme erfüllt wie man sieht, wenn man für G , H , K die Werte $-2\pi u_a$, $-2\pi v_a$, $-2\pi w_a$ substituiert und bedenkt, daß $a = g/i$, $b = h/i$, $c = k/i$ ist. Wenn Ströme von konstanter Intensität aber veränderlicher Länge auf der Oberfläche (oder auch im Innern) ringförmiger Körper längs der Mittellinie laufend diese zu umkreisen gezwungen sind, so werden sie dann unter dem Einflusse ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung im (allerdings labilen) Gleichgewichte sein, wenn ihr Potential aufeinander ein Minimum ist; also wenn sie sich in der Minimumanordnung befinden, dieselbe hat also Analogie mit der Verteilung statischer Elektrizität auf der Oberfläche eines Leiters. In speziellen Fällen aber könnte die Teilung eines Stromes von der Intensität Null in zwei entgegengesetzte diese Veranschaulichung stören, während das Analogon bei der statischen Elektrizität immer möglich ist. Es ist unmittelbar klar, daß, wenn eine solche Gleichgewichtsposition von Strömen möglich ist, ihr Potential die an das Geschwindigkeitspotential gestellten Forderungen erfüllt. Man könnte hierauf auch den Beweis unserer Sätze gründen. Die Wirkung der Ströme auf einen Magnetpol im Innern der Körper oder außerhalb der Fläche 0 ist dabei Null.

Wir wollen nun die ganze in der Flüssigkeit enthaltene lebendige Kraft berechnen. Dieselbe ist, wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit vorstellt:

$$T = \rho \iiint dx dy dz \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right]$$

φ ist das Geschwindigkeitspotential, also das durch -4π dividierte Potential aller elektrischen Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums. Bezeichnen wir nun das durch -4π dividierte Potential eines einzigen der Ströme auf einen derartigen Magnetpol mit $\delta\varphi$ und eine Summation über alle Ströme auf allen Flächen mit Σ , so ist:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \Sigma \frac{d\delta\varphi}{dx}; \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \Sigma \frac{d\delta\varphi}{dx} \cdot \Sigma \frac{d\delta'\varphi}{dx} = \Sigma \Sigma \frac{d\delta\varphi}{dx} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dx}.$$

In der letzten Formel ist sowohl $\delta\varphi$, als auch $\delta'\varphi$ das durch -4π dividierte Potential eines einzelnen Stromes ($\delta\varphi$ etwa des Stromes S , $\delta'\varphi$ des Stromes S'), und beide Summationen sind über alle Ströme zu erstrecken. Es ist folglich:

$$T = \frac{\rho}{2} \Sigma \Sigma \iiint dx dy dz \left[\frac{d\delta\varphi}{dx} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dx} + \frac{d\delta\varphi}{dy} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dy} + \frac{d\delta\varphi}{dz} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dz} \right].$$

Nun ist aber nach dem Greenschen Satze:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iiint dx dy dz \left(\frac{d\delta\varphi}{dx} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dx} + \frac{d\delta\varphi}{dy} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dy} + \frac{d\delta\varphi}{dz} \cdot \frac{d\delta'\varphi}{dz} \right) \\ & = - \int do \delta\varphi \frac{d\delta'\varphi}{dn} - \int d\omega \delta\varphi \frac{d\delta'\varphi}{dn}, \end{aligned} \right.$$

wobei do ein Oberflächenelement der festen Körper, $d\omega$ aber ein Oberflächenelement der Querschnitte ist, durch die man den von der Flüssigkeit erfüllten Raum zu einem einfach zusammenhängenden machen kann. d/dn bedeutet eine Differentiation in der Richtung der nach der Seite der Flüssigkeit hin gezogenen Normale. $\delta\varphi$ wird zu beiden Seiten jedes Querschnittes mit Ausnahme eines einzigen denselben Wert haben. Es ist dies der Querschnitt, dessen Begrenzungslinie auf der Oberfläche desselben Ringes wie der Strom S liegt. Wir können als Begrenzungslinie jenes Querschnittes diesen Strom selbst wählen. Die Werte von $\delta\varphi$ zu beiden Seiten dieses Querschnittes unterscheiden sich um ϵ , da dies die gemeinsame Intensität aller Ströme ist. Es ist somit

$$\int d\omega \delta\varphi \frac{d\delta'\varphi}{dn} = \epsilon \int d\omega \frac{d\delta'\varphi}{dn},$$

also gleich dem durch -4π dividierten Potential der Ströme S und S' aufeinander. Es ist dabei vorausgesetzt, daß das Potential zweier Ströme von den Intensitäten J und J' aufeinander

$$JJ' \iint \frac{ds ds' \cos \vartheta}{r}$$

ist; daß also die Intensitäten in sogenanntem elektromagnetischen Maße gemessen sind. Wir erhalten, indem wir die Gleichung (6) bezüglich δ und δ' summieren und mit $\rho/2$ multiplizieren:

$$T = -\frac{\rho}{2} \sum \sum \int d\omega \delta \varphi \frac{d\delta' \varphi}{dn} - \frac{\rho}{2} \sum \sum \int d\omega \delta \varphi \frac{d\delta' \varphi}{dn};$$

hier ist der zweite Teil rechts das mit $\rho/4\pi$ multiplizierte Potential aller Ströme aufeinander, indem, wie man leicht sieht, die Summe der Potentiale jedes einzelnen auf sich selbst zu demselben nur verschwindend wenig beträgt. Der erste Teil des Ausdrucks rechts aber ist gleich:

$$-\frac{\rho}{2} \int d\omega \sum \delta \varphi \sum \frac{d\delta' \varphi}{dn} = -\frac{\rho}{2} \int d\omega \varphi \frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

weil $d\varphi/dn$ für alle Oberflächenelemente verschwindet. Es ist die gesamte in der Flüssigkeit enthaltene lebendige Kraft gleich dem mit $\rho/4\pi$ multiplizierten Potential aller jener Ströme S aufeinander. Die Gesamtintensität der irgend einen Ring durchfließenden Ströme muß dabei gleich dem Zuwachs h sein, den das Geschwindigkeitspotential bei Umkreisung des Ringes erleidet, ihre Richtung ist positiv zu zählen, wenn die Umkreisung bezüglich einer schwimmenden Figur von links über vorne nach rechts geschieht; die Verteilung der Ströme ist dadurch bestimmt, daß, wenn die Oberflächen fix sind, δP verschwindet. Verschieben wir sämtliche Körper unendlich wenig und denken uns die Ströme in die ihrer neuen Position entsprechende Minimumanordnung gebracht, so besteht der Zuwachs von P aus zwei Teilen, jenem, welcher von der Verschiebung der Ströme mit den Körpern bei unveränderter Anordnung auf ihrer Oberfläche herrührt und jenem, der von der Veränderung der Anordnung der Ströme her stammt, welche notwendig ist, damit diese in die der neuen Position der Ringe entsprechende Minimumanordnung kommen. Letzterer ist aber gleich Null; denn wir wissen, daß für eine Variation der Verteilung der Ströme ohne Änderung der Lage der Fläche δP gleich Null ist. Die Variation, die das Gesamtpotential der Ströme erleidet, ist daher gleich derjenigen, die es erleiden

würde, wenn sich die Verteilung der Ströme auf der Oberfläche der Körper nicht ändern würde.

Wir wollen jetzt zu dem Falle übergehen, daß die Körper in der Flüssigkeit nicht ruhen, und zwar wollen wir, da die Rechnung hierdurch nicht schwieriger wird, annehmen, daß sie zugleich ihre Gestalt, nicht aber ihr Volumen verändern. Die Oberfläche 0 dagegen soll ruhen, obwohl auch ihre Bewegung den Gang der Rechnung nicht wesentlich modifizieren würde. Die Komponenten der Geschwindigkeit irgend eines Oberflächenelementes do der Körper sollen α, β, γ heißen. Wir wollen uns für einen Augenblick bloß die Oberflächen der Körper aus einer von der Flüssigkeit verschiedenen Substanz gebildet, ihr Inneres aber wieder mit ursprünglich ruhender Flüssigkeit ausgefüllt denken, welche natürlich, sobald sich die Oberflächen der Körper bewegen, ebenfalls in Bewegung gerät und zwar unter Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials. Wir setzen wieder:

$$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{u'}{r} dx' dy' dz', \quad B = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{v'}{r} dx' dy' dz',$$

$$C = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{w'}{r} dx' dy' dz',$$

wobei die Integration über die ganze in der Fläche 0 befindliche Flüssigkeit außerhalb und innerhalb der Körper zu erstrecken ist. Es ist dann in der ganzen Flüssigkeit wieder:

$$u = \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{d^2 A}{dy^2} + \frac{d^2 A}{dz^2}, \quad v = \frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{d^2 B}{dy^2} + \frac{d^2 B}{dz^2},$$

$$w = \frac{d^2 C}{dx^2} + \frac{d^2 C}{dy^2} + \frac{d^2 C}{dz^2}, \quad \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

Um die letzte dieser Gleichungen zu beweisen, transformieren wir die Ableitungen von A, B, C wie früher, sowohl für die Flüssigkeit innerhalb als auch außerhalb der Körper. Es ist nun zwar nicht mehr an der Oberfläche derselben $\lambda u + \mu v + \nu w$ gleich Null; aber diese Größe besitzt zu beiden Seiten der Oberfläche denselben Wert, weshalb sich die auf die Grenzen bezüglichen Glieder im Ausdrucke für

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}$$

doch wieder aufheben. Transformieren wir unter Berücksichtigung desselben Umstandes die drei Größen

$$L = \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}, \quad M = \frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}, \quad N = \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx},$$

so erhalten wir:

$$L = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \frac{\mu(w_a - w_i) - \nu(v_a - v_i)}{r}, \quad M = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \frac{\nu(u_a - u_i) - \lambda(w_a - w_i)}{r},$$

$$N = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \frac{\lambda(v_a - v_i) - \mu(u_a - u_i)}{r},$$

wobei u_a, v_a, w_a die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit an der Außenseite, u_i, v_i, w_i an der Innenseite von $d\sigma$ sind. Da wir die Fläche 0 als ruhend voraussetzten, so ist für dieselben $u_i = v_i = w_i = 0$, u_a, v_a, w_a aber sind einfach die an ihren Elementen stattfindenden Geschwindigkeitskomponenten. Es ergibt sich hieraus, wie früher:

$$u = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d\sigma \left[\frac{\lambda(v_a - v_i) - \mu(u_a - u_i)}{r^3} (y - y') - \frac{\nu(u_a - u_i) - \lambda(w_a - w_i)}{r^3} (z - z') \right].$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für v und w . Es sind u, v, w wieder die Kraftkomponenten geschlossener längs der Oberflächen hinfließender elektrischer Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidiums. Stromintensität und Richtung ist wie früher bestimmt; nur treten an die Stelle von u_a, v_a, w_a jetzt die Differenzen $u_a - u_i, v_a - v_i, w_a - w_i$. Legen wir irgendwo eine unendlich kleine Gerade dq senkrecht gegen die Richtung der Ströme, so ist die Intensität der durch dq gehenden Ströme idq . Die Kosinus der Winkel aber, welche die Richtung der Ströme mit den Koordinatenachsen bildet, sind gi, hi, ki wobei jetzt:

$$g = \mu(w_a - w_i) - \nu(v_a - v_i), \quad h = \nu(u_a - u_i) - \lambda(w_a - w_i),$$

$$k = \lambda(v_a - v_i) - \mu(u_a - u_i), \quad i = \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$$

ist. Denken wir uns die Oberflächen mit unendlich viel Strömen von konstanter unendlich kleiner Intensität ε überzogen, so ist idq/ε die Zahl der durch dq gehenden Ströme. Das durch -4π dividierte Potential dieser Ströme auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidiums ist dann sowohl außerhalb als auch innerhalb der Körper Geschwindigkeitspotential. Außerhalb 0 ist dasselbe konstant. Dem Potential aller Ströme aufeinander, also dem Ausdrücke

$$P = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum \sum \iint \frac{ds ds' \cos \vartheta}{r}$$

kommt wieder eine Minimumeigenschaft zu. Transformieren wir nämlich seine Variation wie früher, so ergibt sich:

$$\delta P = \varepsilon \sum \int ds [\delta x (cH - bK) + \delta y (aK - cG) + \delta z (bG - aH)],$$

wobei:

$$G = \int d\sigma \frac{k'(y - y') - h'(z - z')}{r},$$

$$H = \int d\sigma \frac{g'(z - z') - k'(x - x')}{r},$$

$$K = \int d\sigma \frac{h'(x - x') - g'(y - y')}{r}$$

ist. Die Größen G , H , K nehmen wieder, wenn sämtliche Flächen mit einer unendlich dünnen Stromschicht überzogen gedacht werden, von der Innenseite derselben bis zur Außenseite gleichmäßig zu. Ihre Mittelwerte, welche hier zu nehmen sind, sind:

$$- 2\pi(u_a + u_i), \quad - 2\pi(v_a + v_i), \quad - 2\pi(w_a + w_i).$$

Wir wählen nun die drei Funktionen α , β , γ von x , y , z so, daß sie an der Oberfläche irgend eines der Körper gleich den Geschwindigkeitskomponenten des entsprechenden Oberflächenelementes des Körpers sind, und im Innern die Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$$

erfüllen und bestimmen drei andere Funktionen l , m , n von x , y , z durch die Gleichungen:

$$\frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz} = \alpha, \quad \frac{dl}{dz} - \frac{dn}{dx} = \beta, \quad \frac{dm}{dx} - \frac{dl}{dy} = \gamma.$$

Bezeichnen wir nun den Ausdruck:

$$(5) \quad \sum \int \varepsilon ds (al + bm + cn) = \sum \int \varepsilon (l dx + m dy + n dz)$$

mit Q , wobei die Integration über alle Längenelemente eines Stromes, die Summation über alle Ströme auf allen Flächen zu erstrecken ist (für jeden Körper sind l , m , n im allgemeinen andere), so ist nach Wegschaffung der Differentiale der Variationen:

$$\begin{aligned}
 (6') \quad \left\{ \begin{aligned}
 \delta Q &= \sum \int \varepsilon ds \left[\delta x \left(b \frac{dm}{dx} + c \frac{dn}{dx} - b \frac{dl}{dy} - c \frac{dl}{dz} \right) \right. \\
 &+ \delta y \left(c \frac{dn}{dy} + a \frac{dl}{dy} - c \frac{dm}{dz} - a \frac{dm}{dx} \right) \\
 &+ \left. \delta z \left(a \frac{dl}{dz} + b \frac{dm}{dz} - a \frac{dn}{dx} - b \frac{dn}{dy} \right) \right] \\
 &= \sum \int \varepsilon ds [\delta x (b\gamma - c\beta) + \delta y (c\alpha - a\gamma) + \delta z (a\beta - b\alpha)].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Man erhält somit:

$$\begin{aligned}
 \delta(P - 4\pi Q) &= 2\pi\varepsilon \sum \int ds \{ \delta x [b(w_a + w_i - 2\gamma) - c(v_a + v_i - 2\beta)] \\
 &+ \delta y [c(u_a + u_i - 2\alpha) - a(w_a + w_i - 2\gamma)] \\
 &+ \delta z [a(v_a + v_i - 2\beta) - b(u_a + u_i - 2\alpha)] \}.
 \end{aligned}$$

Da nun die Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit sowohl innerhalb als auch außerhalb der Körper in der Richtung der Normalen zu ihrer Oberfläche gleich der Geschwindigkeitskomponente des entsprechenden Oberflächenelementes in derselben Richtung sein muß, so hat man:

$$\lambda(u_a + u_i - 2\alpha) + \mu(v_a + v_i - 2\beta) + \nu(w_a + w_i - 2\gamma) = 0.$$

Aus dieser und der Gleichung $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$ aber folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{b(w_a + w_i - 2\gamma) - c(v_a + v_i - 2\beta)}{\lambda} &= \frac{c(u_a + u_i - 2\alpha) - a(w_a + w_i - 2\gamma)}{\mu} \\
 &= \frac{a(v_a + v_i - 2\beta) - b(u_a + u_i - 2\alpha)}{\nu}.
 \end{aligned}$$

Es verschwindet also $\delta(P - 4\pi Q)$ für alle δx , δy , δz , welche der Bedingung $\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z = 0$ genügen, also bei jeder Variation der Lage der Ströme, wenn sie die Oberflächen nicht verlassen und bei ungeänderter Intensität geschlossen bleiben. In dem speziellen Falle, daß die Körper ihre Gestalt nicht ändern, wird, wenn ξ , η , ζ die Komponenten der progressiven Geschwindigkeit, p , q , r die der momentanen Winkelgeschwindigkeit sind

$$\begin{aligned}
 Q &= \varepsilon \sum \int \left(\eta z dx + \zeta x dy + \xi y dz - p \frac{y^2 + z^2}{2} dx \right. \\
 &\quad \left. - q \frac{z^2 + x^2}{2} dy - r \frac{x^2 + y^2}{2} dz \right).
 \end{aligned}$$

Wir wollen die Ausdrücke, mit denen in der Formel (6') δx , δy und δz unter dem Integralzeichen multipliziert sind, also die drei Größen

$$(b\gamma - c\beta)\varepsilon ds, (c\alpha - a\gamma)\varepsilon ds, (a\beta - b\alpha)\varepsilon ds$$

als die Komponenten jener auf das Stromelement ds wirksamen Kraft bezeichnen, deren Kräftepotential Q ist. Es ist dies die Kraft, welche solche magnetische Massen auf das Stromelement ausüben würden, die auf einen Magnetpol eine Kraft mit den Komponenten α , β , γ ausüben würden. Dieselbe steht senkrecht auf dem Stromelemente ds und seiner Bewegungsrichtung, ihre Intensität ist εds multipliziert mit der Komponente der Geschwindigkeit von ds , welche senkrecht auf ds steht. Da sie immer normal gegen die Bewegungsrichtung ist, so leistet sie keine Arbeit. Die betrachtete Verteilung elektrischer Ströme auf den Körpern ist also diejenige, in welcher sie unter dem Einflusse ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung und der mit -4π multiplizierten Kraft, die auf jedes Stromelement infolge des Kräftepotentials Q wirkt, im Gleichgewicht sind.

In dem speziellen Falle, daß sich sämtliche Punkte der Fläche 0 in einer mindestens von der Ordnung R unendlichen Entfernung befinden und der von ihr umschlossene Raum einfach zusammenhängt, ist das Potential der auf der Oberfläche der Körper befindlichen Ströme auf jeden Punkt von 0 mindestens unendlich klein wie $1/R^2$, also seine Ableitungen wie $1/R^3$; von dieser Ordnung ist daher auch die Geschwindigkeit an der Oberfläche 0 , daher auch die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität der sie durchfließenden elektrischen Ströme. Die auf der Flächeneinheit befindlichen elektrischen Ströme werden daher ein Potential liefern, das im Endlichen mindestens unendlich klein von der Ordnung $1/R^4$ ist. Das Potential aller auf 0 befindlichen Ströme ist also im Endlichen mindestens unendlich klein wie $1/R^2$, verschwindet also samt seinen Ableitungen mit wachsendem R . Die Körper sind dabei alle als im Endlichen befindlich vorausgesetzt. Setzen wir noch voraus, dieselben seien lauter Ringe, deren zur Mittellinie senkrechter Querschnitt verschwindet, so muß, wenn die Konstante k endlich sein soll, die Geschwindigkeit an der Oberfläche der Ringe unendlich sein und nahe senkrecht auf der Mittellinie stehen,

die auf der Ringoberfläche fingierten elektrischen Ströme werden daher längs der Mittellinie hinfließen müssen und man kann sich selbe, da die Ringe unendlich dünn sind, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Größen als die Mittellinie durchfließend denken. Es ist zunächst wichtig, zu bemerken, daß in diesem Falle das Geschwindigkeitspotential selbst unendlich nahe an der Ringoberfläche doch endlich ist. In der Tat kann das Potential eines elektrischen Stromes auf einen Magnetpol mit der Einheit magnetischen Fluidums abgesehen von einer Konstanten höchstens gleich der 4π fachen Intensität des Stromes werden und da die Gesamtintensität der die Ringe durchfließenden Ströme endlich ist, so ist es auch ihr Potential. Seine Ableitungen dagegen werden auf der Ringoberfläche unendlich. Eine passende Form für das Geschwindigkeitspotential φ in diesem Falle finden wir in folgender Weise. Ist φ_1 das Geschwindigkeitspotential, welches herrschen würde, wenn die Ringe in ihrer augenblicklichen Position in Ruhe wären, φ_2 dasjenige, welches herrschen würde, wenn sich dieselben Ringe in derselben Weise unter Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials bewegten, so erfüllt $\varphi_1 + \varphi_2$ alle an φ gestellten Bedingungen. Es ist also $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Da φ_2 eindeutig ist, $d\varphi_1/dn$ aber auf der Ringoberfläche verschwindet, so wird die lebendige Kraft T der Flüssigkeit, welche die Ringe umgibt:

$$T = -\frac{\rho}{2} \int d\omega \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dn} - \frac{\rho}{2} \int d\omega \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dn} - \frac{\rho}{2} \int d\omega \varphi \frac{d\varphi_2}{dn}.$$

$d\omega$ ist wieder ein Element der Ringoberfläche, $d\omega$ eines Querschnittes. Wenn die Geschwindigkeit der Ringe endlich ist, so ist es auch die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität der Ströme, von denen das Potential φ_2 her stammt und da die von jenen Strömen durchflossene Fläche unendlich klein ist, so ist φ_2 selbst unendlich klein; seine Ableitungen sind nur in einem unendlich kleinen Teil des Raumes endlich, sonst unendlich klein; φ ist überall endlich. Es verschwinden daher die beiden letzten Glieder im Ausdrucke für T . Das erste Glied

$$-\frac{\rho}{2} \int d\omega \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dn}$$

aber ist, wie wir sahen, das mit $\rho/4\pi$ multiplizierte Potential aller Ströme aufeinander, mit denen wir uns die ruhenden Ringe überzogen denken müßten, also der in der Minimumanordnung auf denselben verteilten Ströme. Es ist also auch die Variation der lebendigen Kraft gleich der Variation dieses Potentials. Nun fanden wir aber erstens, daß für die Minimumverteilung die Variation dieses Potentials gerade so groß ist, wie sie wäre, wenn die Ströme ihre Position auf den Ringen und der Fläche 0 nicht änderten; zweitens, daß das Potential der auf 0 befindlichen Ströme auf die auf den Ringoberflächen befindlichen verschwindet; drittens, daß wir uns sämtliche Ströme als die Mittellinie durchfließend denken können, wobei dann ihre Intensität gleich dem Werte des k für den betreffenden Ring ist. Der Zuwachs der lebendigen Kraft der Flüssigkeit ist somit bis auf unendlich kleines gleich dem mit $\rho/4\pi$ multiplizierten Zuwachse des Potentials von Strömen aufeinander, welche die Mittellinien mit der Intensität k durchfließen. Es ist somit der Beweis des Kirchhoffschen Satzes auch für Ringe von nicht kreisförmigem Querschnitte geliefert. Es mag noch bemerkt werden, daß Ströme, die die Ringe nicht längs der Mittellinie, sondern so durchfließen, daß sie die Mittellinie solenoidartig umschlingen, ein Geschwindigkeitspotential liefern würden, das im Innern der Ringe mehrdeutig ist. Aus der Gleichheit der lebendigen Kraft mit der bei Bewegung jener Ströme geleisteten Arbeit folgt unmittelbar die Gleichheit der in die Bewegungsrichtung fallenden Kraftkomponente. Um auch die Kraft senkrecht auf die Bewegungsrichtung zu finden, muß jedoch ein anderer Weg eingeschlagen werden. Wollte man von der lebendigen Kraft ausgehen, so könnte hierzu das sog. Hamiltonsche Prinzip dienen. Bilden wir nämlich die Variation der Größe

$$\Omega = \rho \int_0^{\tau} dt \iiint dx dy dz \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

so, daß der gesamte Bewegungszustand der Körper zu jeder beliebigen Zeit t unendlich wenig geändert wird, die Lage der Körper zu Anfang und Ende aber, sowie das Zeitintervall τ , konstant bleibt. Das dreifache Integral in Ω ist für jede Zeit über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum, also den

Raum außerhalb der Körper zu erstrecken. Es ist also Ω die sog. Wirkung der Flüssigkeit während der Zeit τ . Wir bezeichnen mit

$$\delta x, \delta y, \delta z, \delta u = \frac{d\delta x}{dt}, \delta v = \frac{d\delta y}{dt}, \delta w = \frac{d\delta z}{dt}$$

die Variationen, welche die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten des Flüssigkeitsteilchens, das zur Zeit t die Koordinaten x, y, z hatte, zur selben Zeit durch die Änderung des Bewegungszustandes der Körper erlitten haben. $\delta u, \delta v, \delta w$ sind also nicht Variationen der an einem konstanten Raumpunkte herrschenden Geschwindigkeitskomponenten. Dann ist:

$$\begin{aligned} \delta \Omega &= \rho \int_0^\tau dt \iiint dx dy dz (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \\ &= \rho \int_0^\tau dt \iiint dx dy dz \left(u \frac{d\delta x}{dt} + v \frac{d\delta y}{dt} + w \frac{d\delta z}{dt} \right). \end{aligned}$$

Integrieren wir hier bezüglich t per partes und beachten, daß u, v und w sowohl explizit t enthalten, als auch insofern x, y, z Funktionen von t sind, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta \Omega &= \rho \iiint dx dy dz |u \delta x + v \delta y + w \delta z|^\tau \\ &- \rho \int_0^\tau dt \iiint dx dy dz \left[\delta x \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) \right. \\ &\quad + \delta y \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) \\ &\quad \left. + \delta z \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wenn keine Kräfte von außen auf die Flüssigkeit wirken, so sind die mit $\delta x, \delta y, \delta z$ multiplizierten Glieder im Integrale rechts gleich

$$-\frac{dp}{dx}, \quad -\frac{dp}{dy}, \quad -\frac{dp}{dz};$$

berücksichtigen wir, daß die Verschiebungen $\delta x, \delta y, \delta z$ die Kontinuität der Flüssigkeit nicht stören dürfen. daher

$$\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} = 0$$

sein muß, und integrieren das mit δx multiplizierte Glied bezüglich x , das mit δy multiplizierte bezüglich y und das mit δz multiplizierte bezüglich z partiell, so wird

$$\delta \Omega = \rho \iiint dx dy dz |u \delta x + v \delta y + w \delta z|_0^{\tau} \\ - \int_0^{\tau} dt \int d\sigma p \delta q \cos \eta,$$

wobei δq die gesamte Verschiebung der dem Oberflächenelement $d\sigma$ anliegenden Flüssigkeitsteilchen, η der Winkel zwischen ihrer Richtung und der auf $d\sigma$ nach der Seite der Flüssigkeit errichteten Normalen ist. Das letzte Glied im Ausdrucke für $\delta \Omega$ erhält das entgegengesetzte Zeichen, wenn p nicht den auf die Flüssigkeit, sondern den auf das Oberflächenelement $d\sigma$ des Körpers lastenden Druck vorstellt. Es ist also, wenn $X d\sigma$, $Y d\sigma$, $Z d\sigma$ die Komponenten dieses Druckes sind, auch gleich

$$\int_0^{\tau} dt \int d\sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Sehen wir von dem ersten Gliede in dem Ausdrucke für $\delta \Omega$ ab, so gibt uns das mit δx multiplizierte Glied die auf $d\sigma$ in der Richtung der x -Achse wirkende Kraft; ebenso das mit δy und δz multiplizierte Glied die in der Richtung der y - und z -Achse wirkende Kraft, woran man sogleich das Hamiltonsche Prinzip in der Form erkennt, wie es zuerst von Thomson und Tait auf Probleme der Hydrodynamik angewendet wurde. Das erste Glied dagegen zeigt, daß diese Anwendung im allgemeinen eine unrichtige ist. Es rührt dies daher, daß die Ableitung des Hamiltonschen Prinzips voraussetzt, daß die Anfangs- und Endposition sämtlicher materieller Punkte keine Variation erleide; in unserem Falle aber gilt dies bloß von den Punkten der festen Körper, wogegen die Endpositionen der Flüssigkeitsteilchen im allgemeinen variieren werden; daher jenes erste Glied. Wir können in demselben wieder den mit δx multiplizierten Teil bezüglich x usw. partiell integrieren. Es geht dann über in $-\rho \int d\sigma |v \delta q \cos \eta|_0^{\tau}$, wobei jedoch die Integration nicht nur über die Oberfläche der Körper,

sondern auch über alle Querschnitte zu erstrecken ist, durch welche der von der Flüssigkeit erfüllte Raum zu einem einfach zusammenhängenden gemacht werden kann. Da wir angenommen haben, daß die Anfangs- und Schlußposition der Körper keine Variation erfährt, so verschwindet $\cos \eta$ für die ganze Oberfläche der Körper; das von der Variation an den Grenzen stammende Glied verschwindet also, sobald das Geschwindigkeitspotential eindeutig ist. Unter dieser Bedingung ist also die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips, wie sie die Herren Thomson und Tait machten, in der Tat gestattet; nur darf das Verschwinden der von der Variation an den Grenzen herstammenden Glieder nicht als selbstverständlich vorausgesetzt werden, sondern bedarf erst des Beweises. Auf ein unrichtiges Resultat aber würde man im Falle der Existenz eines mehrdeutigen oder gar keines Geschwindigkeitspotentials geführt. Im ersten Falle verwandelt sich das von der Variation an den Grenzen herstammende Glied in $\sum k \int d\sigma \rho | \delta q \cos \eta |_0^z$, wobei k die vorige Bedeutung hat. Die Integration ist über alle Elemente eines Querschnitts auszudehnen, das Zeichen \sum bedeutet eine Summation bezüglich aller Querschnitte. $\int d\sigma \rho \delta q \cos \eta$ ist die Masse der durch einen Querschnitt gegangenen Flüssigkeit. Das von der Variation an den Grenzen stammende Glied ist also, wenn die Anfangsposition der Flüssigkeitsteilchen nicht variiert wird, die Summe der Produkte der durch alle Querschnitte in der Richtung, in der q wächst, gegangenen Flüssigkeitsmassen in die Konstante k für den betreffenden Querschnitt. Um also nach dieser Methode die auf die Körper wirksamen Kräfte zu finden, müßte man dieses Glied in jedem speziellen Falle in ein nach t zwischen Null und τ genommenes Integral verwandeln, welches unter dem Integralzeichen nur noch δx , δy und δz enthielte. Ich will mich jedoch hierauf nicht weiter einlassen, sondern werde die auf die Körper wirkenden Kräfte in der einfachsten Weise, nämlich durch direkte Auswertung der auf irgend ein Oberflächenelement wirksamen Kraft berechnen. Ich beginne wieder mit dem einfacheren Falle, daß die Oberflächen aller Körper ruhen. q enthält dann die Zeit nicht und der Druck p , welcher auf irgend ein Oberflächenelement $d\sigma$ wirkt, ist gleich einer Konstanten weniger

$$\rho \frac{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}{2}.$$

Wir wollen nun die elektrodynamische Kraft berechnen, welche auf die das Element do bedeckenden Stromelemente von allen übrigen ausgeübt wird. Ihre Komponenten in der Richtung der drei Koordinatenachsen sind nach den bekannten Formeln für die Wirkung geschlossener Ströme auf ein Stromelement $X = do(kH - hK)$, $Y = do(gK - kG)$, $Z = do(hG - gH)$.

Es ist hier nach der bereits früher angewandten Bezeichnung:

$$G = \int do \frac{k'(y - y') - k'(z - z')}{r^3},$$

$$H = \int do \frac{g'(z - z') - k'(x - x')}{r^3},$$

$$K = \int do \frac{h'(x - x') - g'(y - y')}{r^3}.$$

Die Werte G , H , K sind, wie wir gesehen haben, unbestimmt, sobald die Ströme auf einer absoluten Fläche fließen. Substituieren wir dagegen statt der Fläche eine Schichte von unendlich kleiner Dicke, in der jedes Flächenelement gleichförmig von den Strömen erfüllt ist, so nehmen sie von der Innenseite gegen die Außenseite gleichförmig von Null bis $-4\pi u_a$, $-4\pi v_a$, $-4\pi w_a$ zu. Es nehmen daher auch die Kräfte, welche auf ein Stromelement wirken, und die ja den Größen G , H , K proportional sind, gleichförmig von der Innenseite gegen die Außenseite zu und um die Gesamtkraft zu finden, welche auf die das Oberflächenelement do bedeckende Stromschicht wirkt, haben wir statt G , H , K ihre Mittelwerte, $-2\pi u_a$, $-2\pi v_a$, $-2\pi w_a$ einzusetzen. Wir erhalten daher, indem wir auch für g , h , k ihre Werte einsetzen und die Gleichung $\lambda u_a + \mu v_a + \nu w_a = 0$ berücksichtigen:

$$X = -2\pi\lambda(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)do, \quad Y = -2\pi\mu(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)do,$$

$$Z = -2\pi\nu(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)do.$$

Die elektrodynamische Wirkung steht also wie der hydrodynamische Druck auf do senkrecht. Ihre Intensität ist

$$2\pi(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)do,$$

also abgesehen von einer Konstanten gleich dem mit $4\pi/\rho$ multiplizierten hydrodynamischen Drucke. Sind die Körper

lauter unendlich dünne Ringe, so können die auf ihrer Oberfläche befindlichen Ströme als die Mittellinie mit der Intensität k durchfließend betrachtet werden. Ferner verschwindet die Wirkung der auf 0 befindlichen Ströme, wenn diese Fläche unendlich entfernt ist. Es ist daher in diesem Falle die Gesamtwirkung, welche irgend einer der Ringe von der Flüssigkeit erfährt, gleich aber entgegengesetzt gerichtet der mit $\rho / 4\pi$ multiplizierten elektrodynamischen Wirkung, welche der die Mittellinie dieses Ringes mit der Intensität k durchfließende Strom von allen anderen die übrigen Ringe in ähnlicher Weise durchfließenden Strömen erfährt. Dies gilt, sobald die Körper ruhen. Komplizierter wird jedoch die Sache, wenn sich dieselben bewegen und ich will da gegenwärtig nur auf den Fall unendlich dünner Ringe in einer unbegrenzten Flüssigkeit näher eingehen. Wir denken uns das Innere der Ringe wie früher mit unter Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials bewegter Flüssigkeit ausgefüllt. Ist dann das Geschwindigkeitspotential für einen Punkt der Ringoberfläche φ_a an der Außenseite und φ_i an der Innenseite, so ist sowohl φ_a als auch φ_i zu jeder Zeit endlich, daher auch der Differentialquotient dieser Größen nach der Zeit, da ja ein in unendlich kleinen Perioden stattfindendes Hin- und Herschwanke derselben, wenn die Bewegung der Ringe kontinuierlich ist, offenbar ausgeschlossen ist. Der betreffende Punkt der Oberfläche soll sich mit den Geschwindigkeitskomponenten α, β, γ fortbewegen. Dann ist der Quotient des totalen Differentialiales von φ_a durch das Differential der Zeit

$$\frac{d\varphi_a}{dt} + \alpha \frac{d\varphi_a}{dx} + \beta \frac{d\varphi_a}{dy} + \gamma \frac{d\varphi_a}{dz}$$

ebenso der von φ_i :

$$\frac{d\varphi_i}{dt} + \alpha \frac{d\varphi_i}{dx} + \beta \frac{d\varphi_i}{dy} + \gamma \frac{d\varphi_i}{dz}.$$

Die Differenz beider wird daher ebenfalls eine endliche Größe E sein. Wir können setzen:

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_a}{dt} + \alpha \frac{d\varphi_a}{dx} + \beta \frac{d\varphi_a}{dy} + \gamma \frac{d\varphi_a}{dz} \\ & - \frac{d\varphi_i}{dt} - \alpha \frac{d\varphi_i}{dx} - \beta \frac{d\varphi_i}{dy} - \gamma \frac{d\varphi_i}{dz} = E. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den von außen auf ein Element der Ringoberfläche wirkenden Druck mit p_a und den von der im Innern des Ringes fingierten Flüssigkeit auf dasselbe Element ausgeübten Druck mit p_i bezeichnen. Dann ist:

$$p_a - p_i = \rho \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{d\varphi_i}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dz} \right)^2 \right] \\ - \rho \frac{d\varphi_a}{dt} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{d\varphi_a}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dz} \right)^2 \right]$$

führt man hier statt $d\varphi_a/dt - d\varphi_i/dt$ die Größe E ein, so erhält man:

$$p_a - p_i = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{d\varphi_i}{dx} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dy} - \beta \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_i}{dz} - \gamma \right)^2 \right] \\ - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{d\varphi_a}{dx} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dy} - \beta \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dz} - \gamma \right)^2 \right] - \rho E.$$

Wir wollen nun wieder die elektrodynamische Wirkung berechnen, welche sämtliche das Oberflächenelement do bedeckenden Stromelemente von den übrigen und außerdem von den mit -4π multiplizierten Kräfte erleiden, deren Geschwindigkeitspotential die durch die Formel (5) bestimmte Größe Q ist. Die Definition dieser Kräfte gaben wir dort. Die drei Komponenten der Kräfte, welche dann auf do wirken, lassen sich gerade wie im Falle ruhender Körper berechnen. Dieselben wären, wenn alle das Element do bedeckenden Ströme auf seiner Außenseite lägen:

$$X_a = 4\pi i do [b(v_a - \gamma) - c(v_a - \beta)], \\ Y_a = 4\pi i do [c(u_a - \alpha) - a(v_a - \gamma)], \\ Z_a = 4\pi i do [a(v_a - \beta) - b(u_a - \alpha)]$$

wobei wieder a, b, c die Richtungskosinus der Ströme in do sind. Ebenso erhalten wir für die Innenseite:

$$X_i = 4\pi i do [b(w_i - \gamma) - c(v_i - \beta)], \\ Y_i = 4\pi i do [c(u_i - \alpha) - a(w_i - \gamma)], \\ Z_i = 4\pi i do [a(v_i - \beta) - b(u_i - \alpha)].$$

Sind die Ströme im Innern der do bedeckenden Schicht, so sind sie bezüglich eines Teiles der Ströme als innerhalb, bezüglich des anderen als außerhalb liegend zu rechnen und man muß daher, um die Komponenten sämtlicher Kräfte zu

finden, welche auf die do bedeckenden Stromelemente wirken, das arithmetische Mittel der obigen Werte nehmen. Sie besitzen daher die Werte:

$$X = 2\pi ido [b(w_a + w_i - 2\gamma) - c(v_a + v_i - 2\beta)]$$

$$Y = 2\pi ido [c(u_a + u_i - 2\alpha) - a(w_a + w_i - 2\gamma)]$$

$$Z = 2\pi ido [a(v_a + v_i - 2\beta) - b(u_a + u_i - 2\alpha)].$$

Ihre Resultante steht senkrecht auf do . Wir wollen sie mit R bezeichnen. Setzen wir um Platz zu ersparen:

$$u_i - \alpha = \xi, \quad v_i - \beta = \eta, \quad w_i - \gamma = \zeta,$$

$$u_a - \alpha = \varkappa, \quad v_a - \beta = \eta, \quad w_a - \gamma = \delta,$$

$$\eta\zeta - \delta\eta = \rho, \quad \delta\xi - \varkappa\zeta = \sigma, \quad \varkappa\eta - \eta\xi = \tau,$$

so erhalten wir:

$$\frac{R}{2\pi do} = i\sqrt{(\varkappa + \xi)^2 + (\eta + \eta)^2 + (\delta + \zeta)^2} - [a(\varkappa + \xi) + b(\eta + \eta) + c(\delta + \zeta)]^2.$$

Wir wollen nun in die Gleichung $i = \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$ für g, h, k ihre Werte substituieren, es ergibt sich:

$$i = \sqrt{(\varkappa - \xi)^2 + (\eta - \eta)^2 + (\delta - \zeta)^2} - [a(\varkappa - \xi) + b(\eta - \eta) + c(\delta - \zeta)]^2.$$

Nun ist aber, weil die Ableitung von φ in der Richtung der durch do fließenden Ströme keinen Sprung machen darf

$$(7) \quad a(\varkappa - \xi) + b(\eta - \eta) + c(\delta - \zeta) = 0,$$

daher

$$i = \sqrt{(\varkappa - \xi)^2 + (\eta - \eta)^2 + (\delta - \zeta)^2}.$$

Da die Projektion sowohl der Geschwindigkeit der inneren als auch der äußeren Flüssigkeit in der Richtung der Normalen auf do gleich der Projektion der Geschwindigkeit von do in derselben Richtung sein muß, so haben wir:

$$\lambda\varkappa + \mu\eta + \nu\delta = 0, \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0.$$

Aus diesen beiden und der Gleichung $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$ folgt: $a\rho + b\sigma + c\tau = 0$. Kombinieren wir diese Gleichung mit der Gleichung (7), so erhalten wir:

$$a = \frac{\sigma(\delta - \zeta) - \tau(\eta - \eta)}{n}, \quad b = \frac{\tau(\varkappa - \xi) - \rho(\delta - \zeta)}{n},$$

$$c = \frac{\rho(\eta - \eta) - \sigma(\varkappa - \xi)}{n},$$

wobei

$$\begin{aligned} n^2 &= [\sigma(\xi - \zeta) - \tau(\eta - \eta)]^2 + [\tau(x - \xi) - \rho(\xi - \zeta)]^2 \\ &+ [\rho(\eta - \eta) - \sigma(x - \xi)]^2 \\ &= (\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2) [(x - \xi)^2 + (\eta - \eta)^2 + (\xi - \zeta)^2]. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werte ergibt zunächst:

$$a(x + \xi) + b(\eta + \eta) + c(\xi + \zeta) = \frac{2(\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2)}{n} = \frac{2\sqrt{\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2}}{i}.$$

Es wird also, wenn man auch für i seinen Wert substituiert:

$$\frac{R}{2\pi d o} = \sqrt{[(x + \xi)^2 + (\eta + \eta)^2 + (\xi + \zeta)^2][(x - \xi)^2 + (\eta - \eta)^2 + (\xi - \zeta)^2] - 4(\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2)}$$

und nach einigen Reduktionen:

$$\frac{R}{2\pi d o} = x^2 + \eta^2 + \xi^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2,$$

daher

$$\begin{aligned} R &= 2\pi d o \left[\left(\frac{d\varphi_a}{dx} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dy} - \beta \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_a}{dz} - \gamma \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{d\varphi_i}{dx} - \alpha \right)^2 - \left(\frac{d\varphi_i}{dy} - \beta \right)^2 - \left(\frac{d\varphi_i}{dz} - \gamma \right)^2 \right], \end{aligned}$$

folglich:

$$(8) \quad p_a d o = p_i d o - \frac{\rho R}{4\pi} - \rho E d o.$$

Wenn Geschwindigkeit und Beschleunigung der Ringe endlich sind, so ist es auch p_i ; ebenso wissen wir, daß E endlich ist. Wollen wir nun aus dem Ausdrucke für $p_a d o$ die Kräfte und Kräftepaare finden, die einen der Ringe affizieren, so müssen wir ihn mit gewissen endlichen Größen multipliziert, über die unendlich kleine Ringoberfläche integrieren. Es wird daher sowohl $p_i d o$ als auch $\rho E d o$ nur unendlich kleines liefern. Die Kräfte und Kräftepaare, welche den Ring affizieren, sind also mit Vernachlässigung von unendlich kleinem gerade so groß, als wenn auf jedes Flächenelement desselben nur die Kraft $-\rho R/4\pi$ wirken würde. Es ist dies die mit $-\rho/4\pi$ multiplizierte Kraft, welche von allen Strömen und infolge des Potentials Q auf die das Oberflächenelement $d o$ bedeckenden Stromelemente ausgeübt wird. Nun können aber bei unendlich dünnen Ringen nicht nur alle Ströme in der Mittellinie konzentriert gedacht werden, sondern man kann auch Ge-

schwindigkeit und Bewegungsrichtung innerhalb eines sehr kurzen Stückes des Ringes als konstant ansehen. Für den Fall bewegter unendlich dünner fester Ringe ist also die auf jeden Ring ausgeübte Wirkung gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, wie die mit $\rho/4\pi$ multiplizierte elektrodynamische Wirkung, welche auf den mit der Intensität h diesen Ring durchfließenden Strom von den die übrigen Ringe in gleicher Weise durchfließenden ausgeübt würde. Dazu kommt aber noch die Kraft mit dem Potential ρQ . Wären die Ringe nicht fest, sondern wie biegsame Fäden ohne Längen- und Querschnittänderung deformierbar, so würden, wenn man aus dem Ausdrucke (8) für $p_a d\sigma$ wieder die Kraft sucht, die ein unendlich kleines, aber gegen die Dimensionen des Querschnittes unendliches Längenelement $d\sigma$ eines Ringes affiziert, die beiden Glieder $p_i d\sigma$ und $-\rho E d\sigma$ wieder nur Verschwindendes liefern. Es ist also diese Kraft (abgesehen von solchen, die sich an jedem biegsamen Ringe das Gleichgewicht halten) gleich der mit $-\rho/4\pi$ multiplizierten Wirkung aller anderen Ströme auf das Stromelement $d\sigma$ mehr der Kraft mit dem Potential ρQ . Letztere ist nach dem früher Gefundenen senkrecht auf $d\sigma$ und seiner Bewegungsrichtung. Ihre Intensität ist gleich $\rho h d\sigma$ multipliziert mit der auf $d\sigma$ senkrechten Komponente seiner Geschwindigkeit. Sie wirkt nach jener Seite zu, wo Bewegungsrichtung des Elementes und der Flüssigkeit entgegengesetzt sind. Zum Schlusse füge ich noch bei, daß hierbei vorausgesetzt ist, daß der in unendlicher Entfernung auf die Flüssigkeit wirkende Druck an der Ringoberfläche nicht negativ wird; sonst würde eine Trennungsfläche entstehen. Sind die Ringe unendlich dünn, so wird die Geschwindigkeit an ihrer Oberfläche unendlich; es ist daher auch der Druck, der auf der Flüssigkeit lasten muß, damit keine Trennungsfläche entstehe, unendlich.

Graz, den 5. November 1870.

Zur Priorität der Auffindung der Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

(Pogg. Ann. 143. S. 211–230. 1871.)

Hr. Clausius hat in einer am 7. November 1870 in der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde vortragenen und in Pogg. Ann. 142, S. 433 abgedruckten Abhandlung nachgewiesen, daß sich der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie aus den Prinzipien der analytischen Mechanik beweisen läßt und daß die bezüglichen Rechnungen identisch sind mit den Rechnungen, die man beim Beweise des Prinzips der kleinsten Wirkung auszuführen pflegt. Ich habe nun dieselbe Sache bereits in einer der Wiener Akademie der Wissenschaften am 8. Februar 1866 überreichten Abhandlung, die in den 53. Band ihrer Sitzungsberichte aufgenommen wurde¹⁾ und den Titel hat „Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie“, behandelt; und ich glaube behaupten zu können, daß der vierte Abschnitt meiner mehr als vier Jahre früher publizierten Abhandlung den Resultaten nach größtenteils identisch mit der eben genannten Abhandlung des Hrn. Clausius ist. Offenbar hatte daher derselbe sowohl meine als auch den betreffenden Teil einer späteren Abhandlung Loschmidts ganz übersehen. Man braucht bloß in meinen Formeln die Bezeichnungen des Hrn. Clausius einzuführen, um nach ein paar Reduktionen der einfachsten Art zu sämtlichen Formeln des letzteren zu gelangen. Ja selbst in der Ableitungsweise herrscht, wie es bei der Identität des Gegenstandes nicht anders möglich ist, manche Übereinstimmung. Um diese Behauptung zu beweisen, lasse ich hier den vierten Abschnitt meiner Abhandlung vom

¹⁾ Vgl. dieser Band Nr. 2.

8. Februar 1866 wörtlich folgen, wobei nur die vier Gleichungen (23a), (24a), (25a) und (25b), um sie später benennen zu können, numeriert worden sind.¹⁾

Um diese Abhandlung mit der des Hrn. Clausius zu vergleichen, müssen wir zuerst die in beiden Abhandlungen gebrauchten Bezeichnungen nebeneinander stellen. Die Zeichen d und δ sind von Hrn. Clausius in demselben Sinne gebraucht worden, wie von mir; nur drückt bei mir das Zeichen δ ganz allgemein eine Variation aus, wie man dieselbe in der Variationsrechnung immer versteht, während Hr. Clausius in einer ganz speziellen Weise variiert, indem er übereinkommt, welchen Zeitmoment des variierten Zustandes er mit jedem Zeitmomente des ursprünglichen vergleichen will. Eine Folge dieser speziellen Art der Variation ist es, daß bei Hrn. Clausius die Variation des Mittelwertes einer Größe gleich dem Mittelwerte ihrer Variation ist. Ebenso bezeichnen wir alle auf die Wärmetheorie Bezug habenden Größen ($Q, T, L, Z, S \dots$) in derselben Weise. Nur in der Bezeichnung der mechanischen Größen herrscht eine Verschiedenheit. Die Zeit, welche ein Atom braucht, um seine geschlossene Bahn zu beschreiben, bezeichne ich mit $t_2 - t_1$, Hr. Clausius bezeichnet sie mit i , die mittlere lebendige Kraft eines Atoms bezeichne ich mit

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt, \quad \text{Hr. Clausius mit } \frac{m}{2} \overline{v^2} \text{ oder } h.$$

Um also die Bezeichnung in meinen Formeln mit der des Hrn. Clausius konform zu machen, braucht man in den ersteren bloß zu setzen:

$$(A) \left\{ \begin{array}{ll} i & \text{statt } t_2 - t_1, \\ i \frac{m}{2} \overline{v^2} \text{ oder } ih & \text{statt } \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt, \\ \overline{i X \delta x + Y \delta y + Z \delta z} & \text{statt } \int_{t_1}^{t_2} dt (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z). \end{array} \right.$$

¹⁾ Hier folgt der wörtliche Abdruck von Abschnitt 4 der zitierten Arbeit. Siehe S. 23—33 dieses Bandes.

Die ersten bemerkenswerten Formeln, zu denen Hr. Clausius gelangt, sind seine Formeln (17), (18) und (19); dieselben sind identisch mit der ersten der Gleichungen (22) meiner Abhandlung; nimmt man in derselben die Bezeichnungsvertauschungen (A) vor, so lautet nämlich meine Formel (22):

$$i \frac{m}{4} \overline{\delta v^2} = \frac{i \varepsilon}{2} + \frac{i}{2} \overline{X \delta x + Y \delta y + Z \delta z}.$$

Multipliziert man mit $2/i$ und berücksichtigt, daß bei der Variationsmethode des Hrn. Clausius $\overline{\delta v^2} = \delta v^2$ ist, so ergibt sich:

$$(1) \quad \frac{m}{2} \delta v^2 = \varepsilon + \overline{X \delta x + Y \delta y + Z \delta z}.$$

Die Größe ε ist dabei durch meine Formel (23a) bestimmt, welche nach Vornahme der Bezeichnungsvertauschungen (A) lautet:

$$\varepsilon = \frac{2 \delta \left(i \frac{m}{2} \overline{v^2} \right)}{i} = \frac{\delta i}{i} m \overline{v^2} + m \delta \overline{v^2}.$$

Substituiert man diesen Wert in die obige Gleichung (1) und schafft alles auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man sofort:

$$\overline{X \delta x + Y \delta y + Z \delta z} + \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + \frac{\delta i}{i} m \overline{v^2} = 0,$$

was mit den Gleichungen (17), (18) und (19) der Abhandlung des Hrn. Clausius identisch ist. Bei der nun folgenden Einführung der Größen, welche auf die mechanische Wärmetheorie Bezug haben, gehen wir insofern auseinander, daß ich zuerst die zugeführte Wärmemenge δQ betrachte und aus ihr erst zum Schlusse die geleistete Arbeit δL ableite, während Hr. Clausius den umgekehrten Weg einschlägt. Da jedoch die gesamte zugeführte Wärmemenge immer gleich ist der Summe der auf Erhöhung der lebendigen Kraft und auf geleistete Arbeit verwendeten, so ist es auch nicht schwer, den Zusammenhang weiter zu verfolgen. Ich definiere nämlich die Größe ε als die einem Atome zugeführte Wärmemenge (vgl. meine beiden Sätze „es werde nun jedem Atome eine unendlich kleine lebendige Kraft ε zugeführt, und zwar so, daß dieselbe jedesmal auf die Arbeitsleistung und Erhöhung der lebendigen Kraft dieses Atomes verwendet wird“ und „alsdann

ist aber die Summe aller ϵ gleich der gesamten dem Körper zugeführten Wärmemenge, gemessen in Arbeitseinheiten⁴⁾. Die Größe ϵ ist aber nach meiner Gleichung (22):

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \frac{m c^2}{2} - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Bei mir ist daher die einem Atome zugeführte Wärmemenge die Summe des mittleren Zuwachses seiner lebendigen Kraft und des Mittelwertes von $-(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$. Daraus folgt unmittelbar, daß bei mir die auf Arbeitsleistung verwendete Wärmemenge δL der Mittelwert von $-(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$, also nach Hrn. Clausius' Bezeichnung die Größe $\delta \bar{U}$ ist, und dies ist sie auch bei Hrn. Clausius [siehe dessen Gleichung (20)]; und zwar sage ich: „Wäre die Zufuhr nicht gleich anfangs so geschehen, so würden wir so lange warten, bis das Wärmegleichgewicht oder die stationäre Strömung zurückgekehrt wäre und den alsdann sich herausstellenden mittleren Zuwachs an lebendiger Kraft mehr der von jedem Atome bei der Zustandsänderung geleisteten durchschnittlichen Arbeit mit ϵ bezeichnen.“ Ich setze also wie Hr. Clausius voraus, daß die Wärmezufuhr nicht in einer einzigen Bewegungsphase geschieht und definiere ϵ als die im ganzen zugeführte Wärme. Also auch in der wärmetheoretischen Interpretation des mechanischen Satzes unterscheiden wir uns nicht, wenngleich Hr. Clausius seine Gleichung in etwas anderer und viel ausführlicherer Weise begründet. Ich kann dies auch umgekehrt durch Vergleichung der Resultate beweisen. Die Größe δL habe ich nur für viele materielle Punkte, und zwar in der Formel (25a) entwickelt. Um die für ein Atom geltende Formel zu erhalten, brauchen wir jedoch bloß das Summenzeichen wegzulassen. Tun wir dies und nehmen noch die Bezeichnungsvertauschungen (A) vor, so geht meine Formel (25a) über in

$$\delta L = \frac{\delta(i h)}{i} + h \frac{\delta i}{i},$$

oder nach Ausführung der Variation:

$$\delta L = \delta h + 2 h \delta \log i,$$

worin man sofort die Gleichungen (21), (22) und (23) des

Hrn. Clausius wiedererkennt. Ebenso erhalten wir die Disgregation eines materiellen Punktes, indem wir in meiner Formel (25) die Bezeichnungsvertauschungen (A) vornehmen und das Summenzeichen unterdrücken. Die genannte Formel geht dann über in

$$Z = \log(hi) + \log i = \log(hi^2),$$

was wieder mit dem von Hr. Clausius unmittelbar nach Entwicklung der Gleichung (24) für die Disgregation gefundenen Werte übereinstimmt.

Ich will nur noch bemerken, daß ich die Tatsache, daß die Kräfte X, Y, Z in meinen Rechnungen ebenfalls als der Variation unterworfen anzusehen sind (nach der Ausdrucksweise des Hr. Clausius, daß sich das Ergal ebenfalls ändern kann), allerdings bloß insofern erwähnt, daß ich sage: „Zugleich sollen sich Druck und Volumen des Körpers unendlich wenig ändern“, womit ja bereits ausgesprochen ist, daß sich die auf den Körper wirkenden Kräfte ebenfalls im allgemeinen verändern sollen, wie man denn überhaupt, solange diese Kräfte unverändert bleiben, nur eine einzige independente Variable hat, also gar nicht von vollständigen und unvollständigen Differentialausdrücken sprechen kann. Dabei sei noch erwähnt, daß ich gradeso wie Hr. Clausius meine Sätze durch Betrachtung eines einzigen materiellen Punktes fand, wenn ihm, während er beständig eine geschlossene Bahn beschreibt, eine unendlich kleine lebendige Kraft zugeführt wird und gleichzeitig das Wirkungsgesetz der auf ihn wirkenden Kräfte sich verändert. Da jedoch eine Veränderung des Wirkungsgesetzes der Atome in der Natur nicht vorkommt, begnügte ich mich, die Rechnung so zu führen, daß dabei die Unveränderlichkeit des Wirkungsgesetzes nirgends vorausgesetzt wird, und bloß beizufügen, daß sich der Druck ändern kann. Das Verdienst, die Möglichkeit dieser Veränderung zuerst ausdrücklich betont zu haben, gebührt daher Hr. Clausius.

Nun kommt Hr. Clausius auf das Prinzip der kleinsten Wirkung zu sprechen. Er sagt nach einigen vorbereitenden Bemerkungen:

„Diese Gleichung ist der Form nach dieselbe wie die, welche für einen einzelnen beweglichen Punkt den Satz von der kleinsten Wirkung ausdrückt. In der Bedeutung ist freilich

insofern noch ein Unterschied, als wir bei Ableitung unserer Gleichungen vorausgesetzt haben, daß die ursprüngliche und veränderte Bewegung in geschlossenen Bahnen geschehen, welche in keinem Punkte zusammenzufallen brauchen, während bei dem Satze von der kleinsten Wirkung vorausgesetzt wird, daß beide Bewegungen von einem gemeinsamen Anfangspunkte bis zu einem gemeinsamen Endpunkte stattfinden. Indessen ist dieser Unterschied für den Beweis unerheblich, indem die Ableitung der Gleichung (24) unter beiden Voraussetzungen in gleicher Weise geschehen kann, wenn man unter i das eine Mal die Umlaufszeit und das andere Mal diejenige Zeit versteht, welche der bewegliche Punkt bedarf, um aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage zu kommen.“

Diese Analogie mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung war mir natürlich ebenfalls nicht entgangen. Meine Worte sind folgende:

„Man sieht leicht, daß unsere Schlüsse von der Bedeutung der darin vorkommenden Größen in der Wärmelehre vollkommen unabhängig sind und daher zugleich ein Theorem der analytischen Mechanik beweisen, welches dem zweiten Hauptsatze gerade in derselben Weise entspricht wie das Prinzip der lebendigen Kraft dem ersten. Es ist dies, wie ein Blick in unsere Rechnungen zeigt, das Prinzip der kleinsten Wirkung, jedoch in einer etwas allgemeineren Form, in der es etwa so ausgesprochen werden kann. Wenn ein System von Punkten unter dem Einflusse von Kräften, für die das Prinzip der lebendigen Kräfte gilt, beliebige Bewegungen macht und dann allen Punkten eine unendlich kleine lebendige Kraft zugeführt wird und alle gezwungen werden, sich auf unendlich nahen Kurven zu bewegen, so ist

$$\delta \sum \frac{m}{2} \int c ds$$

gleich der Summe der zugeführten lebendigen Kraft multipliziert mit der halben Zeit, während welcher die Bewegung geschieht, wenn die Summe der Produkte aus den Verschiebungen der Punkte, ihren Geschwindigkeiten und den Kosinus der Winkel beider für gleiche Grenzen gleich sind, z. B. die neuen Ausgangspunkte in den durch die alten Grenz-

punkte gelegten Normalebene der alten Bahnen liegen. Dieser Satz gibt, wenn man die zugeführten lebendigen Kräfte und die Variation der Grenzen gleich Null setzt, das Prinzip der kleinsten Wirkung in seiner gewöhnlichen Form.“

Man sieht leicht, daß die Art und Weise, wie ich den Satz ausspreche, dem Wesen nach identisch ist mit der des Hrn. Clausius, nur ist mein Satz noch etwas allgemeiner. Es ist nämlich klar, daß wenn, wie Hr. Clausius vorausgesetzt, die alte und neue Bahn geschlossen ist, jedesmal auch die von mir aufgestellten Bedingungen erfüllt sind.

Nun folgt in der Abhandlung des Hrn. Clausius der Übergang von einem einzigen zu einem System materieller Punkte. Auch die hierbei vorkommenden Unterschiede von meiner Abhandlung berühren das Wesen der Sache nicht. So setze ich die mittlere lebendige Kraft eines Atoms geradezu gleich seiner Temperatur, Hr. Clausius hingegen setzt sie gleich der Temperatur multipliziert mit einem konstanten Faktor mc , wobei der Faktor m den Zweck hat, ein endliches Temperaturmaß zu gewinnen, der Faktor c aber den Beobachtungen (namentlich Kopps) über die Ausnahmen vom Dulong-Petitschen Gesetz zu genügen. Lassen wir die Frage nach der Ursache jener Ausnahmen offen, so ist jedenfalls klar, daß die Hinzufügung dieses Faktors unsere Rechnungen über den zweiten Hauptsatz nur ganz unwesentlich modifiziert. Nur den Übergang von den geschlossenen zu den nicht geschlossenen Bahnen bewerkstelligt Hr. Clausius in anderer Weise als ich dies tat, wobei allerdings die Anwendbarkeit der für ungeschlossene Bahnen nicht immer geltenden Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} \cdot dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{m c^2}{2} \cdot dt$$

auf Wärmeprobleme noch eines exakten Beweises bedürfte. Ähnlicher mit der Ableitungsweise des Hrn. Clausius ist jedoch dieser Übergang in einer am 25. Februar 1869 der Wiener Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung Loschmidts, worin derselbe eine zweite Darstellung meiner ganzen Schlußweise liefert (Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. 59).

Ich will hier noch eine Zusammenstellung meiner Schlußformeln mit denen des Hrn. Clausius beifügen. Hr. Clausius bezeichnet in denselben die mittlere lebendige Kraft eines Atoms mit $m c T$, während ich sie mit

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt$$

bezeichne. Man muß also, um die Bezeichnungen homogen zu machen, in meinen Formeln:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \text{ statt } t_2 - t_1, \\ m c T i \text{ statt } \int_{t_1}^{t_2} \frac{m c^2}{2} dt \end{array} \right.$$

schreiben. Dadurch geht die erste der Formeln (24) meiner Abhandlung über in

$$\delta Q = 2 \sum \frac{\delta (m c T i)}{i},$$

oder nach Multiplikation mit T und Division durch dieselbe Größe unter dem Summenzeichen (was erlaubt ist, da T für alle Punkte denselben Wert hat)

$$\delta Q = 2 T \delta \sum m c \log T i,$$

was mit der Formel (35) des Hrn. Clausius identisch ist. Meine Formel (24a) gibt uns die Entropie. Bezeichnen wir dieselbe mit S und führen die Bezeichnung des Hrn. Clausius ein, so erhalten wir:

$$S = 2 \sum m c \log (T i) + C,$$

welche Gleichung mit der Gleichung (36) des Hrn. Clausius übereinstimmt. Nur fehlt das kalorische Arbeitsäquivalent, da ich die Wärme immer in mechanischem Maße gemessen voraussetze. Machen wir die Bezeichnungsvertauschungen (B) in meiner Formel (25a), so erhalten wir:

$$\delta L = \sum \frac{\delta (m c T i)}{i} + \sum m c T \frac{\delta i}{i} = T \delta \sum m c \log (T i^2),$$

also die Formel (34) des Hrn. Clausius, deren Division

durch T uns die Disgregation ebenfalls in Übereinstimmung mit Hrn. Clausius liefert. Ich denke hiermit meine Priorität der Entdeckung der mechanischen Bedeutung des zweiten Hauptsatzes nachgewiesen zu haben und kann schließlich nur meine Freude darüber aussprechen, wenn eine Autorität vom Rufe des Hrn. Clausius zur Verbreitung der Kenntnis meiner Arbeiten über mechanische Wärmetheorie beiträgt.

Graz, den 16. Mai 1871.

Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen.¹⁾

(Wien. Ber. 63. S. 397—418. 1871.)

Nach der mechanischen Wärmetheorie erfährt jedes Gasmolekül während der weitaus größten Zeit seiner Bewegung von allen übrigen keine merkliche Einwirkung; sein Schwerpunkt bewegt sich daher geradlinig und gleichförmig im Raume fort. Nur sobald sich zwei Moleküle zufällig sehr nahe kommen, wirken sie mit gewissen Kräften aufeinander, so daß jedes auf den Bewegungszustand des anderen einen verändernden Einfluß ausübt. Die verschiedenen Moleküle des Gases werden daher alle möglichen Bewegungszustände durchlaufen und es ist klar, daß es von der höchsten Wichtigkeit ist, die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Bewegungszustände zu kennen. Will man die mittlere lebendige Kraft, das mittlere Potential, den mittleren Weg usw. eines Moleküls berechnen, so braucht man dazu immer jene Wahrscheinlichkeit. So lange dieselbe also unbekannt ist, können höchstens beiläufige Werte jener Größen gemutmaßt werden, an eine exakte Bestimmung derselben aber ist nicht zu denken. Für den Fall, daß jedes Gasmolekül ein einziger materieller Punkt ist, hat Maxwell die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände bestimmt (Phil. mag. march. 1868). In diesem Falle ist der Zustand eines Moleküls vollständig bestimmt, sobald man Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit kennt. Und da selbstverständlich jede Geschwindigkeitsrichtung im Raume gleich wahrscheinlich ist, so braucht man nur mehr die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Größen der Geschwindigkeit zu kennen. Wenn nun die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit N heißt, so fand Maxwell,

¹⁾ Vorläufiger Bericht über diese und die zwei folgenden Arbeiten Wien. Anz. 8. S. 46. 16. Februar; S. 55. 9. März und S. 92. 13. April 1871. (Diese Arbeit hat eine Berichtigung erfahren, siehe Nr. 83 Bd. III dieser Sammlung.)

daß die Anzahl jener Moleküle in der Volumeinheit, deren Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$ liegt, gleich ist

$$4 \sqrt{\frac{h^3}{\pi}} N e^{-h c^2} c^2 dc,$$

wobei h eine die Temperatur bestimmende Konstante ist. Wir wollen uns des Ausdruckes bedienen: hierdurch ist die Verteilung der Geschwindigkeiten unter den Molekülen bestimmt, d. h. es ist bestimmt, wie vielen Molekülen eine Geschwindigkeit zwischen Null und dc , wie vielen eine Geschwindigkeit zwischen dc und $2dc$, $2dc$ und $3dc$, $3dc$ und $4dc$ usf. bis ins Unendliche zukommt.

Die in der Natur vorkommenden Gasmoleküle sind jedoch sicher keine einzelnen materiellen Punkte. Wir kommen offenbar der Wahrheit näher, wenn wir sie als Systeme mehrerer materieller Punkte (der sogenannten Atome) auffassen, welche durch gewisse Kräfte zusammengehalten werden. Es ist dann der Zustand eines Moleküls in einem bestimmten Zeitmomente keineswegs mehr durch eine einzige Variable bestimmt, sondern derselbe hängt von mehreren Variablen ab. Um den Zustand eines Moleküls zu einer gewissen Zeit t zu definieren, denken wir uns drei aufeinander senkrechte Richtungen ein für allemal fix im Raume angenommen. Wir ziehen durch den Punkt, an dem sich der Schwerpunkt unseres Moleküls zur Zeit t befindet, drei rechtwinklige Koordinatenachsen parallel jenen drei Richtungen und bezeichnen die Koordinaten der materiellen Punkte unseres Moleküls bezüglich jener Achsen zur Zeit t mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \dots \xi_{r-1}, \eta_{r-1}, \zeta_{r-1}$. Die Anzahl der materiellen Punkte unseres Moleküls, welche wir immer seine Atome nennen wollen, sei r . Die Koordinaten des r^{ten} Atoms sind durch die der $r-1$ übrigen bestimmt, da der Schwerpunkt Koordinatenanfangspunkt ist. Ferner sei c_1 die Geschwindigkeit des 1. Atoms, u_1, v_1, w_1 ihre Komponenten in der Richtung der Koordinatenachsen; dieselben Größen sollen für das 2. Atom mit c_2, u_2, v_2, w_2 ; für das 3. Atom mit c_3, u_3, v_3, w_3 usf. bezeichnet werden. Dann ist der Zustand unseres Moleküls zur Zeit t bestimmt, wenn wir die Werte der $6r-3$ Größen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \dots \zeta_{r-1}, u_1, v_1, w_1, u_2 \dots w_r$ zu dieser Zeit kennen. Die Koordinaten des Schwerpunktes unseres Moleküls

bezüglich der fixen Koordinatenachsen bestimmen nicht den Zustand, sondern bloß die Lage unseres Moleküls. Wir wollen nun zur Abkürzung immer sagen, ein Molekül befindet sich in einem gewissen Raume, wenn sich sein Schwerpunkt in jenem Raume befindet, und nehmen an, daß sich an allen Stellen des Gases durchschnittlich N Moleküle in der Volumeinheit befinden. Von diesen N Molekülen wird zu einer bestimmten Zeit t nur ein sehr kleiner Teil dN so beschaffen sein, daß gleichzeitig die Koordinaten

des 1. Atoms zwischen

$$\xi_1 \text{ und } \xi_1 + d\xi_1, \eta_1 \text{ und } \eta_1 + d\eta_1, \zeta_1 \text{ und } \zeta_1 + d\zeta_1,$$

die des 2. Atoms zwischen

$$\xi_2 \text{ und } \xi_2 + d\xi_2, \eta_2 \text{ und } \eta_2 + d\eta_2, \zeta_2 \text{ und } \zeta_2 + d\zeta_2,$$

die des $r - 1^{\text{ten}}$ Atoms zwischen

$$\xi_{r-1} \text{ u. } \xi_{r-1} + d\xi_{r-1}, \eta_{r-1} \text{ u. } \eta_{r-1} + d\eta_{r-1}, \zeta_{r-1} \text{ u. } \zeta_{r-1} + d\zeta_{r-1},$$

ferner die Komponenten der Geschwindigkeit

für das 1. Atom zwischen

$$u_1 \text{ und } u_1 + du_1, v_1 \text{ und } v_1 + dv_1, w_1 \text{ und } w_1 + dw_1,$$

für das 2. Atom zwischen

$$u_2 \text{ und } u_2 + du_2, v_2 \text{ und } v_2 + dv_2, w_2 \text{ und } w_2 + dw_2,$$

für das r^{te} Atom zwischen

$$u_r \text{ und } u_r + du_r, v_r \text{ und } v_r + dv_r, w_r \text{ und } w_r + dw_r$$

liegen. Ich will diese Moleküle Kürze halber als diejenigen bezeichnen, deren Zustand zwischen den Grenzen (A) liegt. Es ist dann zunächst offenbar:

$$dN = f(\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}, u_1, v_1 \dots w_r) d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} du_1 dv_1 \dots dw_r.$$

Die Funktion f will ich als die Funktion bezeichnen, welche die Verteilung der Bewegungszustände unter den Gasmolekülen zur Zeit t bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände der Moleküle wäre bekannt, wenn wir wüßten, welchen Wert diese Funktion für jedes Gas annimmt, wenn dasselbe längere Zeit bei konstanter Temperatur und Dichte ruhend erhalten wurde. Für Gase mit einatomigen Molekülen fand Maxwell, daß die Funktion f dann den Wert

$$4 \sqrt{\frac{h^3}{\pi}} N e^{-hc^2} c^2 dc$$

annimmt. Die Bestimmung dieser Funktion für Gase mit mehratomigen Molekülen scheint sehr schwierig, da man schon für einen Komplex von drei Atomen die Bewegungsgleichungen nicht zu integrieren vermag. Trotzdem werden wir sehen, daß sich aus den bloßen Bewegungsgleichungen, ohne deren Integration, ein Wert für die Funktion f auffinden läßt, welcher durch die Bewegung der Moleküle während beliebiger Zeit nicht verändert wird und daher mindestens eine mögliche Verteilungsweise der Zustände unter den Molekülen darstellt. Daß der Wert, welcher der Funktion f in Gasen zukommt, aus den bloßen Bewegungsgleichungen ohne deren Integration erschlossen werden könne, ist übrigens nicht so unerwartet, als es auf den ersten Blick scheint. Denn die große Regelmäßigkeit, welche die Wärmeerscheinungen zeigen, läßt vermuten, daß f gewisse allgemeine, von der speziellen Natur jedes Gases unabhängige Eigenschaften besitzen muß; und gerade derartige allgemeine Eigenschaften lassen sich ja oft schon aus der allgemeinen Form der Bewegungsgleichungen mit Leichtigkeit ableiten, selbst wenn deren vollständige Integration in speziellen Fällen unübersteigliche Schwierigkeiten bietet.

Wir können uns zu Anfang der Zeit die Bewegungszustände ganz beliebig unter den Molekülen verteilt, d. h. der Funktion f jeden beliebigen Wert erteilt denken. Mit wachsender Zeit wird sich der Zustand jedes Moleküls, sowohl durch die Bewegung seiner Atome während seines geradlinigen Fortfliegens, als auch durch seine Zusammenstöße mit dem übrigen Molekülen, beständig verändern; es wird sich daher im allgemeinen auch die Form der Funktion f verändern, bis diese Funktion endlich einen Wert angenommen hat, der durch die Bewegung der Atome und die Zusammenstöße der Moleküle nicht mehr weiter verändert wird. Wenn dies eingetreten ist, wollen wir sagen, die Moleküle befinden sich bei dieser Verteilung der Zustände im *Wärmegleichgewicht*. Es wird sich daher zunächst darum handeln, einen solchen Wert für die Funktion f zu finden, welcher durch die Zusammenstöße nicht weiter verändert wird. Zu diesem Zwecke wollen wir, um sogleich den

allgemeinsten Fall zu betrachten, annehmen, wir hätten es mit einem Gasgemische zu tun. Von einer der gemischten Gasarten (der Gasart G) seien N Moleküle in der Volumeinheit. Davon soll zu einer gewissen Zeit t der Zustand von dN -Molekülen zwischen den Grenzen (A) liegen. Dann ist nach dem früheren:

$$(1) \quad dN = f(\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}, u_1, v_1 \dots w_r) d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} du_1 dv_1 \dots dw_r.$$

Die Funktion f bestimmt uns die Verteilung der Zustände unter den Molekülen der Gasart G zur Zeit t vollständig. Wir lassen nun eine gewisse Zeit δt vergehen. Zur Zeit $t + \delta t$ wird die Verteilung der Zustände im allgemeinen eine andere geworden sein, daher die Funktion f einen anderen Wert besitzen, den ich mit f_1 bezeichne, so daß also zur Zeit $t + \delta t$ die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren Zustand zwischen den Grenzen (A) liegt, gleich

$$(2) \quad f_1(\xi_1, \zeta_1 \dots w_r) d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r$$

ist.

I. Bewegung der Atome in den Molekülen.

Nehmen wir zuerst an, während der Zeit δt sei keines unserer Moleküle mit irgend einem anderen im Zusammenstoße begriffen. Dann sind zwischen den r Atomen eines jeden Moleküls bloß innere Kräfte tätig. Wir können daher die Bewegungsgleichungen, welche zwischen den Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten jener r Atome bestehen, in folgender Form schreiben:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_1}{dt} = \kappa_1, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \kappa_2, \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = \kappa_3, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \kappa_4 \dots \frac{d\zeta_{r-1}}{dt} = \kappa_{3r-3}, \\ \frac{du_1}{dt} = \lambda_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = \lambda_2, \quad \frac{dw_1}{dt} = \lambda_3, \quad \frac{du_2}{dt} = \lambda_4 \dots \frac{dw_r}{dt} = \lambda_{3r}. \end{array} \right.$$

Es ist klar, daß die Differentialquotienten der Koordinaten $\xi_1, \eta_1 \dots$ nach der Zeit t bloß Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten sind, die Größen $\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{3r-3}$ sind also bloß Funktionen von $u_1, v_1, w_1, u_2 \dots w_r$. Die Differentialquotienten von $u_1, v_1 \dots$ nach der Zeit dagegen sind gleich den durch die Massen dividierten Kräften. Die Kräfte aber sind bloß abhängig von der relativen Lage sämtlicher Atome des Moleküls, also von den Größen $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}$. Die Größen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{3r}$

sind also bloß Funktionen von $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}$. Aus den Differentialgleichungen (3) können, wenn die Werte der $6r-3$ Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ zur Zeit t gegeben sind, die Werte derselben Variablen zur Zeit $t + \delta t$ berechnet werden. Diese Werte zur Zeit $t + \delta t$ sollen mit $\xi_1', \eta_1' \dots w_r'$ bezeichnet werden. Für alle Moleküle, für welche die Werte der den Zustand bestimmenden Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ zur Zeit t zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen lagen, werden sie auch zur Zeit $t + \delta t$ zwischen gewissen anderen unendlich nahen Grenzen liegen, und zwar wollen wir annehmen, wenn ihre Werte zur Zeit t zwischen den Grenzen (A) lagen, sollen sie zur Zeit $t + \delta t$ zwischen den Grenzen:

(B) ξ_1' und $\xi_1' + d\xi_1', \eta_1'$ und $\eta_1' + d\eta_1' \dots w_r'$ und $w_r' + dw_r'$ liegen. Die Werte von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ können dabei ganz willkürlich gewählt werden; diese Variablen sind also als independent zu betrachten; $\xi_1', \eta_1' \dots w_r'$ dagegen können infolge der Bewegungsgleichungen (3) als Funktionen von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ bestimmt werden.

Es ist daher nach einer bekannten Formel das Produkt:

$$(4) \quad d\xi_1' d\eta_1' \dots dw_r' = d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r \cdot \sum \pm \frac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \eta_1'}{\partial \eta_1} \dots \frac{\partial w_r'}{\partial w_r}.$$

Wählen wir nun δt unendlich klein; dann werden auch $\xi_1', \eta_1' \dots w_r'$ nur unendlich wenig von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ verschieden sein. Um dies auszudrücken, wollen wir setzen:

$$\xi_1' = \xi_1 + \delta \xi_1, \quad \eta_1' = \eta_1 + \delta \eta_1 \dots w_r' = w_r + \delta w_r,$$

wobei $\delta \xi_1, \delta \eta_1 \dots \delta w_r$ unendlich klein und wieder Funktionen unserer independenten Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ sind. Es wird dann

$$\frac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_1} = 1 + \frac{\partial \delta \xi_1}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \eta_1'}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \delta \eta_1}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial w_r'}{\partial w_r} = 1 + \frac{\partial \delta w_r}{\partial w_r} \quad \text{usw.}$$

und

$$(5) \quad \sum \pm \frac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \eta_1'}{\partial \eta_1} \dots \frac{\partial w_r'}{\partial w_r} = 1 + \frac{\partial \delta \xi_1'}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \delta \eta_1'}{\partial \eta_1} + \dots + \frac{\partial \delta w_r'}{\partial w_r}.$$

In der letzten Formel wurden die höheren Potenzen von $\delta \xi_1, \delta \eta_1 \dots$ vernachlässigt. In der Tat zeigt eine leichte Überlegung, daß dieselben auf das Endresultat ohne Einfluß sind. Aus den Bewegungsgleichungen (3) folgt aber:

$$\delta \xi_1 = \alpha_1 \delta t; \quad \delta \eta_1 = \alpha_2 \delta t \dots \delta w_r = \lambda_{3r} \delta t.$$

Bei Bildung der partiellen Differentialquotienten $\partial \delta \xi_1 / \partial \xi_1$, $\partial \delta \eta_1 / \partial \eta_1 \dots$ sind $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ die independenten Variablen, δt aber ist eine Konstante (denn der Größe δt wurde ein für allemal ein konstanter Wert erteilt, der selbstverständlich von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ unabhängig ist). Da zudem in $\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{3r-3}$ die Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}$ und in $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{3r}$ die Variablen $u_1, v_1 \dots w_r$ nicht enthalten sind, so hat man:

$$\frac{\partial \delta \xi_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \delta \eta_1}{\partial \eta_1} = \dots = \frac{\partial \delta w_r}{\partial w_r} = 0,$$

daher nach Gleichung (5):

$$\sum \pm \frac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \eta_1'}{\partial \eta_1} \dots \frac{\partial w_r'}{\partial w_r} = 1$$

und nach Gleichung (4):

$$(6) \quad d \xi_1' d \eta_1' \dots d w_r' = d \xi_1 d \eta_1 \dots d w_r$$

Die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren Zustand zur Zeit $t + \delta t$ zwischen den Grenzen (B) liegt, erhält man, indem man in die Formel (2) $\xi_1', \eta_1' \dots w_r'$ statt $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ und $d \xi_1', d \eta_1' \dots d w_r'$ statt $d \xi_1, d \eta_1 \dots d w_r$ substituiert. Dieselbe ist also gleich

$$f_1(\xi_1', \eta_1' \dots w_r') d \xi_1' d \eta_1' \dots d w_r'$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (6)

$$(7) \quad f_1(\xi_1', \eta_1' \dots w_r') \cdot d \xi_1 d \eta_1 \dots d w_r.$$

Nun wissen wir aber, daß zur Zeit $t + \delta t$ genau die Zustände derjenigen Moleküle zwischen den Grenzen (B) liegen, deren Zustände zur Zeit t zwischen den Grenzen (A) lagen. Der Ausdruck (7) muß also gleich sein der Zahl der Moleküle, deren Zustand zur Zeit t zwischen den Grenzen (A) lag, also nach Formel (1) gleich $f(\xi_1, \eta_1 \dots w_r) d \xi_1 d \eta_1 \dots d w_r$. Dividiert man durch das Produkt aller Differentiale, so ergibt sich:

$$(8) \quad f_1(\xi_1', \eta_1' \dots w_r') = f(\xi_1, \eta_1 \dots w_r).$$

Diese Gleichung bestimmt die Funktion f_1 , sobald uns die Funktion f gegeben ist, d. h. sie lehrt uns die Verteilung der Zustände zur Zeit $t + \delta t$ kennen, sobald dieselbe zur Zeit t gegeben ist. Nehmen wir an, man hätte, was immer für Werte man den independenten Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ erteilen mag, immer die Gleichung:

$$(9) \quad f(\xi_1, \eta_1 \dots w_r) = f(\xi_1', \eta_1' \dots w_r'),$$

so wäre auch infolge der Gleichung (8)

$$f_1(\xi_1', \eta_1' \dots w_r') = f(\xi_1', \eta_1' \dots w_r');$$

es wären also, da, wenn man den $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ alle möglichen Werte erteilt, auch $\xi_1', \eta_1' \dots w_r'$ alle möglichen Werte durchlaufen, die beiden Funktionen f und f_1 identisch für alle Wertekombinationen der darin enthaltenen Variablen; d. h. die Verteilung der Zustände zur Zeit $t + \delta t$ wäre identisch mit der Verteilung der Zustände zur Zeit t . Ist also die Gleichung (9) erfüllt, so ändert sich die Verteilung der Zustände während des Zeitmomentes δt durch die Bewegung der Atome in den Molekülen nicht. In der Gleichung (9) sind die Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ independent, ihre Werte können also willkürlich gewählt werden; $\xi_1', \eta_1' \dots w_r'$ aber sind die Werte, welche jene Variablen zur Zeit $t + \delta t$ infolge der Bewegungsgleichungen (3) annehmen, wenn sie zur Zeit t die Werte $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ hatten; sind also infolge der Gleichungen (3) Funktionen von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$.

Wir wollen uns nun aus den Integralen der Bewegungsgleichungen (3) die Zeit eliminiert denken, so bleiben uns noch Gleichungen zwischen den Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ und den Integrationskonstanten übrig, die wir in die Form bringen können:

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1 \dots w_r) = a_1, \quad \varphi_2(\xi_1, \eta_1 \dots w_r) = a_2 \text{ usf.},$$

wobei $a_1, a_2 \dots$ die Integrationskonstanten sind. Da diese Gleichungen die Zeit nicht mehr enthalten, so bleiben die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ infolge der Bewegungsgleichungen (3) für alle Zeiten konstant. Es ist also:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi_1, \eta_1 \dots w_r) &= \varphi_1(\xi_1', \eta_1' \dots w_r'), \\ \varphi_2(\xi_1, \eta_1 \dots w_r) &= \varphi_2(\xi_1', \eta_1' \dots w_r') \text{ usf.} \end{aligned}$$

Wenn daher f bloß Funktion der φ ist, so ist die Gleichung (9) erfüllt, da sich keines der φ während der Zeit δt verändert; es ändert sich also nach dem früher Bewiesenen die Verteilung der Zustände unter den Molekülen infolge der Bewegung der Atome von der Zeit t bis zur Zeit $t + \delta t$ nicht. Da sie also zur Zeit $t + \delta t$ dieselbe wie zur Zeit t ist, so gilt

dasselbe auch von $t + \delta t$ bis $t + 2\delta t$ und aus demselben Grunde auch von $t + 2\delta t$ bis $t + 3\delta t$ usw. Es gilt also allgemein für alle Zeiten.¹⁾

II. Zusammenstöße der Moleküle.

Nachdem wir die Bewegung der Atome in den Molekülen diskutiert haben, wollen wir zur Betrachtung der Zusammenstöße der Moleküle übergehen. Wir wollen annehmen, zu irgend einem Zeitmomente t sei

$$(10) \quad dN = f(\varphi_1, \varphi_2 \dots) \cdot d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r$$

die Zahl der Moleküle der Gasart G in der Volumeinheit, deren Zustände zwischen den Grenzen (A) liegen. Eine ganz analoge Formel gelte für die übrigen Gasarten. Wir wissen, daß diese zur Zeit t angenommene Zustandsverteilung durch die Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert wird. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen sie auch durch die Zusammenstöße der Moleküle nicht verändert wird. Das eine der zusammenstoßenden Moleküle soll der Gasart G angehören. Die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten seiner Atome sollen wie früher bezeichnet werden. Die Koordinaten seines Schwerpunktes bezüglich dreier fix im Raume gelegter Koordinatenachsen sollen x, y, z

¹⁾ Man überzeugt sich leicht, daß auch umgekehrt, wenn die Zustandsverteilung so beschaffen sein soll, daß sie durch die Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert wird, f die Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ bloß insoweit sie in den φ stecken, enthalten darf, wobei unter den φ alle Funktionen der $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ zu verstehen sind, welche gleich einer Konstanten gesetzt, die Bewegungsgleichungen (3) befriedigen. Da wir jedoch diesen umgekehrten Satz nicht benötigen werden, so füge ich seinen Beweis bloß als Anmerkung bei. Die Annahme, f enthalte $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ nicht bloß insoweit sie in den φ stecken, ist gleichbedeutend mit der Annahme, f ändere seinen Wert auch, wenn alle φ konstant bleiben, d. h. auch, wenn durch die Veränderungen von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ fortwährend die Differentialgleichungen (3) befriedigt werden. Unter dieser Annahme würde daher die Gleichung (9) nicht für beliebige Wertekombinationen der $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ erfüllt sein. Es würde daher infolge der Gleichung (8) die Funktion f_1 mit f nicht für alle Wertekombinationen der Variablen identisch sein, d. h. die Zustandsverteilung bliebe nicht ungeändert.

heißen. Das zweite der zusammenstoßenden Moleküle wird im allgemeinen einer anderen Gasart (der Gasart G^*) angehören, von der N^* Moleküle mit je r^* Atomen in der Volumeinheit sein mögen. Da die Zustandsverteilung unter den Molekülen der Gasart G^* zur Zeit t durch eine der Formel (10) vollkommen analoge gegeben sein soll, so werden zu jener Zeit von diesen N^* Molekülen:

$$(11) \quad dN^* = f^*(\varphi_1^*, \varphi_2^* \dots) \cdot d\xi_1^* d\eta_1^* \dots dw_{r^*}^*$$

Moleküle so beschaffen sein, daß für dieselben $\xi_1^*, \eta_1^* \dots w_{r^*}^*$ zwischen den Grenzen:

$$(C) \quad \xi_1^* \text{ u. } \xi_1^* + d\xi_1^*, \eta_1^* \text{ u. } \eta_1^* + d\eta_1^* \dots w_{r^*}^* \text{ u. } w_{r^*}^* + dw_{r^*}^*$$

liegen. Die Buchstaben $f^*, \varphi^*, \xi^*, \eta^*, \zeta^*$ bedeuten dabei für die Moleküle der Gasart G^* , was die entsprechenden Buchstaben ohne Sternchen für die Moleküle der Gasart G bedeuteten. Die Koordinaten des Schwerpunktes des zweiten unserer zusammenstoßenden Moleküle bezüglich der fixen Achsen sollen x^*, y^*, z^* heißen. Es wird die Übersichtlichkeit der Formeln sehr erhöhen, wenn wir außerdem noch eine homogenere Bezeichnung anwenden. Wir wollen $3r + 3r^* = s$ setzen, und die durch folgende Gleichungen definierten Größen p und q einführen:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \xi_1, p_2 = \eta_1, p_3 = \zeta_1, p_4 = \xi_2 \dots p_{3r-3} = \zeta_{r-1}; \\ p_{3r-2} = \xi_1^*, p_{3r-1} = \eta_1^* \dots p_{s-6} = \zeta_{r^*-1}^*; \\ p_{s-5} = x^* - x, p_{s-4} = y^* - y, p_{s-3} = z^* - z; \\ q_1 = u_1, q_2 = v_1, q_3 = w_1, q_4 = u_2 \dots q_{3r} = w_r; \\ q_{3r+1} = u_1^*, q_{3r+2} = v_1^* \dots q_s = w_{r^*}^*. \end{array} \right.$$

Solange sich beide Moleküle nicht über eine gewisse Grenze genähert haben, üben sie keine Wirkung aufeinander aus, sind also sowohl $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ als auch $\xi_1^*, \eta_1^* \dots w_{r^*}^*$ durch Differentialgleichungen von der Form der Gleichungen (3) bestimmt. Erst von dem Momente an, wo sie sich bis über eine gewisse Grenze genähert haben, beginnt die Wechselwirkung zwischen beiden Molekülen. Von da an werden also die Kräfte, welche auf die Atome des ersten Moleküls wirken, auch abhängen von der Lage der Atome des zweiten Moleküls und umgekehrt. Wir wollen den Moment, wo die Wechsel-

wirkung zwischen beiden Molekülen beginnt, als den Moment des Beginnes des Zusammenstoßes, den, wo dieselbe wieder aufhört, als das Ende des Zusammenstoßes der Moleküle bezeichnen, ohne daß natürlich dabei an einen Stoß elastischer Körper zu denken ist. Während des Zusammenstoßes sind also die Kräfte, welche auf jedes Atom wirken, Funktionen der relativen Lage sämtlicher Atome beider Moleküle, also Funktionen sämtlicher mit p bezeichneter Größen; denn man überzeugt sich leicht, daß durch diese Größen die relative Lage aller Atome beider Moleküle bestimmt ist. Während des Zusammenstoßes treten also an die Stelle der Bewegungsgleichungen (3) folgende Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = \rho_1, & \frac{dp_2}{dt} = \rho_2 \dots \frac{dp_{s-3}}{dt} = \rho_{s-3}; \\ \frac{dq_1}{dt} = \sigma_1, & \frac{dq_2}{dt} = \sigma_2 \dots \frac{dq_s}{dt} = \sigma_s. \end{cases}$$

Dabei sind die Differentialquotienten der Koordinaten bloß Funktionen der Geschwindigkeiten, also die ρ bloß Funktionen der q ; die Differentialquotienten der Geschwindigkeiten aber sind bloß Funktionen der Koordinaten, also die σ bloß Funktionen der p . Es fragt sich nun zunächst, wodurch der Beginn und das Ende eines Zusammenstoßes charakterisiert sein werden. Wir könnten da annehmen, der Beginn der Wechselwirkung, also des Zusammenstoßes sei dadurch charakterisiert, daß sich die Schwerpunkte beider Moleküle bis über eine gewisse Grenze nahe kommen. Es ist aber klar, daß diese Annahme nicht allgemein genug wäre. Der Moment des Beginnes der Wechselwirkung wird offenbar nicht bloß von der Entfernung der Schwerpunkte, sondern auch von der Position der Atome gegen den Schwerpunkt abhängen. Wir wollen daher, um die größte Allgemeinheit zu erzielen, voraussetzen, daß die Wechselwirkung beider Moleküle beginne, wenn eine gewisse Funktion der relativen Lage sämtlicher Atome (also der p), $F(p_1, p_2 \dots p_{s-3})$ gleich einer gewissen Konstanten b wird. Es ist ersichtlich, daß diese Voraussetzung jede überhaupt denkbare Bedingung des Beginnes des Zusammenstoßes als speziellen Fall enthält. Nach dem Beginne des Zusammenstoßes wird jene Funktion F größer (oder kleiner) als b werden, endlich, da beide Moleküle nicht immer beisammen bleiben

können, ein Maximum erreichen, dann wieder abnehmen, bis sie wieder gleich b geworden ist. In dem Momente, wo $F=b$ geworden ist, hört die Wechselwirkung beider Moleküle wieder auf. Denn die Gleichung $F=b$ soll immer die Zustände, in denen noch Wechselwirkung stattfindet, von denen, wo keine mehr stattfindet, trennen. Es ist diese Scheidung in der Natur allerdings ohne Zweifel keine so strenge; allein die Rechnung macht eine strenge Scheidung notwendig. Man kann ja zu dem Falle der Natur immer übergehen, indem man die Wechselwirkung kurz nach Beginn und vor dem Ende des Zusammenstoßes als sehr klein annimmt. Die Wechselwirkung vor dem Beginne und nach dem Ende des Zusammenstoßes aber ist so unmerklich, daß sie ohne Fehler gleich Null gesetzt werden kann. Es fragt sich nun zuvörderst, wie viele Zusammenstöße während einer gewissen Zeit in der Volumeinheit so geschehen, daß dabei sämtliche, den Zustand der zusammenstoßenden Moleküle bestimmenden Größen zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sind. Die Anzahl der Moleküle der Gasart G in der Volumeinheit, deren Zustände im Zeitmomente t innerhalb der Grenzen (A) liegen, ist die durch die Gleichung (10) bestimmte Größe dN . Legen wir durch den Schwerpunkt eines dieser Moleküle drei den fixen Achsen parallele Koordinatenachsen, so liegt der Inbegriff aller Raumpunkte, deren Koordinaten bezüglich dieser neuen Achsen zwischen

(D) p_{s-5} u. $p_{s-5} + dp_{s-5}$, p_{s-4} u. $p_{s-4} + dp_{s-4}$, p_{s-3} u. $p_{s-3} + dp_{s-3}$ liegen, in einem Parallelepipet vom Volumen $dp_{s-5} \cdot dp_{s-4} \cdot dp_{s-3}$. Die Anzahl der Moleküle der Gasart G^* , deren Schwerpunkt in dem Zeitmomente t in jenem Parallelepipet liegt und deren Zustände zugleich zwischen den Grenzen (C) liegen, ist:

$$dp_{s-5} \cdot dp_{s-4} \cdot dp_{s-3} \cdot dN^* = f^*(\varphi_1^* \cdot \varphi_2^* \dots) d\xi_1^* \cdot d\eta_1^* \dots d\omega_{r^*}^* \cdot dp_{s-5} \cdot dp_{s-4} \cdot dp_{s-3}.$$

Dieser Ausdruck, mit dN multipliziert, liefert die Anzahl der Molekülpaare in der Volumeinheit, welche zur Zeit t folgende Bedingungen erfüllen: 1. Das eine Molekül gehört der Gasart G an und sein Zustand liegt zwischen den Grenzen (A). 2. Das andere Molekül gehört der Gasart G^* an und sein Zustand liegt zwischen den Grenzen (C). 3. Die Differenzen der

Schwerpunktskoordinaten ($p_{s-5}, p_{s-4}, p_{s-3}$) liegen zwischen den Grenzen (D). (Wir betrachten dabei ein Molekülpaar als in einem Raume liegend, wenn der Schwerpunkt des Moleküles von der Gasart G sich in jenem Raume befindet.) Diese Anzahl heiÙe dm ; dann ist also:

$$dm = dp_{s-5} \cdot dp_{s-4} \cdot dp_{s-3} \cdot dN \cdot dN^* = f(\varphi_1, \varphi_2 \dots) \cdot f^*(\varphi_1^*, \varphi_2^* \dots) \cdot d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r d\xi_1^* d\eta_1^* \dots dw_r^* dp_{s-5} dp_{s-4} dp_{s-3}.$$

Machen wir in dieser Formel von den Bezeichnungen (12) Gebrauch, so ergibt sich:

$$dm = f(\varphi_1, \varphi_2 \dots) \cdot f^*(\varphi_1^*, \varphi_2^* \dots) \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dp_{s-3} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \dots dq_s.$$

Wir wollen hier noch statt einer der GröÙen p , z. B. statt p_{s-3} die Variable $b = F(p_1, p_2 \dots p_{s-3})$ einführen. Wir haben dann

$$dp_{s-3} = \frac{db}{\partial F};$$

daher

$$dm = \frac{1}{\partial F} f(\varphi_1, \varphi_2 \dots) \cdot f^*(\varphi_1^*, \varphi_2^* \dots) \cdot dp_2 \cdot dp_3 \dots dp_{s-4} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \dots dq_s db.$$

Dies ist zur Zeit t die Anzahl der Molekülpaare in der Volumeneinheit, für welche

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen} \quad p_1, p_2 \dots p_{s-4} \\ \quad \quad \quad p_1 \text{ und } p_1 + dp_1 \dots p_{s-4} \text{ und } p_{s-4} + dp_{s-4} \\ \text{zwischen} \quad \quad \quad q_1, q_2 \dots q_s \\ \quad \quad \quad q_1 \text{ und } q_1 + dq_1 \dots q_s \text{ und } q_s + dq_s \end{array} \right.$$

und $F(p_1, p_2 \dots p_{s-3})$ zwischen $b - db$ und b liegt. Bezeichnet man mit dt die Zeit, welche notwendig ist, damit F von $b - db$ bis b wachse, so ist dm auch die Zahl der Molekülpaare, welche in der Volumeinheit während der Zeit dt so zusammenstoßen, daß bei Beginn des Zusammenstoßes die p und q zwischen den Grenzen (E) liegen, während p_{s-3} durch die den Beginn charakterisierende Gleichung:

$$(14) \quad F(p_1, p_2 \dots p_{s-3}) = b$$

zwischen den Grenzen (F) liegen, soll dM heißen. Es werden dann die Werte der Variablen durch die betrachtete Gattung von Zusammenstößen dm mal von $p_1, p_2 \dots q_s$ in $P_1, P_2 \dots Q_s$ und dM mal von $P_1, P_2 \dots Q_s$ in $p_1, p_2 \dots q_s$ übergeführt. Es würde also, wenn die Gleichung $dm = dM$ für alle Molekülpaare und alle Wertkombinationen der Variablen bestände, die zur Zeit t angenommene Zustandsverteilung unter den Molekülen auch durch die Zusammenstöße nicht verändert. Wir wollen sehen, wie die Funktion f beschaffen sein muß, damit die Gleichung $dm = dM$ für alle Molekülpaare gelte. Die Zahl dM wird durch eine der Gleichung (16) vollkommen analoge Formel bestimmt. Nur ist darin statt p, q überall P, Q zu setzen. Es soll dadurch φ in Φ und ω in Ω übergehen. Dann ist

$$(17) \quad \begin{cases} dM = f(\Phi_1, \Phi_2 \dots) & f^*(\Phi^*_1, \Phi^*_2 \dots) \cdot \Omega \\ dP_1 dP_2 \dots dP_{s-4} & dQ_1 dQ_2 \dots dQ_s dt. \end{cases}$$

Da die Werte von p und q mit P und Q durch Differentialgleichungen verknüpft sind, so wollen wir den Vorgang des Zusammenstoßes von einem Zeitdifferential zum nächsten fortschreitend verfolgen. Beginnen wir von demjenigen Zeitmomente t , wo $F = b$ war und die Variablen zwischen den Grenzen (E) lagen. Nach Verlauf der sehr kleinen Zeit δt soll $F = b + \delta b$ geworden sein. Zur Zeit $t + \delta t$ sollen

$$\begin{aligned} p_1, p_2 \dots & \text{zwischen } p_1' \text{ u. } p_1' + dp_1', p_2' \text{ u. } p_2' + dp_2' \dots \\ q_1, q_2 \dots & \text{zwischen } q_1' \text{ u. } q_1' + dq_1', q_2' \text{ u. } q_2' + dq_2' \dots \end{aligned}$$

liegen. $p_1', p_2' \dots$ sind nur wenig von $p_1, p_2 \dots$ verschieden; wir wollen daher setzen:

$$p_1' = p_1 + \delta p_1, p_2' = p_2 + \delta p_2 \dots \quad q_1' = q_1 + \delta q_1, q_2' = q_2 + \delta q_2 \dots$$

Dann ist wegen der Gleichungen (13) und wegen $\delta t = \delta b / \varepsilon$

$$(18) \quad \delta p_1 = \frac{\varrho_1}{\varepsilon} \delta b, \delta p_2 = \frac{\varrho_2}{\varepsilon} \delta b \dots \delta q_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon} \delta b, \delta q_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon} \delta b \dots$$

Es wird das Produkt $dp_1' dp_2' \dots dp_{s-4}' dq_1' \dots dq_s'$ wieder durch die Funktionaldeterminante bestimmt

$$\begin{aligned} dp_1' dp_2' \dots dp_{s-4}' dq_1' \dots dq_s' &= dp_1 dp_2 \dots dp_{s-4} dq_1 \dots dq_s \cdot \\ &\sum \pm \frac{\partial' p_1'}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial' p_2'}{\partial p_2} \dots \frac{\partial' q_s'}{\partial q_s}. \end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß die Werte unserer Variablen bis auf p_{s-3} im Moment des Beginnes des Zusammenstoßes ganz beliebig sein können, also $p_1, p_2 \dots p_{s-4}, q_1, q_2 \dots q_s$ als independent zu betrachten sind. Nur p_{s-3} ist infolge der Gleichung (14) als Funktion von $p_1, p_2 \dots p_{s-4}$ zu betrachten. Es wurden deshalb die partiellen Differentialquotienten durch das Zeichen ∂' angezeigt, um auszudrücken, daß bei ihrer Bildung p_{s-3} als Funktion der übrigen p zu betrachten ist. Das Zeichen ∂ drückt eine partielle Differentiation aus, bei der auch p_{s-3} als independent zu betrachten ist. Mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung hat man znnächst:

$$\sum \pm \frac{\partial' p_1'}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial' p_2'}{\partial p_2} \dots \frac{\partial' q_s'}{\partial q_s} = 1 + \frac{\partial' \delta p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial' \delta p_2}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial' \delta p_{s-4}}{\partial p_{s-4}} + \frac{\partial' \delta q_1}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial' \delta q_s}{\partial q_s}.$$

Betrachtet man δb als eine reine Konstante, so ergibt sich aus den Gleichungen (18):

$$\frac{\partial' \delta p_1}{\partial p_1} = \varrho_1 \delta b \frac{\partial' \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{\partial p_1} = \varrho_1 \delta b \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{\partial p_1} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{\partial p_{s-3}} \cdot \frac{\partial p_{s-3}}{\partial p_1} \right];$$

also wegen

$$\frac{\partial p_{s-3}}{\partial p_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial p_1}}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}}$$

$$\frac{\partial' \delta p_1}{\partial p_1} = \frac{\varrho_1 \delta b}{\varepsilon^2} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} \varrho_1 - \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_2} \varrho_2 - \dots - \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_{s-3}} \varrho_{s-3} + \frac{\frac{\partial F}{\partial p_1}}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_{s-3}} \varrho_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial p_{s-3}} \varrho_2 + \dots + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{s-3}^2} \varrho_{s-3} \right) \right].$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial' \delta q_1}{\partial q_1} = \sigma_1 \delta b \frac{\partial' \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{\partial q_1} = - \frac{\sigma_1 \delta b}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{s-3}} \cdot \frac{\partial q_{s-3}}{\partial q_1} \right).$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten der übrigen δp und δq . Summiert man

dieselben, so erhält man nach einer zwar etwas weitläufigen Rechnung, die aber nicht die mindeste Schwierigkeit darbietet:

$$\frac{\partial' \delta p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial' \delta p_2}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial' \delta q_s}{\partial q_s} = - \frac{\delta \omega}{\omega},$$

wobei $\delta \omega$ der gesammte Zuwachs ist, den die Größe

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}} \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \varrho_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \varrho_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{s-3}} \varrho_{s-3} \right)$$

während der Zeit $\delta t = \delta b / \varepsilon$ erfährt. Es ist also

$$d p_1' d p_2' \dots d q_s' = d p_1 d p_2 \dots d q_s \left(1 - \frac{\delta \omega}{\omega} \right) = d p_1 d p_2 \dots d q_s \frac{\omega'}{\omega},$$

wenn $\omega' = \omega + \delta \omega$ der Wert von ω zur Zeit $t + \delta t$ ist. In derselben Weise findet man, wenn zur Zeit, wo F den Wert $b + 2 \delta b$ hat, die Variablen zwischen den Grenzen

$$p_1'' \text{ u. } p_1'' + d p_1'', \quad p_2'' \text{ u. } p_2'' + d p_2'' \dots q_1'' \text{ u. } q_1'' + d q_1'', \\ q_2'' \text{ u. } q_2'' + d q_2'' \dots$$

liegen und ω den Wert ω'' hat,

$$\omega'' d p_1'' d p_2'' \dots d q_s'' = \omega' d p_1' d p_2' \dots d q_s' = \omega d p_1 d p_2 \dots d q_s.$$

Fährt man in dieser Weise zu schließen fort, so gelangt man endlich zur Zeit, wo F wieder gleich b geworden ist, wo also der Zusammenstoß aufhört. Zu dieser Zeit liegen die Variablen zwischen den Grenzen (F) und hat ω den Wert Ω , man gelangt also zur Gleichung:

$$(19) \quad \Omega d P_1 d P_2 \dots d Q_s = \omega d p_1 d p_2 \dots d q_s.$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Satz, der sich übrigens noch erweitern läßt, ist wegen seiner großen Allgemeinheit bemerkenswert. Um bei Ableitung desselben nicht die Stelle, wo F sein Maximum hat, passieren zu müssen, kann man sich jener Stelle von beiden Seiten nähern, statt den Zusammenstoß von seinem Beginne bis zu seinem Ende zu durchlaufen. Mit Berücksichtigung der Gleichungen (16), (17) und (19) reduziert sich die Relation $d m = d M$ auf

$$(20) \quad f(\varphi_1, \varphi_2 \dots) \cdot f^*(\varphi_1^*, \varphi_2^* \dots) = f(\Phi_1, \Phi_2 \dots) \cdot f^*(\Phi_1^*, \Phi_2^* \dots).$$

Wir nehmen nun an, daß die auf die Atome wirksamen Kräfte eine Kraftfunktion besitzen, d.h. eine Funktion, deren negativer Differentialquotient nach der x -Koordinate des ersten Atoms

die auf das erste Atom in der Richtung der x -Axe wirkende Kraft liefert usf. Dann ist, solange das erste Atom mit keinem anderen im Zusammenstoße begriffen ist, die Summe seiner gesamten lebendigen Kraft und Kraftfunktion konstant. Bezeichnen wir also diese Summe mit φ , so ist φ gleich einer Konstanten a ein Integral der Bewegungsgleichungen des ersten Moleküls. Wenn wir daher f gleich einer Funktion von φ machen und die Zustandsverteilung unter den Molekülen der übrigen Gasarten in analoger Weise wählen, so wird die Zustandsverteilung nach dem im 1. Abschnitte Bewiesenen durch die Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert. Bezeichnen wir nun mit φ und φ^* die Summe der lebendigen Kraft und Kraftfunktion für das erste und zweite der zusammenstoßenden Moleküle vor dem Zusammenstoße, und mit Φ und Φ^* die Werte derselben Größen nach dem Zusammenstoße, so ist, wie immer der Zusammenstoß beschaffen sein mag, $\varphi + \varphi^* = \Phi + \Phi^*$; die gesamte in beiden Molekülen enthaltene lebendige Kraft und Arbeit wird ja durch den Zusammenstoß nicht verändert. Setzen wir daher:

$$f = A e^{-h\varphi}$$

und entsprechend

$$f^* = A^* e^{-h\varphi^*}$$

wobei A , A^* und h Konstanten sind, und nehmen an, daß die Zustandsverteilung unter den Molekülen der übrigen Gasarten durch analoge Formeln bestimmt ist, so ist auch die Bedingung (20) für alle Zusammenstöße erfüllt; es wird also die Zustandsverteilung auch durch die Zusammenstöße nicht verändert. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die gemachten Schlüsse auch gelten, wenn beide zusammenstoßenden Moleküle derselben Gasart angehören, was nur ein spezieller Fall des eben betrachteten ist. Wir gelangen daher zu dem Resultate:

Wenn zu einer beliebigen Zeit t die Anzahl der Moleküle der Gasart G in der Volumeinheit, deren Zustand zwischen den Grenzen (A) liegt, gleich ist:

$$(21) \quad dN = A e^{-h\varphi} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} du_1 dv_1 \dots dw,$$

und die Zustandsverteilung unter den Molekülen der übrigen Gasarten durch eine analoge Formel gegeben ist, so wird dieselbe weder durch die Bewegung der Atome in den Molekülen, noch durch die Zusammenstöße der Moleküle verändert; sie

erhält sich also unverändert durch beliebige Zeit. Dabei ist φ die Summe der Kraftfunktion und der gesamten lebendigen Kraft des Moleküls, h eine für alle Gasarten gleiche, A aber eine für die verschiedenen Gasarten verschiedene Konstante. Die Konstante h kann so gewählt werden, daß die gesamte im Gase enthaltene lebendige Kraft, folglich auch seine Temperatur jeden beliebigen endlichen Wert erhält. Die Konstanten A dagegen bestimmen die Dichte und das Mischungsverhältnis der Gase. Ist N die Anzahl der Moleküle der Gasart G in der Volumeinheit, so hat man

$$(22) \quad A = \frac{N}{\int \int \dots e^{-h\varphi} d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r};$$

denn dN über alle möglichen Werte der darin enthaltenen Variablen integriert, muß N liefern. Die durch die Formel (21) dargestellte Zustandsverteilung erfüllt also alle Anforderungen, denen die wirkliche Zustandsverteilung unter den Gasmolekülen zu genügen hat, und stellt man sie einmal unter den Gasmolekülen her, so wird sie durch die Zusammenstöße nicht mehr alteriert. Der Beweis dieses Satzes scheint mir vollkommen streng und von jeder Voraussetzung frei zu sein, die nicht auf mathematische Gewißheit, sondern bloß auf größere und geringere Wahrscheinlichkeit Anspruch machen könnte. Dagegen ist mir der Beweis, daß diese Zustandsverteilung die einzige ist, die durch die Zusammenstöße nicht verändert wird, bis jetzt noch nicht gelungen. Es ist jedoch dieser Umstand, daß ein und dasselbe Gas bei gleicher Temperatur und gleicher Dichte mehrerer Zustände fähig ist und daß es bloß von den Anfangsbedingungen abhängt, welchen derselben es annimmt, a priori unwahrscheinlich und wird auch durch keinerlei Erfahrungen bestätigt.

Fügt man dem durch die Formel (21) gegebenen Werte von dN noch einen Faktor von der Formel $e^{\pm ku}$ bei, wobei u die Komponente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Richtung der x -Achse ist, so erhält man das Wärmegleichgewicht in einem Gase, welches in der Richtung der x -Achse strömt. Auch eine Exponentielle, deren Exponent die gesamte, mit einer Konstanten multiplizierte Flächengeschwindigkeit des Moleküls bezüglich einer fixen Ebene wäre, könnte als Faktor zu dN hinzugefügt werden, ohne daß das Wärmegleichgewicht

gestört würde. Dann würde sich aber das Gas nach verschiedenen Richtungen verschieden verhalten. Wir wollen nun die wichtigsten Konsequenzen aus der gefundenen Verteilungsweise der Zustände zu ziehen suchen. Bezeichnen wir die Kraftfunktion der zwischen den Atomen eines Moleküls, solange dasselbe nicht im Zusammenstoß mit irgend einem anderen begriffen ist, wirksamen Kräfte mit χ und die Massen der Atome mit $m_1, m_2 \dots m_r$, ihre Geschwindigkeiten mit $c_1, c_2 \dots c_r$, so ist:

$$\varphi = \chi + \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} + \dots + \frac{m_r c_r^2}{2};$$

daher nach Formel (21)

$$(23) \quad dN = A e^{-h \left(\chi + \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} + \dots \right)} d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r.$$

Dieser Ausdruck zeigt zunächst die wichtige Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände eines Moleküls gar nicht abhängt von der Natur der übrigen Moleküle, mit denen dasselbe zusammenstößt, sondern bloß von der die Temperatur bestimmenden Konstante h , welche für alle in Wechselwirkung stehenden Moleküle im Zustande des Wärmegleichgewichtes denselben Wert haben muß. Mittels der Formel (23) können wir sofort den Mittelwert jeder beliebigen Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten der Atome unseres Moleküls durch einfache Quadraturen finden; sei nämlich X eine solche Funktion, \bar{X} ihr Mittelwert, so ist:

$$(24) \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \int X dN,$$

wobei die Integration über alle möglichen Werte der in dN enthaltenen Variablen zu erstrecken ist. Enthält X nur die Geschwindigkeiten, so fällt χ ganz heraus und die Integration kann sofort ausgeführt werden. (Sie ist bezüglich jeder der Variablen u, v, w von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken.) Enthält X auch die Koordinaten, so muß natürlich χ gegeben sein. Die Exponentielle im Ausdruck (23) ist unabhängig von der Richtung der Geschwindigkeiten, woraus folgt: Bei gegebener Position der Atome und Größe ihrer Geschwindigkeiten, ist für jedes Atom jede Geschwindigkeitsrichtung im Raume gleich wahrscheinlich. Für die mittlere lebendige

Kraft eines Atoms, z. B. des ersten, findet man durch Ausführung der Integrationen:

$$\frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{1}{N} \int \frac{m_1 c_1^2}{2} dN = \frac{3}{2} h.$$

Die mittlere lebendige Kraft ist also für alle Atome der in Wechselwirkung stehenden Moleküle gleich. Den Wärmezustand, welchen viele in Wechselwirkung stehende Atome annehmen, nennen wir den Zustand gleicher Temperatur; bei gleicher Temperatur ist also die mittlere lebendige Kraft jedes Atoms gleich; dieselbe kann als Maß der Temperatur betrachtet werden. Eine wichtige Konsequenz ergibt sich aus dem Satze, daß bei gegebener relativer Lage und Geschwindigkeit aller Atome für jedes Atom jede Bewegungsrichtung im Raume gleich wahrscheinlich ist. Bezeichnen wir nämlich die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Moleküls bezüglich der Koordinatenachsen mit u , v , w ohne Index, so ist

$$u = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + \dots + m_r u_r}{m_1 + m_2 + \dots + m_r};$$

v und w haben entsprechende Werte. Unter der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Moleküls wollen wir die Gesamtmasse des ganzen Moleküls, multipliziert mit dem halben Quadrate der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes, also die Größe

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + \dots + m_r) \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \\ = & \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2 + \dots)^2 + (m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots)^2 + (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \dots)^2}{2(m_1 + m_2 + \dots)} \end{aligned}$$

verstehen. Wollen wir den Mittelwert dieser Größe nach der Formel (24) berechnen, so haben wir zu beachten, daß wegen der gleichen Wahrscheinlichkeit jeder Bewegungsrichtung eines Atoms

$$\frac{1}{N} \int u_p u_q dN,$$

wenn p und q verschieden sind, gleich Null, sonst aber gleich dem dritten Teile des Geschwindigkeitsquadrats des betreffenden Atoms ist. Es ist also

$$\frac{1}{N} \int (m_1 + m_2 + \dots + m_r) \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dN = \frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{m_2}{2} \overline{c_2^2} = \dots$$

Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des Moleküls ist also gleich der mittleren lebendigen Kraft jedes Atoms. Eine erste Konsequenz dieses Satzes findet in der Erfahrung ihre Bestätigung. Da das Produkt der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung in die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit den Druck, die mittlere lebendige Kraft eines Atoms aber die Temperatur bestimmt, so folgt nämlich, daß bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur für alle Gase in der Volumeinheit gleichviel Moleküle sein müssen. Dagegen steht eine andere Konsequenz mit der Erfahrung in Widerspruch. Nach unserem Satze müßte nämlich das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Drucke zu der bei konstantem Volumen für Gase mit zweiatomigen Molekülen 1,33 sein, wogegen dieses Verhältnis bei der atmosphärischen Luft 1,41 ist, woraus, wie Clausius zuerst nachwies, folgt, daß bei Luft, wenn man von innerer Arbeit absieht, die gesamte mittlere lebendige Kraft des Moleküls gleich der 1,63fachen mittleren lebendigen Kraft der progressiven Bewegung ist. Besteht daher das Molekül aus zwei Atomen und verteilt sich die lebendige Kraft auf beide gleich, so ist die mittlere lebendige Kraft jedes Atoms nur 0,81 von der der fortschreitenden Bewegung. Ich halte es nicht für wahrscheinlich, daß außer dem hier berechneten noch ein anderes Wärmegleichgewicht zwischen zweiatomigen Gasmolekülen möglich ist und die Luftmoleküle aus irgend welcher Ursache immer ein anderes Wärmegleichgewicht annehmen. Eher dürfte die Erklärung dieser Nichtübereinstimmung darin zu suchen sein, daß sich die Gasmoleküle nicht im leeren Raume, sondern in einem widerstehenden Mittel (dem Äther) bewegen, an den sie ihre lebendige Kraft (durch Wärmestrahlung) abgeben würden, wenn derselbe nicht ebenfalls in gleich heftiger Wärmebewegung begriffen wäre. Sollte es sich also auch zeigen, daß sich Gasmoleküle nicht ganz wie im leeren Raume fortschreitende Atomkomplexe verhalten, so scheint mir doch jeder Fortschritt in der Überwindung der mathematischen Schwierigkeiten, welche die Berechnung des Verhaltens solcher Atomkomplexe bietet, von der höchsten Wichtigkeit für die Erforschung der wahren Beschaffenheit der Gasmoleküle zu sein.

Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht.¹⁾

(Wien. Ber. 63. S. 679—711. 1871.)

I. Zusammenhang zwischen den Sätzen über das Verhalten mehratomiger Gasmoleküle mit Jacobis Prinzip des letzten Multiplikators.

Der erste Satz, welchen ich in einer früheren Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“ gefunden habe, steht im innigsten Zusammenhange mit einem Theoreme, dem man auf den ersten Blick wohl nichts weniger als Verwandtschaft mit der Gastheorie zuschreiben würde, nämlich mit dem Jacobischen Prinzip vom letzten Multiplikator.

Um diesen Zusammenhang aufzudecken, wollen wir, die spezielle Form der in der Wärmetheorie vorkommenden Gleichungen verlassend, die dortigen Entwicklungen noch erheblich verallgemeinern. Man habe eine sehr große Anzahl von Systemen materieller Punkte (ähnlich wie ein Gas aus sehr vielen Molekülen besteht, deren jedes wieder bereits ein System materieller Punkte ist). Der Zustand irgend eines dieser Punkte-systeme zu irgend einer Zeit t sei durch n Variable s_1, s_2, \dots, s_n bestimmt, zwischen denen folgende Differentialgleichungen bestehen mögen:

$$(1) \quad \frac{d s_1}{d t} = S_1, \quad \frac{d s_2}{d t} = S_2 \dots \frac{d s_n}{d t} = S_n.$$

$S_1, S_2 \dots S_n$ sind Funktionen der $s_1, s_2 \dots s_n$ und vielleicht auch noch von t . Durch diese Differentialgleichungen und die Anfangswerte der n Variablen $s_1, s_2 \dots s_n$ sind die Werte dieser Größen zu jeder beliebigen Zeit bestimmt. Um zu dem Prinzip des letzten Multiplikators zu gelangen, können wir ganz dieselben Schlüsse anwenden, die ich in der bereits zitierten Abhandlung machte; nur müssen wir annehmen, daß zwischen den

¹ Vgl. Anm. S. 237 dieses Bandes.

materiellen Punkten verschiedener Punktesysteme niemals Wechselwirkung stattfindet. Was man also in der Gastheorie die Zusammenstöße der Moleküle nennt, soll bei unserer gegenwärtigen Untersuchung ausgeschlossen sein.

Die Zahl der den Zustand bestimmenden Variablen s , sowie die Differentialgleichungen (1) sollen für alle Punktesysteme gleich sein (die S sollen für alle Punktesysteme dieselben Funktionen von $t, s_1, s_2 \dots s_n$ sein). Die Anfangswerte der Variablen s und folglich die Zustände zu einer beliebigen Zeit t dagegen sollen für die verschiedenen Punktesysteme verschieden sein; und zwar sei die Zahl derjenigen Punktesysteme, für welche zur Zeit t

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 \text{ zwischen } s_1 \text{ und } s_1 + ds_1 \\ s_2 \text{ zwischen } s_2 \text{ und } s_2 + ds_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \text{ zwischen } s_n \text{ und } s_n + ds_n \end{array} \right.$$

liegt,

$$(2) \quad dN = f(t, s_1, s_2 \dots s_n) ds_1 ds_2 \dots ds_n.$$

Wenn für eines der Punktesysteme die Werte der Variablen $s_1, s_2 \dots s_n$ (also der Zustand) zur Zeit t gegeben sind, so können daraus die Werte dieser Variablen zur Zeit $t' = t + \delta t$ aus den Differentialgleichungen (1) bestimmt werden. Wir wollen annehmen die Werte der Variablen sollen, wenn sie zur Zeit t zwischen den Grenzen (A) lagen, jedesmal zur Zeit t' zwischen den Grenzen

$$(B) \quad s_1' \text{ und } s_1' + ds_1', s_2' \text{ und } s_2' + ds_2' \dots s_n' \text{ und } s_n' + ds_n'$$

liegen. Die Anzahl der Punktesysteme, deren Zustände zur Zeit t' zwischen den Grenzen (B) liegen, sei

$$dN' = f(t', s_1', s_2' \dots s_n') ds_1' ds_2' \dots ds_n'.$$

Wir wissen, daß genau dieselben Punktesysteme, deren Zustände zur Zeit t zwischen den Grenzen (A) lagen, zur Zeit t' so beschaffen sind, daß ihre Zustände zwischen den Grenzen (B) liegen. Es muß also $dN = dN'$, folglich

$$(3) \quad f(t, s_1, s_2 \dots s_n) ds_1 ds_2 \dots ds_n = f(t', s_1', s_2' \dots s_n') ds_1' ds_2' \dots ds_n'$$

sein. s'_1, s'_2, \dots, s'_n sind infolge der Bewegungsgleichungen (1) Funktionen von δt und s_1, s_2, \dots, s_n . Es ist daher

$$d s'_1 d s'_2 \dots d s'_n = d s_1 d s_2 \dots d s_n \sum \pm \frac{\partial s'_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s'_2}{\partial s_2} \dots \frac{\partial s'_n}{\partial s_n}.$$

Bei Bildung der partiellen Ableitungen in der Funktionaldeterminante sind $\delta t, s_1, s_2, \dots, s_n$ als die independenten Variablen, ersteres also, weil nach ihm gar nicht differenziert wird, als konstant zu betrachten. Sei δt unendlich klein, so ist infolge der Differentialgleichungen (1)

$$s'_1 = s_1 + S_1 \delta t, \quad s'_2 = s_2 + S_2 \delta t \dots;$$

daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial s'_1}{\partial s_1} &= 1 + \delta t \frac{\partial S_1}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial s'_1}{\partial s_2} = \delta t \frac{\partial S_1}{\partial s_2} \dots \frac{\partial s'_2}{\partial s_1} = \delta t \frac{\partial S_2}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial s'_2}{\partial s_2} \\ &= 1 + \delta t \frac{\partial S_2}{\partial s_2} \dots \end{aligned}$$

Man erhält folglich:

$$\sum \pm \frac{\partial s'_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s'_2}{\partial s_2} \dots \frac{\partial s'_n}{\partial s_n} = 1 + \delta t \left(\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} \right)$$

und die Gleichung (3) reduziert sich auf

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} f(t, s_1, s_2 \dots s_n) &= f(t', s'_1, s'_2 \dots s'_n) \left[1 + \delta t \left(\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Es wurden hier überall die Glieder von der Ordnung δt^2 und von höherer Ordnung weggelassen. Da ihre Anzahl und Koeffizienten nicht unendlich sein können und die Glieder von der Ordnung δt , wie wir sehen werden, nur endliche liefern, so überzeugt man sich leicht, daß dies in der Tat gestattet ist.

Mittels der Gleichung (4) kann der zur Zeit t' gehörige Wert von f als Funktion von s_1, s_2, \dots, s_n bestimmt werden, wenn der zur Zeit t gehörende Wert von f als Funktion von s_1, s_2, \dots, s_n gegeben ist. Betrachten wir zuerst den speziellen Fall, daß

$$\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} = 0$$

ist. Dann reduziert sich die Gleichung (4) auf

$$f(t, s_1, s_2 \dots s_n) = f(t', s'_1, s'_2 \dots s'_n).$$

Bezeichnen wir die Werte der s zur Zeit $t'' = t + 2 \delta t$ mit $s_1'', s_2'' \dots$, die zur Zeit $t''' = t + 3 \delta t$ mit $s_1''', s_2''' \dots$, so erhalten wir in derselben Weise:

$$\begin{aligned} f(s_1'', s_2'' \dots) &= f(s_1', s_2' \dots) = f(s_1, s_2 \dots) \\ f(s_1''', s_2''' \dots) &= f(s_1, s_2 \dots) \text{ usf.} \end{aligned}$$

Es ist also die Funktion f überhaupt konstant, was so zu verstehen ist: Wenn man in $f(t, s_1, s_2 \dots s_n)$ statt t irgend einen anderen Wert τ und gleichzeitig statt $s_1, s_2 \dots s_n$ die Werte substituirt, welche diese Größen zur Zeit τ annehmen, wenn sie zur Zeit t die Werte $s_1, s_2 \dots s_n$ hatten, so ändert die Funktion f ihren Wert nicht. Sind also

$\varphi_1(t, s_1, s_2 \dots) = a_1, \varphi_2(t, s_1, s_2 \dots) = a_2 \dots \varphi_n(t, s_1, s_2 \dots) = a_n$ die Integrale der Differentialgleichungen (1), so muß f eine Funktion der φ sein, weil diese und nur diese mit wechselnder Zeit konstant bleiben. Wir erhalten daher gemäß der Gleichung (2)

$$(5) \quad dN = f(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n) \cdot ds_1 ds_2 \dots ds_n.$$

Wir wollen hier statt der Differentiale der s die Differentiale der φ einführen, so erhalten wir:

$$(6) \quad dN = \frac{f(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n)}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n.$$

Es ist dies die Zahl der Punktesysteme, für welche zur Zeit t

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t, s_1, s_2 \dots) \text{ zwischen } \varphi_1 \text{ und } \varphi_1 + d\varphi_1 \\ \varphi_2(t, s_1, s_2 \dots) \text{ zwischen } \varphi_2 \text{ und } \varphi_2 + d\varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n(t, s_1, s_2 \dots) \text{ zwischen } \varphi_n \text{ und } \varphi_n + d\varphi_n \end{array} \right.$$

liegt. In der Formel (6) ist bei Bildung der partiellen Differentialquotienten t als konstant zu betrachten. Nun bleiben aber mit wechselnder Zeit sämtliche φ konstant, folglich bleibt auch die Zahl der Punktesysteme konstant, deren Zustände zwischen den Grenzen (C) liegen, und weil diese Zahl durch die Formel (6) gegeben ist, von deren Zähler wir bereits bewiesen haben, daß er konstant ist, so folgt daraus unmittelbar, daß auch der Nenner dieser Formel, also die Funktionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}$$

konstant, d. h. nur eine Funktion der φ ist.

Der Nutzen, den wir durch Einführung der $d\varphi$ erhielten, besteht darin, daß jetzt diejenigen Punktesysteme, deren Zustände zwischen den Grenzen (C) liegen, für alle Zeiten dieselben bleiben, also ganz unabhängig von den übrigen sind, daß wir also von den übrigen Punktesystemen, welche bloß zur Transformation der Gleichungen als Hilfsvorstellung eingeführt wurden, wieder ganz unabhängig geworden sind. Die Zustände der Punktesysteme aber, für die die Variablen zwischen den Grenzen (C) liegen, sind nur unendlich wenig voneinander verschieden; wir haben es also nur mehr mit lauter Punktesysteme von einem und demselben Zustande oder, wenn wir wollen, nur mehr mit einem Punktesysteme zu tun. Wir wollen nun den mit dN bezeichneten Differentialausdruck noch in einer dritten Weise ausdrücken, indem wir statt $ds_2, ds_3 \dots ds_n$ die Differentiale von $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ einführen, das Differentiale von s_1 aber unverändert lassen. Wir können diesen neuen Ausdruck für dN in zweifacher Weise gewinnen, entweder indem wir in der Formel (5) ds_1 unverändert lassen und $d\varphi_2, d\varphi_3 \dots d\varphi_n$ für $ds_2, ds_3 \dots ds_n$ einführen; dadurch ergibt sich:

$$(7) \quad dN = \frac{f(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n)}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} ds_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_n$$

oder indem wir in der Formel (6) $d\varphi_2, d\varphi_3 \dots d\varphi_n$ unverändert lassen und statt $d\varphi_1$ wieder ds_1 einführen mittels der Gleichung:

$$d\varphi_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right) ds_1,$$

wobei der partielle Differentialquotient eingeklammert wurde, um anzuzeigen, daß bei Bildung desselben $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ als konstant und bloß s_1 und t als independent zu betrachten sind, $s_2, s_3 \dots s_n$ aber sind infolge der Gleichungen $\varphi_2 = \text{const.}, \varphi_3 = \text{const.} \dots \varphi_n = \text{const.}$ als Funktionen von s_1 und t anzusehen. Nach der zweiten Methode ergibt sich:

$$(8) \quad dN = \frac{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right) f(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n)}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} ds_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_n.$$

Da die beiden Ausdrücke (7) und (8) dieselbe Größe bezeichnen, so müssen sie identisch sein; es muß also

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}\right) = \frac{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}$$

sein, oder weil die Funktionaldeterminante im Zähler eine Funktion der φ ist

$$(9) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}\right) = \frac{F(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n)}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}$$

Gesetzt, man habe nun $n-1$ Integrale $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ der Differentialgleichungen (1) bereits gefunden, so bleibt nur mehr die Gleichung

$$(10) \quad ds_1 - S_1 dt = 0$$

zu integrieren, in der $s_2, s_3 \dots s_n$ infolge der bereits gefundenen Integralgleichungen

$$(11) \quad \varphi_2 = a_2, \varphi_3 = a_3 \dots \varphi_n = a_n$$

als Funktionen von s_1 und t auszudrücken sind. Ihr Integral sei $\varphi_1 = a_1$; seine Differentiation liefert

$$(12) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}\right) ds_1 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) dt = 0.$$

Hierbei sind die partiellen Differentialquotienten wieder eingeklammert, weil bei Bildung derselben bloß s_1 und t als independent, $s_2, s_3 \dots s_n$ aber infolge der Gleichungen (11) als Funktionen von s_1 und t zu betrachten sind.

Die Gleichung (12) mit der Gleichung (10) verglichen zeigt, daß $(\partial \varphi_1 / \partial s_1)$, daher infolge der Gleichung (9) auch

$$\frac{1}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}$$

ein integrierender Faktor der Gleichung (10) ist. Hat man daher die Integrale $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ gefunden, so ist damit sofort auch der integrierende Faktor der letzten noch übrig bleibenden Differentialgleichung (10) gefunden. Es ist dies vorläufig nur ein spezieller Fall des Prinzips des letzten Multiplikators. Um dieses Prinzip in seiner ganzen Allgemeinheit zu beweisen, wollen wir annehmen, es sei

$$\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial S_n}{\partial s_n}$$

von Null verschieden. Wir wollen setzen:

$$S_1 = \frac{X_1}{X}, S_2 = \frac{X_2}{X}, \dots, S_n = \frac{X_n}{X},$$

wobei die $n + 1$ Größen $X, X_1, X_2 \dots X_n$ wieder Funktionen von $t, s_1, s_2 \dots s_n$ sein sollen.

Dann geht die Gleichung (4) über in:

$$(13) \left\{ f = f' \cdot \left[1 + \frac{\delta t}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial s_1} + \frac{\partial X_2}{\partial s_2} + \dots \right) - \frac{\delta t}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial s_1} \cdot \frac{X_1}{X} + \frac{\partial X}{\partial s_2} \cdot \frac{X_2}{X} + \dots \right) \right] \right\}.$$

Hier wurde kürzshalber f statt $f(t, s_1, s_2 \dots)$ und f' statt $f(t', s_1', s_2' \dots)$ geschrieben. Wir wollen nun setzen:

$$Z = e^{\int \frac{\delta t}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial s_1} + \frac{\partial X_2}{\partial s_2} + \dots \right)};$$

dann verwandelt sich der Ausdruck in der eckigen Klammer der Gleichung (13) in:

$$1 + \frac{\delta Z}{Z} - \frac{\delta X}{X} = \frac{Z'}{X'} \cdot \frac{X}{Z},$$

wenn $X' = X + \delta X$ und $Z' = Z + \delta Z$ die Werte der Größen X und Z zur Zeit $t' = t + \delta t$ sind; also die Werte, welche X und Z annehmen, wenn man darin $t', s_1', s_2' \dots$ statt $t, s_1, s_2 \dots$ substituiert. Die Gleichung (13) selbst geht über in:

$$\frac{Z' f'}{X'} = \frac{Z f}{X}.$$

Schließt man in derselben Weise von $t + \delta t$ auf $t + 2 \delta t$, dann auf $t + 3 \delta t$ usf, so überzeugt man sich, daß Zf/X für alle Zeit konstant, also eine Funktion der φ sein muß. Wir wollen wieder in den Ausdruck (2) $d\varphi_1, d\varphi_2 \dots d\varphi_n$ statt $ds_1, ds_2 \dots ds_n$ einführen, so erhalten wir:

$$(14) \quad dN = \frac{f(t, s_1, s_2 \dots)}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n$$

für die Anzahl der Punktesysteme, deren Zustände zwischen den Grenzen (C) liegen, und da diese Anzahl konstant sein muß, so muß auch

$$\frac{f}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}$$

konstant sein. Nun sahen wir aber, daß auch Zf/X konstant ist, daher ist auch

$$(15) \quad \frac{Z}{X} \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} = \text{const.}$$

Unter einer Konstanten ist da immer eine Größe zu verstehen, die bloß Funktion der φ ist. Die übrigen Schlüsse bleiben dieselben wie früher. Führt man in die linke Seite der Gleichung:

$$d s_1 d s_2 \cdots d s_n \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} = d \varphi_1 d \varphi_2 \cdots d \varphi_n$$

die Variablen $s_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ ein, so geht dieselbe über in:

$$\frac{d s_1 d \varphi_2 d \varphi_3 \cdots d \varphi_n}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} \cdot \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}$$

Durch Einführung derselben Variablen verwandelt sich die rechte Seite derselben Gleichung in:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right) d s_1 d \varphi_2 d \varphi_3 \cdots d \varphi_n$$

und da beide Ausdrücke gleich sein müssen, folgt:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right) = \frac{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}}$$

also nach Gleichung (15)

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right) = \frac{X}{Z \sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} \text{ const.}$$

Der mit der Konstanten multiplizierte Ausdruck ist also in dem allgemeinen Falle der integrierende Faktor der Differentialgleichung $d s_1 - S_1 dt = 0$, wenn überall $s_2, s_3 \dots s_n$ infolge der Integrale (11) als Funktionen von s_1 und t ausgedrückt werden, womit das Prinzip des letzten Multiplikators in seiner ganzen Allgemeinheit gewonnen ist. Die Rechnung, welche wir gegenwärtig geführt haben, war aber identisch mit der des ersten Abschnittes meiner Abhandlung: „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“. Man überzeugt sich da-

von am schnellsten in folgender Weise. Wenn wir unter den Differentialgleichungen (1) die Bewegungsgleichungen für ein mehratomiges Gasmolekül, unter den s die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten seiner Atome verstehen, so ist

$$\frac{\partial S_1}{\partial s_1} = \frac{\partial S_2}{\partial s_2} = \dots = \frac{\partial S_n}{\partial s_n} = 0.$$

Außerdem enthalten die Größen $S_1, S_2 \dots S_n$ die Zeit nicht. Es ist also, wenn sehr viele Gasmoleküle vorhanden sind, die Zahl derjenigen, deren Zustände zwischen den Grenzen (A) liegen, durch die Formel (5) gegeben. Seien nun

$$\varphi_2 = a_2, \varphi_3 = a_2 \dots \varphi_n = a_n$$

die Integrale, welche man nach Elimination der Zeit aus allen Integralen der Bewegungsgleichungen erhält; $\varphi_1 = a_1$ sei das Integral, welches auch die Zeit enthält, so daß also $a_2, a_3 \dots a_n$ den Bewegungszustand, a_1 die Bewegungsphase bei gegebener Zeit bestimmt. Dann darf, wenn sich die durch die Formel (5) gegebene Zustandsverteilung mit der Zeit nicht ändern soll, diese Formel die Zeit, also φ_1 nicht enthalten; es muß also

$$dN = f(\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n) d s_1, d s_2 \dots d s_n$$

die Zahl der Moleküle sein, deren Zustand zwischen den Grenzen (A) liegt, was mit dem in der zitierten Abhandlung Gefundenen übereinstimmt, wo ebenfalls bewiesen wurde, daß f eine beliebige Funktion von $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ sein kann, solange keine Zusammenstöße stattfinden. Aus den Schlußformeln der gegenwärtigen Abhandlung gelangt man zu diesem Resultate in folgender Weise. Da die S die Zeit nicht enthalten, so ist $1/S_1$ ein integrierender Faktor der Gleichung $d s_1 - S_1 d t = 0$. Nach dem vorhergehenden ist aber

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}$$

ebenfalls integrierender Faktor. Wir erhalten also:

$$\frac{1}{S_1} \sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} = \text{const.}$$

Wenn man sich im Ausdrucke links alles durch $s_1, t, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ ausgedrückt denkt, so kann derselbe die Zeit nicht enthalten, da weder S_1 noch die Funktionaldeterminante die

Zeit enthalten. Folglich ist die Konstante bloß Funktion von $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_n$. Es ist also

$$(16) \quad dt = \frac{\text{const.}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} ds_1$$

die Zeit, während welcher bei gegebenem Bewegungszustande, also bei gegebenen $a_2, a_3 \dots a_n$ die Variable s_1 zwischen s_1 und $s_1 + ds_1$ liegt. Sind nun sehr viele Moleküle vorhanden und ist

$$M = F(\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n) d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_n$$

die Zahl derjenigen, für welche die den Bewegungszustand bestimmenden Integrationskonstanten $a_2, a_3 \dots a_n$ zwischen:.

(D) φ_2 und $\varphi_2 + d\varphi_2, \varphi_3$ und $\varphi_3 + d\varphi_3 \dots \varphi_n$ und $\varphi_n + d\varphi_n$

liegen, so wird sich die Verteilung der verschiedenen Bewegungsphasen dann mit der Zeit nicht ändern, wenn sie durch die Proportion $dN:M = dt:f dt$ bestimmt ist. In dieser Proportion ist dN die Zahl der Moleküle, deren Bewegungszustand zwischen den Grenzen (D) liegt, während ihre Bewegungsphase dadurch bestimmt ist, daß s_1 zwischen s_1 und $s_1 + ds_1$ liegt. Das Integral $f dt$ ist bei konstanten $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ über alle möglichen Werte von s_1 zu erstrecken, ist also, weil der Wert von dt durch die Gleichung (16) bestimmt ist, eine Funktion von $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$. Aus der obigen Proportion ergibt sich unmittelbar:

$$dN = \frac{f(\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n)}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n}} ds_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_n$$

und nach Wiedereinführung von $s_2, s_3 \dots s_n$

$$(17) \quad dN = f(\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n) ds_1 ds_2 ds_3 \dots ds_n,$$

worin man die in meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“ entwickelte Formel wieder erkennt. Wir können hieraus schließen, daß wir die Formeln jener Abhandlung auch umgekehrt auf dem Wege finden könnten, auf dem Jacobi zu dem Prinzip des letzten Multiplikators gelangte. Ehe wir dies aber in Angriff nehmen, müssen noch einige Bemerkungen vorausgeschickt werden.

II. Wärmegleichgewicht zwischen einer endlichen Zahl materieller Punkte.

Seien $s_1, s_2 \dots s_n$ wieder die n Variablen, durch welche der Zustand eines Systems von n materiellen Punkten zu einer bestimmten Zeit t charakterisiert wird. Zwischen denselben sollen wieder die Differentialgleichungen (1) bestehen, durch deren Integration man sämtliche Variable, wenn ihre Anfangswerte gegeben sind, als Funktionen der Zeit findet. Eliminiert man die Zeit, so bleiben noch $n-1$ Gleichungen zwischen n Variablen. Es ist jedoch noch zu bemerken, daß nicht notwendig, wenn der Wert einer einzigen dieser n Variablen gegeben ist, damit alle Werte der $n-1$ übrigen bestimmt sind. Es kann vielmehr der Fall eintreten, daß trotz der $n-1$ Gleichungen dadurch die Werte einiger der $n-1$ Variablen bloß zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sind, so daß sie noch unendlich viele kontinuierlich sich folgende Werte annehmen können; wie etwa die Gleichung $\arcsin x = A \arcsin y$, wenn A irrational ist, bei gegebenem x bloß aussagt, daß y zwischen -1 und $+1$ liegt. Ein Beispiel wird dies am schnellsten klar machen. Ein einziger materieller Punkt, mit den Koordinaten x, y und den Geschwindigkeitskomponenten u, v bewege sich in der Ebene. Die Kraftfunktion der auf ihn wirkenden Kräfte sei a/r , wo a konstant

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist. Er wird also nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze nach dem Koordinatenanfangspunkte O gezogen. Er beschreibt dann um denselben, wenn er sich nicht etwa ins Unendliche entfernt, welchen Fall wir ausschließen, eine in sich zurückkehrende Bahn. Wenn daher der Wert einer der vier Variablen x, y, u und v gegeben ist, so sind die Werte der drei anderen bestimmt. Es besteht ja zwischen ihnen nach Elimination der Zeit noch die Gleichung der lebendigen Kraft, die des Prinzips der Flächen und die Gleichung der Bahn. Anders dagegen wäre die Sache, wenn die Kraftfunktion gleich $a/r + b/r^2$ wäre. Die Bahn des Beweglichen wäre dann wieder einer Ellipse ähnlich, würde aber nicht in sich zurückkehren mit Ausnahme des speziellen Falles, daß der Winkel zweier sich

folgender Apsidenlinien in einem rationalen Verhältnisse zu π steht; die Gestalt der Bahn ist durch die nachstehende Fig. 1 versinnlicht. Der materielle Punkt beschreibt jetzt keine in sich zurückkehrende Linie, sondern durchwandert allmählich das ganze Stück der Ebene, welches zwischen zwei aus dem Zentrum O mit den Radien OA und OB beschriebenen Kreisen liegt, ohne je wieder exakt zu demselben Punkte der Ebene zurückzukehren. Betrachten wir irgend ein innerhalb jener Kreise liegendes Element der Ebene $dx dy$ und lassen den

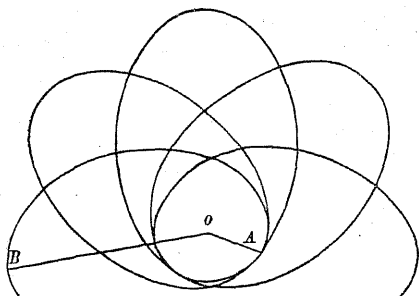


Fig. 1.

materiellen Punkt eine sehr lange Zeit T hindurch sich bewegen, so ist das Verhältnis jenes Bruchteils von T , während welcher sich der Punkt innerhalb $dx \cdot dy$ befindet, zur ganzen Zeit T eine mathematisch vollständig definierte Größe.

Wir wollen sie als diejenige Zeit bezeichnen, während welcher sich der materielle Punkt *durchschnittlich* im Verlaufe der Zeiteinheit innerhalb $dx \cdot dy$ befindet, oder als die Zeit, während welcher im Durchschnitt im Verlaufe der Zeiteinheit gleichzeitig x zwischen x und $x + dx$, y aber zwischen y und $y + dy$ liegt. Ich werde kürzshalber den Zusatz „im Verlaufe der Zeiteinheit“ öfters weglassen. Der Durchschnittswert ist immer auf die Zeiteinheit zu beziehen. Die Gleichung der Bahn ist jetzt nicht tauglich, bei gegebenem x den Wert des y zu bestimmen. Es gehört nicht zu jedem x eine nur endliche Zahl von Werten des y , sondern x und y sind voneinander unabhängig (nur schließt eines das andere zwischen gewissen Grenzen ein). u und v aber sind bei gegebenem x und y durch die Gleichung der lebendigen Kraft und das Prinzip der Flächen bestimmt.

Ähnlich wäre es, wenn $ax^2 + by^2$ die Kraftfunktion wäre, wobei a und b inkommensurable Konstanten vorstellen. Der materielle Punkt würde dann zwei aufeinander senkrechte einfache Pendelschwingungen von inkommensurabler Schwingungs-

dauer gleichzeitig vollführen, also mit wachsender Zeit allmählich die ganze Fläche eines Rechtecks durchwandern. Es wären wieder x und y unabhängig, nur zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen, u hingegen wäre Funktion von x , v von y . Wir kehren nun zu dem allgemeinen Falle zurück. Es seien

$$\varphi_n(s_1, s_2 \dots s_n) = a_n, \varphi_{n-1}(s_1, s_2 \dots s_n) = a_{n-1} \dots, \varphi_{k+1}(s_1, s_2 \dots s_n) = a_{k+1}$$

$n - k$ die Zeit nicht enthaltende Integrale der Gleichungen (1), durch welche sich bei gegebenem Werte der Konstanten $a_n, a_{n-1} \dots a_{k+1}$, $n - k$ Variable als Funktionen der k übrigen bestimmen, wie in den früheren Beispielen die Gleichung der lebendigen Kraft und das Prinzip der Flächen. k der Variablen $s_1, s_2 \dots s_n$ aber sollen nicht durch die übrigen bestimmbar sein, wie in den vorigen Beispielen x und y .

Wir wollen sie unabhängig nennen, was so zu verstehen ist: Jede dieser k Variablen soll bei gegebenen Werten der Konstanten $a_n, a_{n-1} \dots a_{k+1}$ (diese werden für das ganze Problem als ein für allemal bestimmt vorausgesetzt) und gegebenen Werten der $k - 1$ übrigen Variablen noch fähig sein, eine unendliche Zahl kontinuierlich sich folgender aber zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossener Werte anzunehmen. Trotz der $n - 1$ Gleichungen, die nach Elimination von t übrig bleiben, muß, um den allgemeinsten Fall zu betrachten, diese Annahme gemacht werden, wie wir in den früheren Beispielen sahen. Sind (wie bei der Bewegung eines Punktes nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze) alle s durch ein einziges bestimmt, so brauchen wir nur $k = 1$ zu setzen. Wie in den vorigen Beispielen x und y , so sollen jetzt die Variablen $s_1, s_2 \dots s_k$ voneinander unabhängig nur zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sein, während $s_{k+1}, s_{k+2} \dots s_n$ wie dort u und v bestimmt sind. Wir können daher, falls die Bewegung stationär ist, wieder nach der Zeit fragen, während welcher durchschnittlich $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen

$$(E) \quad s_1 \text{ und } s_1 + d s_1, s_2 \text{ und } s_2 + d s_2 \dots s_k \text{ und } s_k + d s_k$$

liegen. Nur müssen natürlich $s_1, s_2 \dots s_k$ innerhalb jener Grenzen eingeschlossen sein, welche die Werte dieser Variablen im Verlaufe der ganzen Zeit nicht überschreiten. Wir wollen die

Zeit, während welcher durchschnittlich die Variablen $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen den Grenzen (E) liegen, mit $F(s_1, s_2 \dots s_k) ds_1 ds_2 \dots ds_k$ bezeichnen und wollen sie durch eine Rechnung aufsuchen, die dem Jacobischen Beweise des Prinzips des letzten Multiplikators ganz analog ist. Ich will das Problem der Bestimmung der Funktion F , welche uns die durchschnittliche Zustandsverteilung liefert, wenn nur eine endliche Zahl (n) von Atomen in Wechselwirkung steht, als *das Problem des Wärmegleichgewichtes zwischen einer endlichen Zahl von Atomen* bezeichnen.¹⁾ Kennt man die Werte von $s_1, s_2 \dots s_k$ zu einer bestimmten Zeit t , so können wir daraus durch die Differentialgleichungen (1), die Werte $s_1', s_2' \dots s_k'$ dieser Größen zur Zeit $t' = t + \delta t$ berechnen. Ich will sie die den Werten $s_1, s_2 \dots s_k$ nach der Zeit δt entsprechenden Werte nennen. Sämtlichen innerhalb der Grenzen (E) liegenden Werten werden nach der Zeit δt gewisse andere Werte entsprechen, die wieder zwischen gewissen anderen unendlich nahen Grenzen (G) liegen werden.

¹⁾ Die Funktion F könnte ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen des vorigen Abschnittes gefunden werden. Für

$$\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots = 0$$

enthält nämlich die dort gebrauchte Funktion f bloß $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$. Es ist also

$$\frac{f(\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1})}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}}} \cdot ds_1 ds_2 \dots ds_k d\varphi_{k+1} d\varphi_{k+2} \dots d\varphi_n$$

die Zahl der Moleküle, für welche $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen den Grenzen (E) und $\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2} \dots \varphi_n$ zwischen φ_{k+1} und $\varphi_{k+1} + d\varphi_{k+1}$ usf. liegen. Und da $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$ konstant bleiben, so muß

$$\frac{ds_1 ds_2 \dots ds_k}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}}} \cdot \text{const.}$$

die Zeit sein, während welcher durchschnittlich der Zustand eines gegebenen Moleküls so beschaffen ist, daß $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen den Grenzen (E) liegen, womit F bestimmt ist. Im Texte will ich jedoch den umgekehrten Weg einschlagen, die Funktion F nach einer anderen Weise bestimmen und aus ihr erst zu den Gleichungen des vorigen Abschnittes zurückkehren.

Die Zeit, während welcher durchschnittlich die Variablen $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen den Grenzen (G) liegen, wird

$$f(s_1', s_2' \dots s_k') d s_1' d s_2' \dots d s_k'$$

sein, wobei

$$d s_1' d s_2' \dots d s_k' = d s_1 d s_2 \dots d s_k \sum \pm \frac{\partial s_1'}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_2'}{\partial s_2} \dots \frac{\partial s_k'}{\partial s_k}.$$

Sei δt unendlich klein, so liefern die Differentialgleichungen (1)

$$s_1' = s_1 + S_1 \delta t, s_2' = s_2 + S_2 \delta t \dots s_n' = s_n + S_n \delta t.$$

Daher hat man mit Vernachlässigung unendlich kleiner höherer Ordnung

$$\begin{aligned} \sum \pm \frac{\partial s_1'}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_2'}{\partial s_2} \dots \frac{\partial s_k'}{\partial s_k} &= 1 + \delta t \left(\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_k}{\partial s_k} \right) \\ F(s_1', s_2' \dots s_k') d s_1' d s_2' \dots d s_k' &= F(s_1, s_2 \dots s_k) \\ (18) \quad \left[1 + \delta t \left(\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_k}{\partial s_k} \right) \right] & d s_1 d s_2 \dots d s_k. \end{aligned}$$

Bei Bildung der partiellen Differentialquotienten sind $s_{k+1}, s_{k+2} \dots s_n$ als Funktionen von $s_1, s_2 \dots s_k$ anzusehen, δt ist eine Konstante. Die Variablen werden jedesmal so oft sie in die Grenzen (E) eintreten, nach der Zeit δt in die Grenzen (G) eintreten. Und jedesmal wird auch der Austritt aus den Grenzen (G) und δt später als der aus den Grenzen (E) erfolgen. Da nun δt als eine reine Konstante betrachtet wurde, so dauert das Verweilen zwischen den Grenzen (G) immer so lange, wie das zwischen den Grenzen (E). Und da auch der Eintritt in beide Grenzen gleich oft erfolgt, so muß die Zeit, während welcher die Werte der Variablen zwischen den Grenzen (E) liegen, gleich der Zeit sein, während welcher sie zwischen den Grenzen (G) liegen; es ist also:

$$F(s_1, s_2 \dots s_k) d s_1 d s_2 \dots d s_k = F(s_1', s_2' \dots s_k') d s_1' d s_2' \dots d s_k'$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (18)

$$(19) \quad F(s_1, s_2 \dots s_k) = F(s_1', s_2' \dots s_k') \cdot \left[1 + \delta t \left(\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_k}{\partial s_k} \right) \right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer bestimmt sich in folgender Weise: Da $\varphi_n = a_n$ ein Integral der Differentialgleichungen (1) ist, so hat man identisch:

$$(20) \quad S_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1} + S_2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_2} + \dots S_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} = 0,$$

in welcher Formel aber alle Variablen $s_1, s_2 \dots s_n$ als independent zu betrachten, die partiellen Differentialquotienten also in einem anderen Sinne als in Formel (19) zu verstehen sind. Wir wollen nun eine partielle Differentiation, bei der $s_1, s_2 \dots s_{n-1}$ independent, s_n in Folge der Gleichung $\varphi_n = a_n$ als Funktion derselben betrachtet wird, dadurch bezeichnen, daß wir dem ∂ den Index 1 beifügen, während ∂ ohne Index eine partielle Differentiation anzeigt, bei der alle $s_1, s_2 \dots s_n$ independent sind. Dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial_1 S_2}{\partial s_2} \dots \frac{\partial_1 S_{n-1}}{\partial s_{n-1}} &= \frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_1}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial_1 s_n}{\partial s_1} \\ + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \frac{\partial S_2}{\partial s_n} \frac{\partial_1 s_n}{\partial s_2} + \dots &= \frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} \\ - \frac{1}{\partial \varphi_n} \left(\frac{\partial S_1}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \right). \end{aligned}$$

Ich behandle hier nicht den allgemeinsten Fall, wo

$$S_1 = \frac{X_1}{X}, S_2 = \frac{X_2}{X} \dots S_n = \frac{X_n}{X}$$

(die X sind Funktionen von s und t), dessen Lösung wieder durch die Größe

$$Z = e^{\int \frac{dt}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial s_1} + \frac{\partial X_2}{\partial s_2} + \dots \right)}$$

gegeben wird; sondern ich setze voraus, daß die φ und S t nicht enthalten. Außerdem sei

$$\frac{\partial S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} = 0.$$

Differentiiert man die Gleichung (20) partiell nach s_n , so findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1} + \frac{\partial S_2}{\partial s_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_2} + \dots \frac{\partial S_n}{\partial s_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} &= - S_1 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial s_1 \partial s_n} \\ &\quad - S_2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial s_2 \partial s_n} - \dots S_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial s_n^2}, \end{aligned}$$

endlich ist

$$\frac{d \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \right)}{dt} = S_1 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial s_1 \partial s_n} + S_2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial s_2 \partial s_n} + \dots S_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial s_n^2};$$

man erhält daher

$$(21) \quad \frac{\partial_1 S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial_1 S_2}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial_1 S_{n-1}}{\partial s_{n-1}} = \frac{d \log \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \right)}{dt}.$$

Wir wollen nun eine partielle Differentiation, wobei $s_1, s_2 \dots s_{n-2}$ als independent, s_{n-1} und s_n aber wegen $\varphi_n = a_n$ und $\varphi_{n-1} = a_{n-1}$ als Funktionen davon betrachtet werden, mit ∂_2 bezeichnen. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial_2 S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial_2 S_2}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial_2 S_{n-2}}{\partial s_{n-2}} &= \frac{\partial_1 S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial_1 S_2}{\partial s_2} \\ &+ \dots + \frac{\partial_1 S_{n-1}}{\partial s_{n-1}} - \frac{1}{\frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}}} \left(\frac{\partial_1 S_1}{\partial s_{n-1}} \cdot \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_1} \right. \\ &\left. + \frac{\partial_1 S_2}{\partial s_{n-1}} \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial_1 S_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \cdot \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Da sowohl φ_n als auch φ_{n-1} Integrale von (1) sind, so hat man identisch

$$S_1 \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_1} + S_2 \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_2} + \dots + S_{n-1} \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} = 0,$$

wobei wir s_n durch die Gleichung $\varphi_n = a_n$ als Funktion von $s_1, s_2 \dots s_{n-1}$ ausgedrückt denken müssen. Differentiiert man diese Gleichung partiell nach s_{n-1} , wobei aber wieder s_n als Funktion von $s_1, s_2 \dots s_{n-1}$ angesehen, daher das Zeichen ∂_1 angewendet werden soll, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 S_1}{\partial s_{n-1}} \cdot \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_1} + \frac{\partial_1 S_2}{\partial s_{n-1}} \cdot \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial_1 S_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \cdot \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \\ = - S_1 \frac{\partial_1^2 \varphi_{n-1}}{\partial s_1 \partial s_{n-1}} - S_2 \frac{\partial_1^2 \varphi_{n-1}}{\partial s_2 \partial s_{n-1}} - \dots - S_{n-1} \frac{\partial_1^2 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Ferner hat man

$$\frac{d \left(\frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \right)}{dt} = S_1 \frac{\partial_1^2 \varphi_{n-1}}{\partial s_1 \partial s_{n-1}} + S_2 \frac{\partial_1^2 \varphi_{n-1}}{\partial s_2 \partial s_{n-1}} + \dots + S_{n-1} \frac{\partial_1^2 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}^2}.$$

Mit Berücksichtigung aller dieser Gleichungen und der Gleichung (21) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_2 S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial_2 S_2}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial_2 S_{n-2}}{\partial s_{n-2}} \\ = \frac{d \log \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \right)}{dt} = \frac{d \log \left(\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \right)}{dt}, \end{aligned}$$

worin

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$$

die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_{n-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_n}$$

ist. Von der Richtigkeit der letzten Gleichung überzeugt man sich, indem man

$$\frac{\partial_1 \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$$

durch partielle Differentialquotienten ausdrückt, in denen alle s independent betrachtet werden. Es ist bereits ersichtlich, wie der Beweis fortzuführen ist; man gelangt schließlich zur Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_{n-k} S_1}{\partial s_1} + \frac{\partial_{n-k} S_2}{\partial s_2} + \dots + \frac{\partial_{n-k} S_k}{\partial s_k} \\ &= \frac{d \log \left(\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}} \right)}{d t} \end{aligned}$$

∂_{n-k} zeigt eine Differentiation an, wobei $s_1, s_2 \dots s_k$ als independent, $s_{k+1} \dots s_n$ aber vermöge der Gleichungen

$$\varphi_n = a_n \dots \varphi_{k+1} = a_{k+1}$$

als Funktionen davon zu betrachten sind. Nun sind aber die partiellen Differentialquotienten der Formel (19) genau so zu verstehen; dieselbe geht daher über in

$$\begin{aligned} & F(s_1, s_2 \dots s_k) = F(s'_1, s'_2 \dots) \\ & \left[1 + \delta t \frac{d \log \left(\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}} \right)}{d t} \right], \end{aligned}$$

oder wenn man den Wert der Größe unter dem Logarithmenzeichen zur Zeit t mit Q , den zur Zeit t' mit Q' bezeichnet:

$$Q F(s_1, s_2 \dots) = Q' F(s'_1, s'_2 \dots).$$

Schließt man in derselben Weise auf die Zeiten

$$t + 2 \delta t, t + 3 \delta t$$

usf., so überzeugt man sich, daß

$$Q F(s_1, s_2 \dots s_k)$$

für alle Zeiten konstant ist. Es ist also

$$F(s_1, s_2 \dots) = \frac{C}{Q}.$$

Substituiert man hier für Q seinen Wert, so ergibt sich:

$$F(s_1, s_2 \dots s_k) = \frac{C}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}}}.$$

Folglich ist

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(s_1, s_2 \dots s_k) \cdot ds_1 \cdot ds_2 \dots ds_k \\ \cdot = \frac{C ds_1, ds_2 \dots ds_k}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}}} \end{array} \right.$$

die Zeit, während welcher die Variablen $s_1, s_2 \dots s_k$, welche fähig sind, unabhängig eine Reihe kontinuierlich sich folgender Werte anzunehmen, durchschnittlich zwischen den Grenzen (E) liegen. Wir können dieselbe unmittelbar bestimmen, sobald wir die Integrale $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$ kennen, ohne daß es notwendig ist, über die Art der Veränderung von $s_1, s_2 \dots s_k$ sonst etwas zu wissen. Es könnte sein, daß bei gegebenen $s_1, s_2 \dots s_k$ die Größen $s_{k+1} \dots s_n$ nicht eindeutig bestimmt wären, sondern zu den angenommenen Werten von $s_1 \dots s_k$ mehrere Wertesysteme von $s_{k+1} \dots s_n$ gehörten. Es wäre dann die Wahrscheinlichkeit, daß $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen den Grenzen (E) liegen, für jedes Wertesystem besonders zu berechnen, indem man in die Formel (22) jedesmal die betreffenden Werte von $s_{k+1} \dots s_n$ einsetzte. Es ist nun leicht, von der Formel (22) wieder zur Formel (17) zu gelangen. Wenn statt eines sehr viele Punktesysteme vorhanden sind, die aber nicht in Wechselwirkung stehen, so sei

$$M = \Phi(\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}) d\varphi_n \dots d\varphi_{k+1}$$

die Zahl derjenigen, für welche $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$ zwischen φ_n und $\varphi_n + d\varphi_n \dots$ liegen. Die Zahl derjenigen, deren Bewegungsphase außerdem noch dadurch bestimmt ist, daß $s_1, s_2 \dots s_k$ zwischen den Grenzen (E) liegen, sei dN . Dann wird sich diese Verteilung der Bewegungsphasen erhalten, wenn sich $dN : M$ wie $dt : \int dt$ verhält, wobei

$$dt = F(s_1, s_2 \dots) ds_1 ds_2 \dots ds_k$$

ist. Substituiert man den Wert (22) für F und führt statt $d\varphi_n d\varphi_{n-1} \dots d\varphi_{k+1}$ wieder $s_n, s_{n-1} \dots s_{k+1}$ ein, so ergibt sich, weil $\int dt$ ebenfalls Funktion von $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$ ist,

$$dN = f(\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}) ds_1 ds_2 \dots ds_n,$$

was mit der Formel (17) übereinstimmt.

Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, diese allgemeinen Schlüsse durch das bereits erwähnte sehr einfache Beispiel zu erläutern. Ein einziger materieller Punkt mit der Masse 1, den Koordinaten x, y und den Geschwindigkeitskomponenten u, v bewege sich in der xy -Ebene. Derselbe werde mit einer Kraft von der Intensität

$$\frac{a}{r^2} + \frac{2b}{r^3}$$

gegen den Koordinatenanfangspunkt gezogen. Setzen wir

$$-\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} = \chi,$$

so ist also in unserem Falle

$$s_1 = x, s_2 = y, s_3 = u, s_4 = v.$$

Die Gleichungen (1) reduzieren sich auf:

$$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{du}{dt} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Zwei Integrale derselben, welche u und v bestimmen, sind:

$$(23) \quad \varphi_4 = \frac{u^2 + v^2}{2} + \chi = a_4, \quad \varphi_3 = yu - xv = a_3.$$

Zwischen x und y aber besteht im allgemeinen keine für alle Zeiten gültige Relation. Nennen wir die Zeit, während welcher sich der materielle Punkt durchschnittlich im Elemente $dx dy$ befindet, $f(x, y) dx dy$. Wenn der Punkt der Ebene mit den Koordinaten x, y gegeben ist, an dem sich das Bewegliche zur Zeit t befand, so ist damit der Punkt x', y' , an dem es sich zur Zeit $t + \delta t$ befindet, gegeben. Ich will den Punkt x', y' den dem Punkte x, y entsprechenden Punkt nennen. Jedem Punkte des Flächenelementes $dx dy$ entspricht dann ein gewisser Punkt der Ebene, dem ganzen Flächenelemente $dx dy$ entspricht ein anderes Flächenelement $dx' dy'$ (was übrigens, wenn δt endlich ist, nicht notwendig rechteckig ist). Es ist dann

$$f(x', y') dx' dy' = f(x, y) dx dy,$$

weil das Bewegliche jedesmal, so oft es in $dx dy$ eintritt, um δt später in $dx' dy'$ eintritt und auch der Austritt aus $dx' dy'$ immer um die Zeit δt später als der aus $dx dy$ erfolgt. Ferner ist

$$dx' dy' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} \right) dx dy.$$

Ist δt unendlich klein, so ist

$$x' = x + u \delta t, \quad y' = y + v \delta t,$$

daher

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} = 1 + \delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Bei Bildung von $\partial u / \partial x$ und $\partial v / \partial y$ sind u und v infolge der Gleichungen (23) Funktionen von x und y . Man findet durch partielle Differentiation derselben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2 - x \frac{\partial \chi}{\partial x}}{x u + y v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v^2 - y \frac{\partial \chi}{\partial y}}{x u + y v},$$

daher

$$1 + \delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{x' u' + y' v'}{x u + y v}.$$

Es ist somit

$$(x' u' + y' v') f(x', y') = (x u + y v) f(x, y);$$

und da dasselbe auch für die Zeitmomente

$$t + 2 \delta t, \quad t + 3 \delta t \dots$$

gilt, so ist

$$(x u + y v) f(x, y)$$

konstant. In der Tat ist in diesem speziellen Falle:

$$\begin{aligned} \sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \dots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial s_{k+1}} &= \frac{\partial \varphi_4}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \\ &= x u + y v, \end{aligned}$$

weil in der Formel (22) x, y, u und v als independent zu betrachten sind. Es liefert daher die Formel (22) für die Zeit, während welcher sich der Punkt durchschnittlich im Elemente $dx \cdot dy$ aufhält, ebenfalls den Wert

$$f(x, y) dx dy = \frac{C dx dy}{x u + y v}.$$

Bezeichnet r die Entfernung des materiellen Punktes vom Koordinatenanfangspunkte, ρ die Komponente seiner Geschwindig-

keit in der Richtung von r , so ist $xu + yv = r\rho$. Es ist also nach Bestimmung der Konstanten C

$$f(x, y) dx dy = \frac{dx dy}{\iint \frac{r\rho}{r\rho}}$$

Die doppelte Integration ist über das ganze, vom Beweglichen durchlaufene Stück der Ebene zu erstrecken. In diesem einfachen Falle kann man leicht direkt die ganze Zeit der Bewegung und die Zeit berechnen, während welcher sich das Bewegliche im Elemente $dx dy$ aufhält. Man findet für ihr Verhältnis in der Tat den obigen Wert.

Um noch einige kompliziertere Beispiele zu machen, nehmen wir an, die Variablen $s_1, s_2 \dots s_n$ seien die Koordinaten $x_1, y_1, x_2 \dots y_\lambda$ und Geschwindigkeitskomponenten $u_1, v_1, u_2 \dots v_\lambda$ von λ in Wechselwirkung stehenden materiellen Punkten, die sich unter dem Einflusse bloß innerer Kräfte in einer Ebene bewegen. Es sollen bloß die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\varphi_n = \chi + \sum m \frac{u^2 + v^2}{2} = a_n,$$

die vier Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes

$$\varphi_{n-1} = \sum m x = a_{n-1}, \quad \varphi_{n-2} = \sum m y = a_{n-2},$$

$$\varphi_{n-3} = \sum m u = a_{n-3}, \quad \varphi_{n-4} = \sum m v = a_{n-4}$$

und das Prinzip der Flächen

$$\varphi_{n-5} = \sum m (xv - yu) = a_{n-5}$$

den Charakter der mit $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$ bezeichneten Integrale haben, während die Variablen im Verlaufe der Bewegung alle möglichen mit diesen Gleichungen vereinbaren Werte durchlaufen, also alle anderen Integrale der Kategorie der mit $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k$ bezeichneten angehören. Wählen wir $x_1, y_1, u_1, v_1, u_2, v_2$ als die durch die sechs Gleichungen bestimmten Variablen, welche früher $s_n, s_{n-1} \dots s_{k+1}$ hießen, so geht die Funktionaldeterminante der Formel (22) über in

$$\sum \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_1} \dots \frac{\partial \varphi_{n-5}}{\partial v_2},$$

für welche man, unter Berücksichtigung der obigen Werte der φ , abgesehen von einem konstanten Faktor den Wert

$$(x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)(v_2 - v_1)$$

findet. Die Formel (22) liefert daher

$$\frac{C dx_2 dy_2 \dots dy_\lambda du_3 dv_3 \dots dv_\lambda}{(x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)(v_2 - v_1)}$$

für die Zeit, während welcher durchschnittlich die Variablen

$$x_2, y_2, x_3 \dots y_\lambda, u_3, v_3, u_4 \dots v_\lambda$$

zwischen x_2 und $x_2 + dx_2$ usw. liegen. Geschieht die Bewegung der λ materiellen Punkte im Raume und besitzen wieder nur die Schwerpunksgleichungen, die Flächengleichungen und die Gleichung der lebendigen Kraft die Eigenschaft der Integrale $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$, so wollen wir die Koordinaten des Schwerpunktes mit x, y, z , die Geschwindigkeitskomponenten desselben mit u, v, w bezeichnen. Statt der Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2 \dots z_\lambda$ und Geschwindigkeitskomponenten $u_1, v_1 \dots w_\lambda$ wollen wir die Differenzen

$$x_1 - x = \xi_1, y_1 - y = \eta_1 \dots u_1 - u = \alpha_1, v_1 - v = \beta_1 \dots$$

einführen. Dann bestimmen die Schwerpunksgleichungen die sechs Variablen x, y, z, u, v, w , und zwischen den übrigen Variablen

$$\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{\lambda-1}, \alpha_1, \beta_1 \dots \gamma_{\lambda-1}$$

bestehen die vier Gleichungen:

$$\varphi_n = \chi + \sum m \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} = a_n, \quad \varphi_{n-1} = \sum m (\eta \gamma - \zeta \beta) = a_{n-1},$$

$$\varphi_{n-2} = \sum m (\zeta \alpha - \xi \gamma) = a_{n-2}, \quad \varphi_{n-3} = \sum m (\xi \beta - \eta \alpha) = a_{n-3}.$$

Betrachten wir die Variablen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$ als die durch diese Gleichungen bestimmten Variablen $s_n, s_{n-1} \dots s_{k+1}$, so reduziert sich die Funktionaldeterminante der Formel (22) auf:

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial \alpha_2} \\ = (\xi_1 \alpha_1 + \eta_1 \beta_1 + \zeta_1 \gamma_1)(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1).$$

Es sollen wieder die früher angenommenen λ materiellen Punkte sich im Raume bewegen; nehmen wir an, es sei möglich, daß die auf sie wirksamen Kräfte so beschaffen sind, daß bloß die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\varphi_n = \chi + \sum m \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = a_n$$

die Eigenschaft der mit $\varphi_n, \varphi_{n-1} \dots \varphi_{k+1}$ bezeichneten Integrale besitzt, also die Variablen alle mit der Gleichung der lebendigen Kraft verträglichen Werte durchlaufen, was natürlich bei bloß inneren Kräften nicht der Fall sein könnte. Dann wollen wir w_λ als die durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmte Variable wählen. Wir müssen dann in der Formel (22) $k = n - 1$ setzen, wodurch sich die Funktionaldeterminante dieser Formel auf ein einziges Glied

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial w_\lambda} = m_\lambda w_\lambda$$

reduziert. Die Formel (22) liefert also

$$dt_1 = \frac{C}{w_\lambda} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 \dots dz_\lambda du_1 dv_1 \dots dv_{\lambda-1}$$

für die Zeit, während welcher durchschnittlich die Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2 \dots z_\lambda$ zwischen

$$(H) \quad x_1 \text{ und } x_1 + dx_1 \dots z_\lambda \text{ und } z_\lambda + dz_\lambda$$

und gleichzeitig die Geschwindigkeitskomponenten zwischen u_1 und $u_1 + du_1$ usw. liegen. Nur w_λ ist durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt. Die letzte Formel fand ich bereits in einer der Akademie im Jahre 1868 vorgelegten Abhandlung,¹⁾ in welcher die dieser Formel zugrunde liegende Voraussetzung gemacht wurde. Dieselbe zeigt zunächst, daß bei gegebener Position und Größe der Geschwindigkeit aller Atome für jedes Atom jede Geschwindigkeitsrichtung im Raume gleich wahrscheinlich ist. Führen wir darin die Geschwindigkeiten $c_1, c_2 \dots c_\lambda$ der Atome ein und integrieren bezüglich aller Richtungen derselben, so erhalten wir

$$dt_2 = \frac{c_1^2 c_2^2 \dots c_{\lambda-1}^2 c_\lambda dx_1 dy_1 \dots dz_\lambda dc_1 dc_2 \dots dc_{\lambda-1}}{\int f \dots c_1^2 c_2^2 \dots c_{\lambda-1}^2 c_\lambda dx_1 dy_1 \dots dc_{\lambda-1}}$$

für die Zeit, während welcher durchschnittlich die Koordinaten zwischen den Grenzen (H) und gleichzeitig die Geschwindigkeiten zwischen

$$c_1 \text{ und } c_1 + dc_1 \dots c_{\lambda-1} \text{ und } c_{\lambda-1} + dc_{\lambda-1}$$

liegen. Dabei wurde die Konstante C so bestimmt, daß dt_2 über alle Differentiale integriert eins liefert. Um hieraus die Zeit dt_3 zu finden, während welcher gleichzeitig die Koordinaten

¹⁾ Nr. 5 dieser Sammlung.

zwischen den Grenzen (H) und c_1 zwischen c_1 und $c_1 + dc_1$ liegt, indes die Werte der übrigen Variablen keiner beschränkenden Bedingung unterworfen sind, müssen wir dt_1 bezüglich aller übrigen c , also

$$\text{bezügl. } c_{\lambda-1} \text{ von Null bis } \sqrt{\frac{2}{m_{\lambda-1}} \left(a_n - \chi - \frac{m_1 c_1^2}{2} - \dots - \frac{m_{\lambda-2} c_{\lambda-2}^2}{2} \right)}$$

$$\text{bezügl. } c_{\lambda-2} \text{ von Null bis } \sqrt{\frac{2}{m_{\lambda-2}} \left(a_n - \chi - \frac{m_1 c_1^2}{2} - \dots - \frac{m_{\lambda-3} c_{\lambda-3}^2}{2} \right)}$$

⋮

$$\text{bezügl. } c_2 \text{ von Null bis } \sqrt{\frac{2}{m_2} \left(a_n - \chi - \frac{m_1 c_1^2}{2} \right)}$$

integrieren. Führen wir im Zähler und Nenner diese Integrationen aus, nachdem wir für c_λ seinen Wert aus der Gleichung der lebendigen Kraft substituiert haben, so erhalten wir

$$dt_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{3\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\lambda-3}{2}\right)} \sqrt{\frac{m_1^3 c_1^2}{2} \left(a_n - \chi - \frac{m_1 c_1^2}{2} \right)^{\frac{3\lambda-5}{2}} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda dc_1} \\ \frac{1}{\iint \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2}-1} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}$$

Integriert man noch bezüglich c_1 von Null bis

$$\sqrt{\frac{2}{m_1} (a_n - \chi)},$$

so erhält man

$$(24) \quad dt_4 = \frac{(a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2}-1} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}{\iint \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2}-1} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}$$

für die Zeit, während welcher durchschnittlich die Koordinaten zwischen den Grenzen (H) liegen. Die mittlere lebendige Kraft ergibt sich gleich

$$(25) \quad \frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \int \frac{m_1 c_1^2}{2} dt_3 = \frac{1}{\lambda} \frac{\iint \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2}} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}{\iint \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2}-1} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}.$$

Dieselbe ist für alle Punkte gleich. Der Mittelwert einer Größe X , die bloß Funktion der Koordinaten ist, wird

$$(26) \quad \overline{X} = \int X dt_4.$$

So ist z. B. der Mittelwert der Kraftfunktion:

$$(27) \quad \bar{\chi} = \int \chi dt_4 = \frac{\int \int \dots \chi (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}{\int \int \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_1 dy_1 \dots dx_\lambda}.$$

Es ist daher wie sich von selbst versteht

$$a_n = \bar{\chi} + \lambda \frac{m_1}{2} c_1^2.$$

Daher ist auch der ganze Zuwachs der im Systeme erhaltenen Arbeit die Summe des auf Erhöhung der mittleren lebendigen Kraft und des mittleren Potentials verwendeten.

III. Ableitung des Wärmegleichgewichtes zwischen Gasmolekülen aus dem zwischen einer endlichen Zahl materieller Punkte unter einer Hypothese.

Von den zuletzt entwickelten Gleichungen können wir unter einer Hypothese, deren Anwendbarkeit auf warme Körper mir nicht unwahrscheinlich scheint, direkt zum Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle, ja noch allgemeiner zum Wärmegleichgewicht eines beliebigen mit einer Gasmasse in Berührung stehenden Körpers gelangen. Die große Unregelmäßigkeit der Wärmebewegung und die Mannigfaltigkeit der Kräfte, welche von außen auf die Körper wirken, macht es wahrscheinlich, daß die Atome derselben vermöge der Bewegung, die wir Wärme nennen, alle möglichen mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbaren Positionen und Geschwindigkeiten durchlaufen, daß wir also die zuletzt entwickelten Gleichungen auf die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten der Atome warmer Körper anwenden können.

Machen wir diese Hypothese, so brauchen wir, um aus diesen Formeln das Wärmegleichgewicht eines mit einem Gase in Berührung stehenden Körpers zu berechnen, bloß vorauszusetzen, daß r von den angenommenen λ Atomen dem Körper, die übrigen der ihn umgebenden Gasmasse angehören.

Dann hat χ die Form $\chi_1 + \chi_2$, wobei χ_1 Funktion der Koordinaten der r Atome, χ_2 Funktion der Koordinaten der übrigen $\lambda - r$ ist. Integrieren wir dann den durch die Formel (24)

gegebenen Wert von dt_4 über alle Werte von $x_{r+1}, y_{r+1} \dots z_\lambda$, so erhalten wir für die Zeit, während welcher $x_1, y_1 \dots z_r$ durchschnittlich zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ usw. liegen, also für die Zeit, während welcher durchschnittlich das Atom m_1 im Volumenelemente $dx_1 dy_1 dz_1$, das Atom m_2 im Volumenelemente $dx_2 dy_2 dz_2$ usw. liegen, den Wert:

$$dt_5 = \frac{dx_1 dy_1 \dots dx_r \iint \dots (a_n - \chi_1 - \chi_2)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_{r+1} dy_{r+1} \dots dx_\lambda}{\iint \dots (a_n - \chi_1 - \chi_2)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_1 dy_1 \dots dx_r}$$

Wären die Volumenelemente $dx_1 dy_1 dz_1, dx_2 dy_2 dz_2 \dots$ gerade so gelegen, daß $\chi_1 = 0$ wäre, so ginge der Ausdruck für dt_5 über in

$$dt_6 = \frac{dx_1 dy_1 \dots dx_r \iint \dots (a_n - \chi_2)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_{r+1} \dots dx_\lambda}{\iint \dots (a_n - \chi_2)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_1 dy_1 \dots dx_r}$$

Es ist also der Quotient

$$\frac{dt_5}{dt_6} = \frac{\iint \dots (a_n - \chi_1 - \chi_2)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_{r+1} dy_{r+1} \dots dx_\lambda}{\iint \dots (a_n - \chi_2)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_{r+1} dy_{r+1} \dots dx_\lambda}$$

Die Grenzen des Integrals im Nenner sind bei unveränderter Gestalt der Funktion χ_2 bloß von a_n abhängig; dieses Integral ist also Funktion von a_n . Die Grenzen des Integrals im Zähler hängen in derselben Weise von $a_n - \chi_1$ ab, was die Variablen, nach denen zu integrieren ist, nicht enthält. Das letztere Integral ist also dieselbe Funktion von $a_n - \chi_1$. Setzen wir $a_n / \lambda = \rho$, wo λ die natürlich konstante Zahl der Atome ist, so ist also das Integral im Nenner eine Funktion von ρ , die wir $F(\rho)$ nennen wollen; das Integral im Zähler ist dieselbe Funktion von $\rho - (\chi_1 / \lambda)$, also gleich

$$F\left(\rho - \frac{\chi_1}{\lambda}\right).$$

Es ist also

$$\frac{dt_5}{dt_6} = \frac{F\left(\rho - \frac{\chi_1}{\lambda}\right)}{F(\rho)}.$$

Es sei nun λ sehr groß. Es kann dabei auch r sehr groß sein; nur muß es gegen λ verschwinden. Dann ist dt_5 / dt_6

eine endliche und stetige Funktion von ϱ und χ_1 , sobald ϱ und χ_1/r von der Ordnung der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms sind. Setzen wir

$$\frac{d t_6}{d t_6} = \psi(\varrho, \chi_1),$$

so ist

$$(28) \quad \psi(\varrho, \chi_1) = \frac{F\left(\varrho - \frac{\chi_1}{\lambda}\right)}{F(\varrho)}.$$

Es ist daher auch

$$\frac{F\left(\varrho - \frac{2\chi_1}{\lambda}\right)}{F\left(\varrho - \frac{\chi_1}{\lambda}\right)} = \psi\left(\varrho - \frac{\chi_1}{\lambda}, \chi_1\right) = \psi_1,$$

$$\frac{F\left(\varrho - \frac{3\chi_1}{\lambda}\right)}{F\left(\varrho - \frac{2\chi_1}{\lambda}\right)} = \psi\left(\varrho - \frac{2\chi_1}{\lambda}, \chi_1\right) = \psi_2$$

⋮
⋮
⋮

$$\frac{F\left(\varrho - \frac{\mu\chi_1}{\lambda}\right)}{F\left(\varrho - \frac{\mu-1}{\lambda}\chi_1\right)} = \psi\left(\varrho - \frac{\mu-1}{\lambda}\chi_1, \chi_1\right) = \psi_{\mu-1}.$$

Die Multiplikation aller dieser Gleichungen liefert

$$\log F\left(\varrho - \frac{\mu\chi_1}{\lambda}\right) - \log F(\varrho) = \log \psi + \log \psi_1 + \log \psi_2 + \dots + \log \psi_{\mu-1}.$$

Setzt man

$$\frac{\mu}{\lambda} \chi_1 = \chi_3,$$

so ist also

$$\log F(\varrho - \chi_3) - \log F(\varrho) = \lambda \log \Psi(\varrho, \chi_3),$$

wobei Ψ wieder endlich und kontinuierlich ist, wenn ϱ und χ_3/r von der Ordnung der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms sind, also λ/μ endlich ist. Es ist also

$$F(\varrho - \chi_3) = F(\varrho) \cdot [\Psi(\varrho, \chi_3)]^\lambda.$$

Betrachten wir jetzt ϱ als konstant und bloß χ_3 als variabel und setzen

$$\varrho - \chi_3 = \sigma, \quad F(\varrho) = C, \quad \Psi(\varrho, \varrho - \sigma) = f(\sigma),$$

so geht die letzte Gleichung über in

$$F(\sigma) = C \cdot [f(\sigma)]^2,$$

daher liefert die Formel (28)

$$\psi(\rho, x_1) = \left[\frac{f\left(\rho - \frac{x_1}{\lambda}\right)}{f(\rho)} \right]^2 = \left[1 - \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} \cdot \frac{x_1}{\lambda} \right]^2 = e^{\frac{f'(\rho)}{f(\rho)} \cdot x_1}$$

und es ist, wenn man $f'(\rho)/f(\rho)$ mit h bezeichnet

$$dt_6 = C' e^{-h x_1} dx_1 dy_1 \dots dz_r.$$

Ganz in derselben Weise kann auch die Zeit gefunden werden, während welcher gleichzeitig die Koordinaten der r Atome zwischen x_1 und $x_1 + dx_1 \dots$ und ihre Geschwindigkeiten zwischen c_1 und $c_1 + dc_1 \dots$ liegen. Sie ergibt sich gleich

$$C'' e^{-h\left(x_1 + \sum \frac{m c^2}{2}\right)} c_1^2 c_2^2 \dots c_r^2 dx_1 dy_1 \dots dc_r.$$

Diese Gleichung muß unter unserer Hypothese für jeden beliebigen in einer Gasmasse befindlichen Körper, daher auch für die Gasmoleküle selbst gelten. In der Tat überzeugt man sich leicht, daß sie mit den in meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“ gefundenen Formeln übereinstimmt. Wir gelangen also so in weit einfacherer Weise zu dem dort Gefundenen. Da jedoch der Beweis, daß die im gegenwärtigen Abschnitte gemachte Hypothese bei warmen Körpern erfüllt, ja daß sie überhaupt erfüllbar ist, noch nicht geliefert ist, so habe ich in jener Abhandlung den weitläufigeren, aber von jeder Hypothese unabhängigen Weg eingeschlagen.

Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft.¹⁾

(Wien. Ber. 63. S. 712—732. 1871.)

Sei ein beliebiger Körper (K) gegeben, der aus r materiellen Punkten (Atomen) besteht. Wir wollen die rechtwinkligen Koordinaten seiner Atome mit $x_1, y_1 \dots z_r$, ihre Geschwindigkeiten mit $c_1, c_2 \dots c_r$ und deren Komponenten bezüglich der drei Koordinatenachsen mit $u_1, v_1, w_1, u_2 \dots w_r$ bezeichnen. Endlich sei χ die Kraftfunktion, also diejenige Funktion von $x_1, y_1 \dots z_r$, deren negativer Differentialquotient bezüglich der Koordinaten irgend eines Atoms die auf dieses Atom in der Richtung der betreffenden Koordinatenachse wirkende Kraft liefert. Lassen wir die äußeren Umstände (Temperatur und die von außen wirkenden Kräfte), unter denen sich der Körper befindet, eine sehr lange Zeit T hindurch ungeändert, so mag derjenige Bruchteil von T , während dessen gleichzeitig $x_1, y_1 \dots z_r, u_1, v_1 \dots w_r$ zwischen den Grenzen

$$(A) \quad x_1 \text{ und } x_1 + dx_1, y_1 \text{ und } y_1 + dy_1 \dots w_r \text{ und } w_r + dw_r$$

eingeschlossen sind, mit τ bezeichnet werden. Das Verhältnis τ/T bezeichne ich dann als die Zeit, während welcher *durchschnittlich* der Zustand des Körpers zwischen den Grenzen (A) eingeschlossen ist. Ich fand in der vorigen Abhandlung unter einer gewissen Hypothese, daß dieses Verhältnis, falls der Körper mit unendlich vielen Gasmolekülen in Berührung steht, den Wert

$$(1) \quad dt = \frac{e^{-h\varphi} dx_1 dy_1 \dots dx_r du_1 dv_1 \dots dw_r}{\int \int \dots \int e^{-h\varphi} dx_1 dy_1 \dots dw_r}$$

¹⁾ Vgl. Anm. S. 237 dieses Bandes.

hat, wobei

$$\varphi = \chi + \sum \frac{m c^2}{2}$$

ist. Diese Formel unterscheidet sich von der letzten Formel der vorigen Abhandlung nur darin, daß hier auch die gleiche Wahrscheinlichkeit aller Geschwindigkeitsrichtungen ausgedrückt und die Konstante λ'' passend bestimmt ist. Wir können diesen Ausdruck aber auch ohne alle Hypothese durch Schlüsse gewinnen, die den in meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen“ gemachten ganz analog sind. Es soll irgend eines der Gasmoleküle, welche den Körper umgeben, aus ρ Atomen bestehen. Die Koordinaten des Schwerpunktes dieses Moleküls sollen x, y, z , die Koordinaten seiner Atome bezüglich dreier den fixen Koordinatenachsen parallel durch den Schwerpunkt gezogenen Achsen $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_e$ und die Geschwindigkeitskomponenten der Atome parallel den fixen Koordinatenachsen $\alpha_1, \beta_1 \dots \gamma_e$ heißen. Die gesamte im Gasmoleküle enthaltene lebendige Kraft soll mit φ^* bezeichnet werden. Endlich sollen von der Gasart, der dieses Molekül angehört, N Moleküle in der Volumeinheit sein. Ich fand in der Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen“, daß dann die Zahl jener Moleküle dieser Gasart in der Volumeinheit, für welche gleichzeitig $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{e-1}, \alpha_1, \beta_1 \dots \gamma_e$ zwischen den Grenzen

(B) ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1, \eta_1$ und $\eta_1 + d\eta_1 \dots \gamma_e$ und $\gamma_e + d\gamma_e$ liegen, gleich

$$dN = a e^{-h\varphi^*} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\gamma_e$$

ist, wobei a und h Konstanten vorstellen. Der Beginn der Wechselwirkung eines dieser Moleküle mit dem Körper (K), also des Zusammenstoßes mit demselben, soll wieder dadurch charakterisiert sein, daß eine gewisse Funktion der relativen Lage sämtlicher Atome des Körpers K und des mit ihm zusammenstoßenden Moleküls $F(x_1, y_1 \dots z_r, x, y, z, \xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{e-1})$ gleich einer gewissen Konstanten b wird. Dieselbe Gleichung soll das Ende des Zusammenstoßes ausdrücken. Wir wollen die vorläufig noch unbekannte Zeit τ , während welcher im Verlaufe einer sehr langen Zeit T der Zustand des Körpers K zwischen den Grenzen (A) liegt, mit $T \cdot g dx_1 dy_1 \dots dw_r$ bezeichnen, so daß also $g dx_1 dy_1 \dots dw_r$ die Zeit ist, während

welcher durchschnittlich der Zustand des Körpers zwischen den Grenzen (A) liegt. Dabei ist g eine Funktion von $x_1, y_1 \dots z_r, u_1, v_1 \dots w_r$. Der Zustand beider zusammenstoßender Körper im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes ist vollkommen bestimmt, wenn wir die Werte der $6r + 6\varrho - 1$ Größen $x_1, y_1 \dots z_r, u_1, v_1 \dots w_r, \xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{\varrho-1}, \alpha_1, \beta_1 \dots \gamma_{\varrho}, x, y$ in diesem Momente kennen. z ist durch die für den Beginn des Zusammenstoßes geltende Gleichung $F = b$ bestimmt. Durch eine ganz gleiche Betrachtung, wie ich sie in der Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gas-molekülen“ angestellt habe, überzeugt man sich, daß die Anzahl der Zusammenstöße, die während der Zeit T so geschehen, daß im Momente ihres Beginnes

(C) $\left\{ \begin{array}{l} \text{die auf d. Körp. } K \text{ Bezug hab. Variablen zwisch. d. Grenzen (A),} \\ \text{„ „ d. Molekül „ „ „ „ „ „ „ (B),} \\ \text{u. gleichzeitig } x \text{ zwisch. } x \text{ u. } x + dx, y \text{ zwisch. } y \text{ u. } y + dy \end{array} \right.$

liegt, gleich ist

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} dm = \tau dN \omega dx dy \\ = T g a e^{-h\varphi^*} \omega dx_1 dy_1 \dots dw_r d\xi_1 \dots d\gamma_{\varrho} dx dy, \end{array} \right.$$

wobei

$$\omega = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right)$$

ist. Die den Zustand beider zusammenstoßender Körper bestimmenden Variablen sollen, wenn sie im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes zwischen den Grenzen (C) lagen, im Momente des Endes desselben zwischen den Grenzen

(D) $\left\{ \begin{array}{l} X_1 \text{ und } X_1 + dX_1, Y_1 \text{ und } Y_1 + dY_1 \dots W_r \text{ und } W_r + dW_r, \\ \Xi_1 \text{ und } \Xi_1 + d\Xi_1, H_1 \text{ und } H_1 + dH_1 \dots Y \text{ und } Y + dY \end{array} \right.$

liegen. Dann gelangt man zunächst ebenfalls ganz wie in meiner eben erwähnten Abhandlung zur Gleichung

$$(3) \quad \dot{\omega} \cdot D = \Omega,$$

wobei D die Funktionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial Y_1} \dots \frac{\partial w_r}{\partial W_r} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \Xi_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial H_1} \dots \frac{\partial y}{\partial Y}$$

vorstellt. Mit $\Omega, G, \Phi^* \dots$ wollen wir die Ausdrücke bezeichnen, in welche $\omega, g, \varphi^* \dots$ übergehen, wenn man darin $X_1, Y_1 \dots$ für

$x_1, y_1 \dots$ substituiert. Die Anzahl der Zusammenstöße, welche während der Zeit T so geschehen, daß die Variablen beim Beginne zwischen den Grenzen (D) liegen, ist

$$(4) \quad dM = T G a e^{-h\varphi^*} \Omega dX_1 dY_1 \dots dW_r d\xi_1 \dots dY.$$

Man kann dabei $X_1, Y_1 \dots$ als Funktion von $x_1, y_1 \dots$, aber auch umgekehrt $x_1, y_1 \dots$ als Funktion von $X_1, Y_1 \dots$ ausdrücken. Tut man das letztere in der Formel (2), so erhält man

$$(5) \quad dm = T g a e^{-h\varphi^*} \omega D dX_1 dY_1 \dots dW_r d\xi_1 \dots dY.$$

Dies ist die Zahl der Zusammenstöße, welche während der Zeit T so geschehen, daß zu Ende derselben die Variablen zwischen den Grenzen (D) liegen. Man kann sich dabei auch in g, ω und φ^* die Variablen $x_1, y_1 \dots$ als Funktionen der $X_1, Y_1 \dots$ ausgedrückt denken. Integrieren wir dm bezüglich aller Größen, die auf den Zustand des Gasmoleküls Bezug haben, also bezüglich $\xi_1, H_1 \dots Z_{e-1}, X, Y$ über alle Werte, deren diese Größen fähig sind, so erhalten wir die Zahl aller Zusammenstöße, welche während der Zeit T so geschehen, daß zu Ende derselben die den Zustand des Körpers bestimmenden Variablen zwischen den Grenzen

$$(E) \quad X_1 \text{ und } X_1 + dX_1, Y_1 \text{ und } Y_1 + dY_1 \dots W_r \text{ und } W_r + dW_r$$

liegen, während die den Zustand des Moleküls bestimmenden Variablen keiner Beschränkung unterworfen sind. Diese Zahl soll mit $f dm$ bezeichnet werden (wobei die Integration bloß über die den Zustand des Gasmoleküls bestimmenden Variablen zu erstrecken ist). Wir wollen nun zuerst einen speziellen, in der Natur allerdings nicht stattfindenden, aber doch denkbaren Fall betrachten, der uns die Berechnung des allgemeinen Falles sehr erleichtern wird. Wir wollen nämlich annehmen, die Zusammenstöße geschehen so häufig, daß augenblicklich, wenn ein Zusammenstoß aufgehört hat, wieder der nächste beginnt, während aber doch der Körper niemals gleichzeitig mit zwei Molekülen im Zusammenstoße begriffen ist, so daß die den Zustand des Körpers bestimmenden Variablen, wenn sie zu Ende eines Zusammenstoßes zwischen den Grenzen (E) liegen, immer durch einen neuen Zusammenstoß, niemals (oder doch nur verschwindend selten) durch die Atombewegung des Körpers ohne Zusammenstoß wieder aus diesen Grenzen austreten. Da,

während der Körper mit einem Moleküle im Zusammenstoße begriffen ist, kein zweiter Zusammenstoß stattfindet, so wollen wir diese Zeit ganz von der Zeit T ausschließen und unter T bloß den Inbegriff aller jener Zeitmomente verstehen, während welcher der Körper gerade mit keinem Moleküle im Zusammenstoße begriffen ist. Unter dieser Voraussetzung muß die Zahl der Zusammenstöße, welche so geschehen, daß die Variablen zu Ende derselben zwischen den Grenzen (E) liegen, gleich der Zahl derjenigen sein, welche so geschehen, daß die Variablen bei Beginn zwischen diesen Grenzen liegen. Denn ersteres ist die Zahl, wie oft die Variablen zwischen diese Grenzen eintreten, letzteres, wie oft sie aus denselben austreten, da man, unserer Annahme gemäß, die Zahl der Ein- und Austritte infolge der Atombewegung des Körpers ohne Zusammenstoß mit Gasmolekülen vernachlässigen kann. Erstere Zahl ist $\int dm$; letztere erhält man, indem man den durch die Gleichung (4) gegebenen Ausdruck über alle Werte der den Zustand des Gasmoleküls bestimmenden Variablen integriert. Wir wollen sie mit $\int dM$ bezeichnen. Es ist auch klar, daß dies die einzige Bedingung zur Bestimmung der Funktion g ist. Davon aber, daß diese Bedingung $\int dm = \int dM$ in der Tat erfüllt ist, wenn man

$$g = A e^{-h\varphi}$$

setzt, überzeugt man sich in folgender Weise. Substituiert man in die Gleichung $\int dm = \int dM$ diesen Wert für g und außerdem noch die Werte (4) und (5) für dM und dm und dividiert durch $T a A dX_1 dY_1 \dots dW_r$ weg, so geht sie über in

$$\begin{aligned} & \iint \dots e^{-h(\varphi + \varphi^*)} \omega \cdot D \cdot d\xi_1 dH_1 \dots dY \\ & = \iint \dots e^{-h(\Phi + \Phi^*)} \cdot \Omega d\xi_1 dH_1 \dots dY, \end{aligned}$$

oder wegen der Gleichung (3)

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iint \dots e^{-h(\varphi + \varphi^*)} \cdot \Omega d\xi_1 dH_1 \dots dY \\ & = \iint \dots e^{-h(\Phi + \Phi^*)} \cdot \Omega d\xi_1 dH_1 \dots dY. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist φ und φ^* die im Körper und Moleküle vor dem Zusammenstoße, Φ und Φ^* die nach dem Zusammenstoße enthaltene gesamte Arbeit und lebendige Kraft. (Man

kann in φ und φ^* die Größen $x_1, y_1 \dots$ als Funktionen von $X_1, Y_1 \dots$ ausdrücken, Φ und Φ^* dagegen erhält man aus φ und φ^* , indem man darin schlechtweg $x_1, y_1 \dots$ mit $X_1, Y_1 \dots$ vertauscht.) Da nun die im Körper und Molekül zusammen enthaltene lebendige Kraft und Arbeit durch den Zusammenstoß nicht verändert wird, so ist allgemein $\varphi + \varphi^* = \Phi + \Phi^*$; und daher sind auch die beiden Integrale der Formel (6) gleich, da die Funktion unter dem Integralzeichen für alle Werte der Variablen, nach denen integriert wird, gleich ist. Der für g angenommene Wert erfüllt also in der Tat die Bedingung $\int dm = \int dM$ und folglich ist auch die Zeit, während welcher der Zustand des Körpers zwischen den Grenzen (A) liegt, durch die Formel (1) gegeben. Denn in dieser Formel hat das g in der Tat jenen Wert. (Nur ist dabei die Konstante A passend bestimmt.) Nun habe ich aber bereits in der Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen“ nachgewiesen, daß die durch die Formel (1) gegebene Zustandsverteilung auch durch die Atombewegung im Körper ohne Zusammenstöße nicht verändert wird; folglich wird die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände des Körpers auch noch durch die Formel (1) gegeben, wenn die anfangs gemachte Voraussetzung, die Zusammenstöße seien so häufig, daß die Atombewegung ohne Zusammenstoß keinen Einfluß auf die Zustandsverteilung hat, nicht erfüllt ist. Ja die Formel (1) bleibt sogar noch gültig, wenn die Zusammenstöße so selten erfolgen, daß man die gleichzeitigen Zusammenstöße mehrerer Moleküle, die wir früher ganz ausgeschlossen haben, vernachlässigen kann. Übrigens lehrt eine, wenn auch kompliziertere Rechnung, daß diese gleichzeitigen Zusammenstöße, auch wenn sie beliebig oft stattfinden, die durch die Formel (1) gegebene Zustandsverteilung nicht ändern. Bei Körpern, welche in der Natur mit Gasen in Berührung stehen, finden allerdings solche gleichzeitige Zusammenstöße sicher immer statt; aber es stehen die Teile des Körpers, an denen die Zusammenstöße mit den verschiedenen Gasmolekülen stattfinden, in keiner merklichen direkten Wechselwirkung, infolgedessen es dann ohnedies gradeso ist, als ob der Körper immer nur mit einem Gasmolekül zusammenstoßen würde. Wir wollen nun noch voraussetzen, daß die Zustandsverteilung in einem warmen

Körper, auch wenn er nicht mit einem Gase in Berührung steht, dieselbe sei; unter dieser Voraussetzung gilt die Formel (1) für jeden warmen Körper und ich will jetzt zeigen, daß sich aus derselben leicht ein analytischer Beweis für den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie führen läßt.

Die Gleichung (1) kann benützt werden, um den Mittelwert irgend einer Größe X zu bestimmen. Derselbe ist

$$(7) \quad \bar{X} = \int X dt,$$

wobei die Integration über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist, deren Differentiale in dt enthalten sind. Sucht man auf diese Weise die mittlere lebendige Kraft irgend eines Atoms, so fällt das Integral, welches χ enthält, ganz heraus und es ergibt sich für dieselbe

$$(8) \quad \frac{m}{2} \bar{c^2} = \int \frac{m c^2}{2} dt = \frac{3}{2h}.$$

Dieselbe ist also für alle Atome gleich und der Konstanten h verkehrt proportional; wir können daher die mittlere lebendige Kraft eines Atoms oder den reziproken Wert der Konstanten h als das Maß der Temperatur ansehen. Die Temperatur ist jedenfalls eine Funktion der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms. Wir sahen, daß, wenn man ein ideales Gas als thermometrische Substanz wählt und die Temperatur vom absoluten Nullpunkt an zählt, dieselbe der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms proportional gesetzt werden muß und wir wollen, den Proportionalitätsfaktor gleich 1 setzend, die mittlere lebendige Kraft eines Atoms direkt gleich der Temperatur T setzen. Da die mittlere lebendige Kraft aller Atome gleich und im ganzen r Atome vorhanden sind, so ist der Mittelwert der Summe der lebendigen Kraft aller Atome

$$(9) \quad \sum \frac{m c^2}{2} = \frac{3 r}{2h}.$$

Integriert man dt bezüglich $u_1, v_1 \dots w_r$ über alle möglichen Werte, also bezüglich aller dieser Größen von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die Zeit dt' , während welcher durchschnittlich die Koordinaten der Atome zwischen

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx, \quad y_1 \text{ und } y_1 + dy_1 \dots z_r \text{ und } z_r + dz,$$

liegen, ohne daß Größe und Richtung der Geschwindigkeiten

einer Beschränkung unterworfen sind. Es ergibt sich, wenn man dieselben Integrationen auch im Nenner durchführt, wo sie bisher nur angezeigt waren

$$(10) \quad d t' = \frac{e^{-h x} d x_1 d y_1 \dots d z_r}{\int \int \dots e^{-h x} d x_1 d y_1 \dots d z_r}.$$

Enthält die Größe X , deren Mittelwert zu bestimmen ist, bloß die Koordinaten, so ergibt sich, indem man in der Formel (7) die Integrationen nach der Geschwindigkeit ausführt

$$\bar{X} = \int X d t'.$$

So ist der Mittelwert der Kraftfunktion

$$(11) \quad \bar{\chi} = \int \chi d t' = \frac{\int \int \dots \chi e^{-h x} d x_1 d y_1 \dots d z_r}{\int \int \dots e^{-h x} d x_1 d y_1 \dots d z_r}.$$

Wir wollen nun zu dem Beweise schreiten, daß das Differential der zugeführten Wärme δQ , dividiert durch die mittlere lebendige Kraft

$$T = \frac{m}{2} \bar{c}^2$$

eines Atoms, immer ein vollständiges Differential ist, und zugleich die Größe, deren Differential sie ist, analytisch bestimmen. Wenn sich sämtliche Atome in geschlossenen Bahnen bewegen, habe ich die Größe, deren Differential $\delta Q/T$ ist, bereits in einer der Akademie im Jahre 1866 vorgelegten Abhandlung bestimmt.¹⁾ Wenn jedoch die Bahnen der Atome der Körper keine geschlossenen sind, so lassen sich, solange man die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Positionen der Atome unbestimmt läßt, spezielle Fälle finden, in denen $\delta Q/T$ kein vollständiges Differential ist. Es ist also die Übertragung des Beweises auf diesen Fall in exakter Weise nur durch Betrachtung jener Wahrscheinlichkeit möglich. Die Kraftfunktion χ ist, wenn sämtliche auf alle Punkte in allen ihren Positionen wirksamen Kräfte gegeben sind, noch nicht vollkommen bestimmt. Man kann ihr nämlich noch eine willkürliche Konstante beifügen. Solange nun die Natur der Funktion χ sich nicht ändert, spielt diese Konstante allerdings gar keine Rolle; man wird ihr, wenn man irgend einen Wert des χ mit irgend einem anderen vergleicht, immer denselben

1) Nr. 2 dieses Bandes.

Wert beilegen. Anders dagegen ist es, wenn, wie wir es später voraussetzen werden, beim Übergang des Körpers aus dem alten in den neuen Zustand die Kräfte andere Funktionen der Koordinaten werden, wenn also die Funktion χ ihre Form ändert. Dann läßt sich die Änderung der Konstanten von der Änderung der Funktion χ gar nicht trennen. Es läßt sich zwar die Differenz zweier Werte des χ für zwei verschiedene Positionen des alten, ebenso für zwei verschiedene Positionen des neuen Zustandes bestimmen. Gehört aber die eine Position dem alten, die andere dem neuen Zustande an, so kommt zur Differenz der dazu gehörigen Werte des χ noch eine ganz unbestimmte Konstante hinzu. Um von dieser Konstante unabhängig zu werden und mit χ immer einen ganz bestimmten Begriff verbinden zu können, wollen wir die Konstante immer so bestimmt denken, daß χ für eine gewisse (in allen Zuständen gleiche) Position sämtlicher Atome verschwindet. Diese Position kann willkürlich gewählt werden. Für die in der Natur vorkommenden Kräfte ist die Arbeit, die erforderlich ist, um die Atome ins Unendliche zu zerstreuen, endlich. Es ist daher am zweckmäßigsten, die Konstante so zu wählen, daß χ verschwindet, wenn sich alle Atome in unendlicher Entfernung voneinander befinden. Es ist dann χ eine vollkommen bestimmte Größe. $\chi(x_1, y_1, z_1, x_2 \dots z_n)$ ist die Arbeit, welche aufgewendet werden muß, um, wenn früher die Distanzen aller Atome unendlich groß waren, die Atome in jene Position zu bringen, bei der die Koordinaten des ersten Atoms x_1, y_1, z_1 , die des zweiten x_2, y_2, z_2 usf. sind. Ich will nun als die gesamte Energie des Körpers zu irgend einer Zeit t den gesamten Arbeitsaufwand bezeichnen, der notwendig wäre, um den Körper, falls seine Atome anfangs alle in Ruhe und unendlich voneinander entfernt wären, in den Zustand zu versetzen, den er eben zur Zeit t hat. Dieser Arbeitsaufwand ist ein doppelter. 1. Die Arbeit, die man braucht, um jedem Atome die Geschwindigkeit zu erteilen, die dasselbe zur Zeit t besitzt, diese Arbeit ist gleich

$$\sum \frac{m c^2}{2};$$

2. die Arbeit, die man braucht, um die Atome in die relative Lage zu bringen, die sie zur Zeit t inne haben; letztere Arbeit

ist nach dem eben vorausgeschickten gleich χ ; die gesamte Energie des Körpers zur Zeit t ist also

$$E = \sum \frac{m c^2}{2} + \chi.$$

Dieselbe ist, wenn der Körper mit keinem anderen in Berührung steht, vollkommen konstant. Wir setzen voraus, daß der Körper an seinen Grenzen mit anderen in Berührung steht; dann erleidet dieselbe fortwährend gewisse Schwankungen. Wenn aber der Körper aus sehr vielen Atomen besteht, die nebeneinander dieselben Zustände haben, welche jedes einzelne im Verlauf der Zeit durchläuft, so wird immer, während ein Atom lebendige Kraft gewinnt, das andere welche verlieren und der Wert des E zu einer beliebigen Zeit ist nicht verschieden von dem Mittelwerte des E während einer sehr langen Zeit. Wir können also setzen

$$(12) \quad E = \bar{E} = \sum \frac{m c^2}{2} + \bar{\chi}.$$

Es soll nun zunächst die Zustandsänderung des Körpers dadurch bewirkt werden, daß demselben eine unendlich kleine Wärmemenge zugeführt wird, ohne daß die Natur der auf seine Atome wirkenden Kräfte, also die Gestalt der Funktion χ sich ändert. Es ist klar, daß dann die gesamte dem Körper zugeführte Arbeitsmenge, also die gesamte zugeführte Wärme δQ gleich ist dem Zuwachse der Energie des Körpers. Bezeichnen wir denselben mit δE , so ist also mit Rücksicht auf die Gleichung (12)

$$(13) \quad \delta Q = \delta E = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \delta \bar{\chi}.$$

Solange nur die Energie des Körpers variabel ist, haben wir nur eine einzige independente Variable; es kann also von einem vollständigen oder nicht vollständigen Differentialausdrucke nicht die Rede sein. Damit wir mehrere independente Variablen bekommen, müssen wir auch die Natur der Funktion χ veränderlich annehmen. Wir wollen da mit der Betrachtung eines speziellen Falles beginnen. In den Fällen nämlich, welche in der Wärmetheorie der Betrachtung unterzogen wurden, ändert sich niemals das Wirkungsgesetz der auf die Atome wirkenden Kräfte, sondern die zweite indepen-

dente Variable, welche außer der Energie den Zustand des Körpers bestimmt, rührt daher, daß bei seiner Temperaturerhöhung eine feste, den Körper umschließende Hülle, die überall einen gewissen Druck auf denselben ausübt, entweder zurückweicht oder nicht. Es wirkt also außer den Molekularkräften und den etwa von außen auf den Körper wirkenden Kräften, z. B. der Schwerkraft, auf alle jene Atome, die sich in der Nähe eines Oberflächenelementes des Körpers befinden, eine von dem Oberflächenelemente ausgehende Druckkraft und es weicht das Oberflächenelement bei der Zustandsänderung im allgemeinen um ein gewisses Stück zurück. Die Arbeit, die dabei geleistet wird, ist gleich dem Drucke multipliziert mit der Projektion des Weges in der Richtung der Normale auf das Oberflächenelement. Wir wollen diesen Umstand in möglichster Allgemeinheit analytisch auszudrücken suchen. Es sollen auf alle Atome Kräfte mit einer gewissen Kraftfunktion χ_0 wirken. Dazu sollen aber noch Kräfte von folgender Eigentümlichkeit kommen. Für jedes Atom soll eine gewisse vollkommen fixe Ebene existieren (die Ebene I). Die Distanz des Atoms von dieser Ebene heiße n . Ihr parallel sei eine zweite Ebene (die Ebene II) in der Distanz ν von der ersten befindlich. n und ν sollen in der entgegengesetzten Richtung gezählt werden. Die Kraft nun, welche außer der mit der Kraftfunktion χ_0 auf das Atom wirkt, sei senkrecht auf beiden Ebenen und bloß eine Funktion der Distanz $n + \nu$ des Atoms von der Ebene II.

Es hat dann die gesamte Kraftfunktion den Wert

$$\chi_0 + \sum f(n + \nu),$$

wobei das Zeichen \sum eine Summation über alle Atome bezeichnet und zu bemerken ist, daß sowohl die Lage der fixen Ebene als auch die Natur der Funktion f für jedes Atom eine andere sein kann. Die Funktion f wird für Atome, die im Innern liegen, den Wert Null haben. Bei der Zustandsänderung des Körpers soll sich nun zunächst die Energie um eine gewisse Größe $\delta \bar{E}$ ändern. Außerdem aber soll die Größe ν für jedes Atom um $\delta \nu$ wachsen. $\delta \nu$ kann ebenfalls für die verschiedenen Atome verschieden sein. Es sollen also die Ebenen I ihre Lage nicht ändern (eine Drehung derselben liefert nur unendlich kleines zweiter Ordnung); die Ebenen II aber, von

denen die auf das Atom wirkenden Kräfte ausgehen, sollen sich um δv verschieben. Es fragt sich jetzt um den Ausdruck für die zugeführte Wärme δQ . Wären alle v konstant geblieben, so hätte sich die Kraftfunktion gar nicht geändert. Dann wäre also die zugeführte Wärme gleich

$$\delta \bar{E} = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \delta \bar{\chi}.$$

Ändern sich aber gleichzeitig die mit v bezeichneten Größen um δv , so kommt dazu noch die Arbeit, die auf die Zurückschiebung der Ebene II um das Stück δv verwendet werden muß. Bezeichnen wir diese Arbeit mit δA , so ist also

$$\delta Q = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \delta \bar{\chi} + \delta A.$$

Die Kraft, welche auf jedes Atom von der dazu gehörigen Fläche II in der Richtung, in der n gezählt wird, ausgeübt wird, ist die negative Ableitung der betreffenden Kraftfunktion $-f'(n+v)$; gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, ist die Kraft, welche das Atom auf die Ebene II ausübt. Diese Kraft wird auch bei ungeändertem Zustande des Körpers mit der Zeit hin- und herschwanken. Ihr Mittelwert $-\overline{f'(n+v)}$ ist der auf der Fläche II in der Richtung v von den Atomen des Körpers ausgeübte Druck. Ein gleicher aber entgegengesetzt gerichteter muß, wenn Druck und Gegendruck gleich ist, von außen darauf wirken. Die Arbeit, welche notwendig ist, um die Ebene II um das Stück δv zu verschieben, ist daher $-\overline{f'(n+v)} \delta v$, wobei δv , da es für einen und denselben Zustand des Körpers konstant ist, außerhalb oder innerhalb des Querstrichs geschrieben werden kann. Bilden wir diesen Ausdruck für alle Ebenen II und summieren alle so gebildeten Ausdrücke, so erhalten wir die gesamte Arbeit, welche zur Verschiebung aller Ebenen II notwendig ist und welche mit δA bezeichnet wurde. Es ist also $\delta A = -\overline{\sum f'(n+v)} \delta v$ und folglich

$$\delta Q = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \delta \bar{\chi} - \overline{\sum f'(n+v)} \delta v.$$

Berücksichtigen wir noch, daß beim Übergange des Körpers von dem ursprünglichen in den neuen Zustand χ_0 ganz dieselbe Funktion der Positionen der Atome geblieben ist und sich

auch in dem Ausdrucke $\Sigma f'(n + \nu)$ nur die mit ν bezeichneten Größen verändert haben, so finden wir, wenn wir mit $\delta\chi$ die Differenz der Werte von χ im ursprünglichen und neuen Zustande des Körpers für identische Positionen aller seiner Atome bezeichnen, für jede beliebige Position aller Atome $\delta\chi = \Sigma f'(n + \nu) \delta\nu$. Multiplizieren wir beide Teile dieser Gleichung mit der durch die Formel (10) gegebenen Wahrscheinlichkeit der betreffenden Position und integrieren über alle Positionen, so erhalten wir links den Mittelwert aller $\delta\chi$, den ich mit

$$(14) \quad \overline{\delta\chi} = \frac{\int \int \dots \delta\chi e^{-h\chi} dx_1 dy_1 \dots dx_r}{\int \int \dots e^{-h\chi} dx_1 dy_1 \dots dx_r}$$

bezeichnen will. Rechts erhalten wir

$$\overline{\Sigma f'(n + \nu) \delta\nu}.$$

Es ist also

$$\overline{\Sigma f'(n + \nu) \delta\nu} = \overline{\delta\chi},$$

daher

$$\delta Q = \delta \overline{\sum \frac{m c^2}{2}} + \delta \overline{\chi} - \overline{\delta\chi}.$$

Diesen Ausdruck, den wir gegenwärtig unter einer speziellen Annahme gefunden haben, kann man für den allgemeinsten Fall, daß sich die Natur der Funktion χ in ganz beliebiger Weise verändert, durch folgende Schlüsse gewinnen. Wir haben bewiesen, daß, wenn sich die Form der Funktion χ gar nicht ändert,

$$\delta Q = \delta \overline{\sum \frac{m c^2}{2}} + \delta \overline{\chi}$$

ist. χ hat dann für identische Positionen der Atome, also für identische Werte der $x_1, y_1 \dots z_r$ im ursprünglichen und neuen Zustande denselben Wert. Der Mittelwert $\overline{\chi}$ ist nur deshalb ein anderer, weil jede Position im neuen Zustande eine andere Wahrscheinlichkeit hat, weil also die Atome im neuen Zustande durchschnittlich gegen ihre Positionen im alten Zustande verschoben erscheinen. Es besteht also die zugewachsene Wärme jetzt aus zwei Teilen, der auf Erhöhung der lebendigen Kraft verwendeten

$$\delta \overline{\sum \frac{m c^2}{2}}$$

und der auf Verschiebung der Atome verwendeten $\delta \overline{\chi}$. Es soll

sich nun auch das Wirkungsgesetz der Kräfte, also die Form der Funktion χ in ganz beliebiger Weise ändern. Dann erleidet $\bar{\chi}$ eine doppelte Veränderung 1. dadurch, daß die Positionen der Atome im neuen Zustande gegen die im alten durchschnittlich verschoben erscheinen, daß also die Wahrscheinlichkeit jeder Position im neuen Zustande eine andere ist; 2. dadurch, daß für identische Positionen aller Atome χ im ersten Zustande ein anderes ist, als im zweiten. Bezeichnen wir den Zuwachs des $\bar{\chi}$ infolge der ersten Ursache mit $\delta_1 \bar{\chi}$, den infolge des zweiten mit $\delta_2 \bar{\chi}$, so ist

$$(15) \quad \delta \bar{\chi} = \delta_1 \bar{\chi} + \delta_2 \bar{\chi}.$$

Die Wärmemenge, welche auf Vermehrung der lebendigen Kraft verwendet wurde, ist wieder

$$\delta \sum \frac{m c^2}{2};$$

ebenso ist die auf durchschnittliche Verschiebung der Atome verwendete $\delta_1 \bar{\chi}$. Dagegen ist zur Veränderung des χ bei identischen Positionen der Atome gar keine Wärmezufuhr notwendig; denn es ist klar, daß, wenn sich bloß die Natur der auf einen Körper wirkenden Kräfte ändert, ohne daß sich die Positionen und Geschwindigkeiten der Atome ändern, ein solcher Vorgang gar keine Wärmezufuhr repräsentiert. Die gesamte zugeführte Wärme ist daher noch immer

$$\delta Q = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \delta_1 \bar{\chi}.$$

Wir wollen nun zur Abkürzung den Differentialausdruck $dx_1 dy_1 \dots dz_r$ der Formel (10) mit $d\sigma$ und eine Integration nach allen diesen Differentialen entsprechend mit einem einzigen Integralzeichen, ferner den in der Gleichung (10) mit $d\sigma$ multiplizierten Ausdruck.

$$\frac{e^{-h\chi}}{\int e^{-h\chi} d\sigma}$$

mit f bezeichnen, so daß also $dt' = f d\sigma$ wird. Ferner seien δf und $\delta \chi$ die Differenzen der Werte von f und χ im alten und neuen Zustande für identische Positionen aller Atome ($\delta \chi$ ist also die Arbeit, welche man im neuen Zustande braucht, um die Atome aus unendlicher relativer Distanz in jene Position

zu bringen, bei der ihre Koordinaten $x_1, y_1 \dots z_r$ sind, weniger der Arbeit, die man zu demselben Vorgange im alten Zustande braucht). Dann ist

$$\delta_1 \bar{\chi} = \int \chi \delta f d\sigma, \quad \delta_2 \bar{\chi} = \int \delta \chi f d\sigma;$$

es ist also zunächst

$$(16) \quad \delta Q = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \int \chi \delta f d\sigma.$$

Substituiert man die Werte von $\delta_1 \bar{\chi}$ und $\delta_2 \bar{\chi}$ in die Gleichung (15), so erhält man:

$$\delta \bar{\chi} = \int \chi \delta f d\sigma + \int \delta \chi f d\sigma,$$

was übrigens auch durch direkte Variation der Gleichung

$$\bar{\chi} = \int \chi f d\sigma$$

hervorgeht. Nun ist aber $\int \delta \chi f d\sigma$ nichts anderes als der schon durch die Gleichung (14) gegebene Mittelwert $\bar{\delta \chi}$. Es ist nämlich $\delta \chi$ für alle Positionen im allgemeinen verschieden. Multiplizieren wir den zu jeder Position gehörigen Wert von $\delta \chi$ mit der Wahrscheinlichkeit $f d\sigma$ der betreffenden Position und integrieren über alle möglichen Positionen, bilden also das Integral $\int \delta \chi f d\sigma$, so erhalten wir die mit $\bar{\delta \chi}$ bezeichnete Größe. Es ist also

$$\int \chi \delta f d\sigma = \delta \bar{\chi} - \bar{\delta \chi}$$

und

$$(17)^1) \quad \delta Q = \delta \sum \frac{m c^2}{2} + \delta \bar{\chi} - \bar{\delta \chi}.$$

¹⁾ Ich will in dieser Anmerkung noch zeigen, daß man die Formel (17) auch aus der Gleichung (22) meiner im Jahre 1866 der k. Akademie überreichten Abhandlung (dieser Band Nr. 2) erhalten kann. Summiert man dieselbe bezüglich aller Atome und berücksichtigt, daß $\sum \varepsilon = \delta Q$ ist, so ergibt sich zunächst

$$\delta Q = \delta \sum \frac{m c^2}{2} - \overline{X \delta x + Y \delta y + Z \delta z}.$$

Nun ist aber

$$- \overline{X \delta x + Y \delta y + Z \delta z}$$

die mittlere Veränderung der Kraftfunktion infolge der Verschiebung der Atome, also gleich $\delta_1 \bar{\chi} = \delta \bar{\chi} - \bar{\delta \chi}$, was man nur zu substituieren braucht, um die Formel (17) wieder zu erhalten.

Diese Formel zeigt unmittelbar, daß $\delta Q/T$ ein vollständiges Differential ist. Substituiert man nämlich in dieselbe für $\overline{\sum m c^2/2}$, $\overline{\chi}$ und $\overline{\delta\chi}$ ihre durch die Gleichungen (9), (11) und (14) gegebenen Werte und schreibt wieder $d\sigma$ für $dx_1 dy_1 \dots dz_r$, so geht sie über in:

$$\delta Q = -\frac{3r\delta h}{2h^2} + \delta \left[\frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} \right] - \frac{\int \delta\chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma},$$

wo jede Integration über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist, deren Differentiale in $d\sigma$ enthalten sind, also bezüglich aller Koordinaten von $-\infty$ bis $+\infty$. Dividiert man durch

$$T = \frac{m}{2} c^2 = \frac{3}{2h},$$

so erhält man

$$\frac{\delta Q}{T} = -\frac{r\delta h}{h} + \frac{2h}{3} \delta \left[\frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} \right] - \frac{2h}{3} \frac{\int \delta\chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma}.$$

Dies ist aber das vollständige Differential von

$$(18) \quad -r \log h + \frac{2h}{3} \frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} + \frac{2}{3} \log \int e^{-h\chi} d\sigma + \text{const.}$$

Der Ausdruck (18) ist also die von Clausius als die Entropie eines Körpers bezeichnete Größe, die Größe, deren Differential dQ/T ist; sie ist, wie man sieht, durch Quadraturen auffindbar, wenn man die die Temperatur bestimmende Konstante h und die Kräfte kennt, welche in allen Positionen auf die Atome wirksam sind. Die gesamte geleistete innere und äußere Arbeit ist

$$\delta L = \delta \overline{\chi} - \overline{\delta\chi}.$$

Die von Clausius als Disgregation bezeichnete Größe $\int dL/T$ hat also den Wert

$$Z = \frac{2h}{3} \frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} + \frac{2}{3} \log \int e^{-h\chi} d\sigma + \text{const.}$$

Ich will noch zeigen, daß dQ/T auch dann noch ein vollständiges Differential wird, wenn nur eine endliche Zahl von Atomen miteinander in Wechselwirkung stehen, sobald dieselben im Verlaufe der Bewegung alle möglichen Zustände durchlaufen, welche mit der Gleichung der lebendigen Kraft

$\varphi_n = a_n$ vereinbar sind. Ist λ die Zahl der in Wechselwirkung stehenden materiellen Punkte, so können wir dann auf dieselben die Gleichungen (25), (26) und (27) der vorigen Abhandlung anwenden. Aus (25) folgt, weil die mittlere lebendige Kraft aller Atome gleich ist,

$$\overline{\frac{m c^2}{2}} = \lambda \frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{\iint \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2}} dx_1 dy_1 \dots dz_\lambda}{\iint \dots (a_n - \chi)^{\frac{3\lambda}{2} - 1} dx_1 dy_1 \dots dz_\lambda}.$$

Folglich hat die mittlere Energie

$$\overline{E} = \overline{\frac{m c^2}{2}} + \overline{\chi}$$

den Wert a_n , was selbstverständlich ist, da ja die Konstante a_n die Summe der ganzen im Systeme enthaltenen Arbeit und lebendigen Kraft darstellt, die bei ungeändertem Zustande des Körpers für alle Zeiten absolut konstant ist, weil derselbe mit keinen anderen materiellen Punkten in Wechselwirkung steht. Indem man diesen Wert für die Energie in die Formel (17) substituiert, erhält man

$$\delta Q = \delta a_n - \overline{\delta \chi}.$$

Setzen wir $a_n - \chi = \psi$, so daß also ψ wieder eine Funktion von $x_1, y_1 \dots z_\lambda$ und gleich der gesamten bei irgend einer Position des Systems in Form von Geschwindigkeit in demselben vorhandenen lebendigen Kraft ist. Bezeichnen wir ferner mit $\delta \psi$ die Differenz der Werte von ψ für identische Positionen der Atome im neuen und ursprünglichen Zustande. Dann ist δQ der Mittelwert $\overline{\delta \psi}$ aller $\delta \psi$. Dieser Mittelwert ist, da $\delta \psi$ im allgemeinen Funktion von $x_1, y_1 \dots z_\lambda$ ist, nach der Formel (26) der vorigen Abhandlung zu berechnen. Schreiben wir in derselben überall ψ für $a_n - \chi$ und $d\sigma$ für $dx_1 dy_1 \dots dz_r$, so liefert sie

$$\delta Q = \overline{\delta \psi} = \frac{\int \delta \psi \psi^{\frac{3\lambda}{2} - 1} d\sigma}{\int \psi^{\frac{3\lambda}{2} - 1} d\sigma}.$$

Für die mittlere lebendige Kraft eines Atoms liefert die Formel (25) der vorigen Abhandlung

$$T = \frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\int \psi^{\frac{3\lambda}{2}} d\sigma}{\int \psi^{\frac{3\lambda}{2} - 1} d\sigma}.$$

Der Quotient beider Ausdrücke ist

$$\frac{\delta Q}{T} = \lambda \frac{\int \delta \psi \psi^{\frac{3\lambda}{2} - 1} d\sigma}{\int \psi^{\frac{3\lambda}{2}} d\sigma}.$$

Nun ist aber, weil die Grenzen des Integrals $\int \psi^{3\lambda/2} d\sigma$ so zu wählen sind, daß an denselben die Funktion unter dem Integralzeichen überall verschwindet,

$$\delta \int \psi^{\frac{3\lambda}{2}} d\sigma = \frac{3\lambda}{2} \int \delta \psi \psi^{\frac{3\lambda}{2} - 1} d\sigma,$$

folglich ist der Ausdruck dQ/T das vollständige Differential von

$$\frac{2}{3} \log \int \psi^{\frac{3\lambda}{2}} d\sigma + \text{const.}$$

Dieser Ausdruck gibt uns jetzt die Entropie des Systems. Dieselbe ist also wieder durch Quadraturen auffindbar, wenn die Kräfte für alle Positionen und die gesamte im Systeme enthaltene Arbeit gegeben ist. Für ein ideales Gas mit einatomigen Molekülen z. B. ist ψ die mit λ multiplizierte mittlere lebendige Kraft eines Atoms, also $\psi = \lambda T$. Es ist also die Entropie, wenn man auch für $d\sigma$ wieder seinen Wert substituiert,

$$\frac{2}{3} \log T^{\frac{3\lambda}{2}} \iiint \dots dx_1 dy_1 \dots dz_\lambda.$$

Ferner ist jedes der Integrale

$$\iiint dx_1 dy_1 dz_1, \iiint dx_2 dy_2 dz_2 \dots$$

gleich dem ganzen Volumen v des Gases; es ist also die Entropie gleich

$$\log \left(T^\lambda \cdot v^{\frac{2\lambda}{3}} \right) + \text{const.}$$

Dasselbe liefert natürlich auch die Formel (18), welche für den Fall gilt, daß das Gas mit anderen Atomen in Wechsel-

wirkung steht, der ja in der Natur immer stattfinden wird. Um diese Formel auf ein Gas mit einatomigen Molekülen anzuwenden, müssen wir χ , solange sich alle Atome in dem vom Gase erfüllten Raume befinden, konstant, sobald aber Atome außerhalb dieses Raumes sind, unendlich groß annehmen. Es kann also χ und h überall vor das Integralzeichen gesetzt werden, aber die Integrationen sind nur über das ganze Volumen des Gases zu erstrecken. Dadurch geht die Formel (18) über in:

$$\begin{aligned} & -r \log h + \frac{2h\chi}{3} + \frac{2}{3} \log \left(e^{-h\chi} \int d\sigma \right) \\ & = -r \log h + \frac{2}{3} \log \int d\sigma + \text{const.} \end{aligned}$$

Da $\int d\sigma$ wieder gleich v^r und $3/2h = T$ ist, so erhalten wir, wenn wir die Zahl der Atome wieder mit λ statt mit r bezeichnen, den vorigen Ausdruck

$$\log \left(T^\lambda v^{\frac{2\lambda}{3}} \right) + \text{const.},$$

welchen Wert man durch direkte Berechnung der Entropie verifizieren kann. Für Gase mit einatomigen Molekülen ist nämlich, wenn p den Druck bezogen auf die Flächeneinheit, T die mittlere lebendige Kraft eines Atoms oder Moleküls und λ wie früher die Zahl der Moleküle des Gases vorstellt,

$$p v = \frac{2\lambda T}{3}.$$

Ferner ist, wenn man, wie ich es immer mache, Arbeit und Wärme als in demselben Maße (dem mechanischen) gemessen voraussetzt,

$$\delta Q = \lambda \delta T + p \delta v,$$

daher

$$\frac{\delta Q}{T} = \lambda \frac{\delta T}{T} + \frac{p \delta v}{T} = \lambda \frac{\delta T}{T} + \frac{2\lambda}{3} \frac{\delta v}{v},$$

folglich

$$\int \frac{\delta Q}{T} = \log \left(T^\lambda v^{\frac{2\lambda}{3}} \right) + \text{const.}$$

Ich will schließlich noch zweier Konsequenzen der Formel (17) gedenken. Dieselbe zeigt, daß die zugeführte Wärme aus drei Teilen besteht. Der erste $\delta \sum m c^2 / 2$ soll

die auf Erhöhung der lebendigen Kraft oder Temperaturerhöhung, der zweite $\delta \bar{\chi}$ die auf innere Arbeitsleistung und der dritte $-\delta \bar{\chi}$, welcher verschwindet, sobald sich das Wirkungsgesetz aller auf die Atome des Körpers wirkenden Kräfte nicht ändert, die auf äußere Arbeitsleistung verwendete Wärme heißen. Der Quotient der zur Temperaturerhöhung der Gewichtseinheit verwendeten Wärmemenge in die hervorgebrachte Temperaturerhöhung ist dasjenige, was Rankine als die wahre spezifische Wärme, Clausius als die wahre Wärmekapazität eines Körpers bezeichnet. Da nun die Temperatur der mittleren lebendigen Kraft eines Atoms proportional, die Größe $\sum m c^2 / 2$ aber nach der Gleichung (9) die r -fache mittlere lebendige Kraft eines Atoms ist, so ist die wahre Wärmekapazität gleich einer Konstanten multipliziert mit der Anzahl der Atome in der Gewichtseinheit. Sie ist also für einen und denselben Körper unter allen Umständen konstant und verkehrt proportional dem Atomgewichte (dem durch die Anzahl der Atome im Moleküle dividierten Molekulargewichte). Für feste Körper ist die Kraft, welche auf irgend ein Atom wirkt, in erster Annäherung wahrscheinlich proportional der Entfernung des Atoms von seiner Ruhelage, daher die Kraftfunktion in erster Annäherung

$$\chi = \sum (Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gx + Hy + Jz).$$

Substituieren wir diesen Wert in die Formel (11), so können wir alle Integrationen ausführen, indem wir jedes Polynom zweiten Grades durch Transformation der Variablen auf die Form $x^2 + y^2 + z^2$ bringen. Wir erhalten dadurch

$$\bar{\chi} = \sum \frac{m c^2}{2}.$$

(Ich bemerke, daß auch die Formel (27) für den Fall, daß die Atome des Körpers mit keinen anderen in Berührung stehen,

$$\bar{\chi} = \sum \frac{m c^2}{2}$$

liefert.) Für feste Körper ist also in erster Annäherung

$$\delta \bar{\chi} = \delta \sum \frac{m c^2}{2},$$

d. h. die auf innere Arbeitsleistung verwendete Wärmemenge ist gleich der auf Temperaturerhöhung verwendeten, und da

man bei festen Körpern die äußere Arbeit vernachlässigen kann, so ist die gesamte zugeführte Wärmemenge doppelt so groß als die auf Temperaturerhöhung verwendete. Die wirkliche spezifische Wärme, die wir experimentell finden, ist daher doppelt so groß als die wahre Wärmekapazität; und da die letztere dem Atomgewichte proportional ist, so muß es auch die erstere sein. Bei den festen Körpern, welche das Dulong-Petitsche oder Neumannsche Gesetz befolgen, scheinen also die auf ein Atom wirkenden Kräfte in der Tat in erster Annäherung seiner Entfernung von der Ruhelage proportional zu sein. Bei den festen Körpern, welche das Dulong'sche Gesetz nicht befolgen, müßte dies aber nicht mehr der Fall sein.

Über das Wirkungsgesetz der Molekularkräfte.¹⁾

(Wien. Ber. 66. S. 213—219. 1872.)

Maxwell hat bekanntlich zuerst nachgewiesen, daß man, um das Gesetz der Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten von der Temperatur zu erklären, die Gasmoleküle nicht als starre, elastische Körper betrachten darf. Er zeigte, daß man den Beobachtungen entsprechende Resultate erhält, wenn man annimmt, daß die Centra zweier Gasmoleküle sich mit einer Kraft abstoßen, welche der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Maxwell berechnete aus diesem Gesetze auch die Abhängigkeit der Diffusions- und Wärmeleitungs-konstante von der Temperatur, welche durch die späteren Versuche von Loschmidt und Stefan bestätigt wurde. Stefan wies nun nach, daß der wesentliche Unterschied der Maxwellschen Hypothese von der bisherigen darin besteht, daß nach Maxwells Ansicht die Distanz, bis zu welcher sich die Centra zweier zusammenstoßender Moleküle nähern, von deren Geschwindigkeit vor dem Zusammenstoße abhängt, während dieselbe, wenn man die Moleküle als elastische Kugeln betrachtet, von der Geschwindigkeit ganz unabhängig und gleich dem Durchmesser dieser Kugeln ist, und daß das Maxwellsche Wirkungsgesetz gerade so gewählt ist, daß die kleinste Entfernung, in welche zwei zusammenstoßende Moleküle beim zentralen Stoße kommen, der Quadratwurzel ihrer relativen Geschwindigkeit vor dem Stoße verkehrt proportional ist. Stefan zeigte ferner, daß man den Beobachtungen ebenso zu genügen vermag, wenn man annimmt, daß die Moleküle elastische Kugeln seien, deren Durchmesser der vierten Wurzel aus der absoluten Temperatur verkehrt proportional sind. Die bisherige Ansicht, daß die Distanz, bis zu der sich die Centra

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 9. S. 134. 18. Juli 1872.

zweier stoßender Moleküle nähern, nahezu von ihrer relativen Geschwindigkeit unabhängig sei, muß also jedenfalls aufgegeben werden. Man motivierte diese Ansicht bisher hauptsächlich durch die geringe Zusammendrückbarkeit der festen und tropfbaren Körper. Aus dem Umstande, daß in festen und tropfbaren Körpern, selbst durch bedeutende Druckkräfte die Distanz der Centra zweier Nachbarmoleküle nur wenig verändert wird, glaubte man schließen zu können, daß auch in Gasen die kleinste Distanz, in die die Centra zweier stoßender Moleküle gelangen, nahe unveränderlich sei. Allein wenn wir auch durch die Druckkräfte, die wir in unseren Piezometern zu erzeugen vermögen, die Centra der Moleküle tropfbarer Flüssigkeiten einander nicht bedeutend näher bringen können, so gilt dies keineswegs von allen Druckkräften überhaupt. Der Druck, welcher in den größten Meerestiefen herrscht, verdichtet das Wasser bereits um mehr als $\frac{1}{20}$ seines ursprünglichen Volumens, und noch unvergleichlich größer ist wahrscheinlich der Druck, welcher im Erdmittelpunkte herrscht. Solange man also keine numerische Rechnung angestellt hat, läßt sich nicht angeben, ob sich in Gasen zwei zusammenstoßende Moleküle so weit nähern, als sie sich in tropfbaren Flüssigkeiten unter dem Drucke einiger Atmosphären oder einiger hunderttausend Atmosphären nähern. Nur im ersten Falle wäre der Schluß auf die Unveränderlichkeit der Distanz der Centra zweier zusammenstoßender Moleküle erlaubt, während im letzteren Falle schon a priori auf eine Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu schließen ist. Die Rechnung wird uns in der Tat zeigen, daß das letztere der Fall ist, ja daß die Veränderlichkeit der kleinsten Distanz zweier stoßender Moleküle, wie sie sich aus der Kompressibilität der Flüssigkeiten ergibt, wenigstens der Größenordnung nach vollkommen mit der von der Gastheorie geforderten übereinstimmt. Eine exakte numerische Übereinstimmung kann selbstverständlich wegen verschiedener, der Wirklichkeit nur angenähert entsprechender Hypothesen, zu denen wir im folgenden in Ermangelung der genauen Kenntnis der wirklichen Verhältnisse werden unsere Zuflucht nehmen müssen, gar nicht erwartet werden. Da die Kompressibilität des tropfbaren Sauerstoffes oder Stickstoffes nicht bekannt ist, so wollen wir das Wasser unserer Berechnung

zugrunde legen. Als Einheiten wollen wir ein für allemal den Meter, die Sekunde und das Gewicht eines Kilogramms wählen. Sei im flüssigen Wasser beim Drucke einer Atmosphäre und dem Maximum seiner Dichte die Distanz der Centra zweier Nachbarmoleküle gleich ρ Meter. Ich will nun zunächst aus der Kompressibilität des Wassers die Arbeit bestimmen, welche erforderlich ist, um die Distanz zweier Nachbarmoleküle um das x fache ihres ursprünglichen Wertes zu vermindern, also von ρ auf $(1-x)\rho$ zu reduzieren. Der Druck einer Atmosphäre komprimiert nach Grassis Versuchen das Wasser durchschnittlich um 0,000048 seines Volumens, nähert also die Centra je zweier Nachbarmoleküle um 0,000016 ihrer ursprünglichen Distanz.

Um die Kraft zu berechnen, oder doch beiläufig zu schätzen, mit welcher dabei je zwei Moleküle einander genähert werden, nehmen wir an, daß die Centra der Moleküle die Ecken von lauter Würfeln bilden, deren Seiten gleich ρ sind.

Es berechtigt uns natürlich nichts zur Annahme, daß die Wassermoleküle wirklich gerade in dieser Weise angeordnet seien, aber es ist dies die einfachste geometrische Anordnung, und wenn auch die wirkliche Anordnung von derselben wahrscheinlich bedeutend abweicht, so wird uns dieselbe sicher doch wenigstens zu keinen Fehlern in der Größenordnung der zu berechnenden Werte führen. Eine Atmosphäre übt auf den Quadratmeter einen Druck von 10334 Kilogr. aus. Bei der von uns angenommenen Anordnung der Moleküle entfallen auf den Quadratmeter $1/\rho^2$ Moleküle, und da sich der Gesamtdruck auf alle diese Moleküle verteilt, so entfällt auf jedes Molekül die Kraft $10334\rho^2$ in unseren Einheiten gemessen. Dies ist also die Kraft, mit welcher beim Drucke einer Atmosphäre je zwei Nachbarmoleküle einander genähert werden, wenn wir die jedenfalls bedeutend kleinere Kraft, welche von den entfernteren Molekülen ausgeht, vernachlässigen. Dabei vermindert sich ihre Distanz um 0,000016 ihres ursprünglichen Wertes, also um $0,000016\rho$. Nehmen wir an, daß die Kraft, welche zwischen zwei Molekülen der Flüssigkeit wirksam ist, ihrer Annäherung direkt proportional ist (ein Gesetz, welches für geringe Kompressionen feststeht und das wir, da es sich ja hier bloß um die Größenordnung handelt, ohne Bedenken auch

auf größere Kompressionen übertragen können), so ist die Kraft, welche zwischen zwei Nachbarmolekülen geweckt wird, wenn man ihre Distanz um $x \rho$ vermindert, gleich:

$$\frac{10334 \rho^2 x}{0,000016}$$

Die Arbeit, die zu dieser Distanzverminderung erforderlich ist, findet man, indem man mit der halben Distanzverminderung $x \rho / 2$ multipliziert; dieselbe ist also:

$$(1) \quad a = \frac{10334 \rho^3 x^2}{0,000032}$$

Wir wollen noch die Masse m eines Wassermoleküls berechnen. Die Masse eines Kubikmeters Wasser beim Maximum der Dichte ist in unseren Einheiten gemessen $1000 / 9,81$. Bei der von uns vorausgesetzten Anordnung der Moleküle befinden sich in einem Kubikmeter $1 / \rho^3$ Moleküle. Jedes derselben hat also die Masse:

$$m = \frac{1000 \rho^3}{9,81}$$

Unterziehen wir nun den Wasserdampf der Betrachtung. v^2 sei das mittlere Geschwindigkeitsquadrat eines Moleküls desselben. Wir fragen uns nun, wie weit sich die Centra zweier Moleküle, welche beide mit der Geschwindigkeit v einander zentral gerade entgegenfliegen, annähern werden. Die gesamte lebendige Kraft beider Moleküle vor dem Stoße ist:

$$2 \cdot \frac{m v^2}{2} = m v^2.$$

Für Wasserstoffgas von der Temperatur $t^\circ \text{C}$ ist:

$$v^2 = 1844^2 (1 + \alpha t),$$

wobei:

$$\alpha = \frac{1}{273}$$

Ein Wasserdampfmolekül ist neunmal so schwer, als ein Wasserstoffmolekül. Für den Wasserdampf ist also:

$$v^2 = \frac{1844^2}{9} (1 + \alpha t).$$

Die gesamte lebendige Kraft unserer beiden Wasserdampfmoleküle ist also:

$$m v^2 = \frac{1000 \rho^3}{9,81} \cdot \frac{1844^2}{9} (1 + \alpha t).$$

Im Moment der größten Annäherung haben beide Moleküle die Geschwindigkeit Null; es ist also ihre gesamte lebendige Kraft in Arbeit verwandelt worden. Nehmen wir an, die Centra der beiden Moleküle hätten sich dabei bis zur Distanz $(1 - x)\rho$ genähert, so haben wir die hierzu erforderliche Arbeit bereits früher aus der Kompressibilität des tropfbaren Wassers berechnet und durch Gleichung (1) ausgedrückt gefunden. Nehmen wir an, die Moleküle hätten ihre Beschaffenheit durch den Übergang in den gasförmigen Zustand nicht geändert, so wird diese Formel auch auf die Annäherung beim Zusammenstoße der beiden Gasmoleküle anwendbar sein und wir erhalten, indem wir die verlorene lebendige Kraft der aufgewendeten Arbeit gleichsetzen:

$$\frac{1000 \rho^3}{9,81} \cdot \frac{1844^2}{9} (1 + \alpha t) = \frac{10334 \rho^3 x^2}{0,000032},$$

woraus sich

$$x = \frac{\sqrt{1 + \alpha t}}{2,9}$$

ergibt. Für $t = \theta$ wird

$$x = \frac{1}{2,9};$$

bei einer Temperatur von 0° C nähern sich daher die Centra zweier Wasserdampfmoleküle, wenn sie mit ihrer mittleren lebendigen Kraft gerade zentral aufeinander zufliegen, bis zu einer Distanz, welche ungefähr gleich $\frac{2}{3}$ von der Distanz ist, welche zwei Nachbarmoleküle im tropfbaren Wasser unter dem Drucke einer Atmosphäre beim Maximum der Dichte haben, ein Wert, welcher auch dadurch bestätigt wird, daß ja bei 0° C das Wasser zu schmelzen anfängt, sich also die Moleküle bereits durcheinander hindurchzudrängen vermögen. Um eine solche Annäherung der Moleküle des tropfbaren Wassers hervorzubringen, müßte auf demselben ein Druck von 20 000 Atmosphären lasten. Wir sehen daher, daß die Kräfte, mit denen zwei zusammenstoßende Gasmoleküle gegeneinander getrieben werden, ganz bedeutend sind und daß daher, abgesehen von den Experimenten über Reibung, Diffusion und Wärmeleitung, zu erwarten ist, daß der Durchmesser eines Moleküls nicht unerheblich mit der Temperatur veränderlich erscheint. Be-

zeichnen wir die Distanz, bis zu welcher sich die Centra zweier Moleküle bei 0° C nähern, mit r_0 , so ist also

$$r_0 = (1 - x) \varrho = \frac{1,9}{2,9} \varrho.$$

Um die Abhängigkeit der kleinsten Distanz zweier Moleküle von der Temperatur zu erkennen, nehmen wir an, die Temperatur t sei nicht viel von 0° C verschieden. Dann ist angenähert

$$x = \frac{1}{2,9} \left(1 + \frac{\alpha t}{2} \right).$$

Bezeichnen wir die Distanz, bis zu welcher sich jetzt die Centra zweier Gasmoleküle nähern, wenn sich dieselben mit ihrer mittleren lebendigen Kraft zentral gegeneinander bewegen, mit r , so ist also wieder:

$$r = (1 - x) \varrho = \left(1 - \frac{1}{2,9} - \frac{\alpha t}{5,8} \right) \varrho = r_0 \left(1 - \frac{\alpha t}{3,8} \right).$$

Nach dem von Stefan gefundenen Gesetze wird den Erfahrungen über Reibung, Diffusion und Wärmeleitung genügt, wenn man annimmt, daß sich die beiden Distanzen r und r_0 , bis zu welchen sich die Centra zweier Gasmoleküle bei den Temperaturen von t° und 0° C annähern, verkehrt wie die vierten Wurzeln aus den absoluten Temperaturen verhalten, wonach man für kleine t zwischen r_0 und r die Relation

$$r = r_0 \left(1 - \frac{\alpha t}{4} \right)$$

erhält. Diese Relation befindet sich in der schönsten Übereinstimmung mit der von uns aus der Kompressibilität des Wassers abgeleiteten Gleichung

$$r = r_0 \left(1 - \frac{\alpha t}{3,8} \right).$$

Bedenkt man, daß wir bei Ableitung der letzten Gleichung so manche nur angenähert richtige Hypothese gemacht haben und außerdem den Wasserdampf der Rechnung zugrunde legten, für welchen das Stefansche Gesetz noch nicht experimentell geprüft wurde, so muß man gestehen, daß eine bessere Übereinstimmung sicher nicht zu erwarten war. Wenn also auch bei der Unsicherheit der von mir gemachten Voraussetzungen auf diese numerische Übereinstimmung vorläufig kaum ein allzu großer Wert zu legen sein dürfte, so steht doch so viel

fest, daß die geringe Kompressibilität der tropfbaren Flüssigkeiten mit der Veränderlichkeit des Molekulardurchmessers keineswegs in Widerspruch steht, sondern daß sich vielmehr diese Veränderlichkeit aus der Kompressibilität der tropfbaren Flüssigkeiten von derselben Ordnung, wie aus der Theorie der inneren Reibung der Gase ergibt.

Ich bemerke schließlich noch, daß sich aus der Kompressibilität des Wassers die Proportionalität des Molekulardurchmessers mit der reziproken vierten Wurzel der absoluten Temperatur bloß in der Nähe der Temperatur von 0°C ergibt, was aber durchaus keinen Widerspruch involviert, da ja die Gültigkeit des letzteren Gesetzes auch nur in der Nähe von 0°C bewiesen ist. Für größere Temperaturen würde man aus der Kompression des Wassers, falls dieselbe da noch immer dem Drucke proportional wäre, eine raschere Abnahme, für kleinere aber eine geringere Zunahme des Molekulardurchmessers erhalten.

Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen.¹⁾

(Wien. Ber. 66. S. 275—370. 1872.)

Die mechanische Wärmetheorie setzt voraus, daß sich die Moleküle der Gase keineswegs in Ruhe, sondern in der lebhaftesten Bewegung befinden. Wenn daher auch der Körper seinen Zustand gar nicht verändert, so wird doch jedes einzelne seiner Moleküle seinen Bewegungszustand beständig verändern, und ebenso werden sich die verschiedenen Moleküle gleichzeitig nebeneinander in den verschiedensten Zuständen befinden. Lediglich dem Umstande, daß selbst die regellosesten Vorgänge, wenn sie unter denselben Verhältnissen vor sich gehen, doch jedesmal dieselben Durchschnittswerte liefern, ist es zuzuschreiben, daß wir auch im Verhalten warmer Körper ganz bestimmte Gesetze wahrnehmen. Denn die Moleküle der Körper sind ja so zahlreich und ihre Bewegungen so rasch, daß uns nie etwas anderes, als jene Durchschnittswerte wahrnehmbar wird. Man möchte die Regelmäßigkeit jener Durchschnittswerte mit der bewunderungswürdigen Konstanz der von der Statistik gelieferten Durchschnittszahlen vergleichen, welche ja auch aus Vorgängen abgeleitet sind, von denen jeder einzelne durch ein ganz unberechenbares Zusammenwirken der mannigfaltigsten äußeren Umstände bedingt ist. Die Moleküle sind gleichsam ebenso viele Individuen, welche die verschiedensten Bewegungszustände haben, und nur dadurch, daß die Anzahl derjenigen, welche durchschnittlich einen gewissen Bewegungszustand haben, konstant ist, bleiben die Eigenschaften des Gases unverändert. Die Bestimmung von Durchschnittswerten ist Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Probleme

¹⁾ Vorläufiger Bericht über diese Arbeit Wien. Anz. 9. S. 23. 8. Februar 1872. (Diese Arbeit hat [Abschnitt 4] eine Berichtigung erfahren. Siehe Nr. 83 Bd. III dieser Sammlung).

der mechanischen Wärmetheorie sind daher Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es wäre aber ein Irrtum, zu glauben, daß der Wärmetheorie deshalb eine Unsicherheit anhafte, weil daselbst die Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung kommen. Man verwechsle nicht einen unvollständig bewiesenen Satz, dessen Richtigkeit infolgedessen problematisch ist, mit einem vollständig erwiesenen Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung; letzterer stellt, wie das Resultat jedes anderen Kalküls, eine notwendige Konsequenz gewisser Prämissen dar, und bestätigt sich, sobald diese richtig sind, ebenso in der Erfahrung, wenn nur genügend viele Fälle der Beobachtung unterzogen werden, was bei der enormen Anzahl der Körpermoleküle in der Wärmetheorie immer der Fall ist. Nur scheint es hier doppelt geboten, bei den Schlüssen mit der größten Strenge zu verfahren. Will man daher nicht bloß beiläufige Werte der in der Gastheorie vorkommenden Größen mutmaßen, sondern eine exakte Theorie derselben in Angriff nehmen, so muß vor allem die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände bestimmt werden, welche an einem und demselben Moleküle im Verlaufe einer sehr langen Zeit und an den verschiedenen Molekülen gleichzeitig vorkommen, d. h. es muß berechnet werden, wie sich die Zahl jener Moleküle, deren Zustand zwischen gewissen Grenzen liegt, zur Gesamtanzahl der Moleküle verhält. Es wurde dieses Problem bereits von Maxwell und mir in verschiedenen Abhandlungen behandelt, ohne daß jedoch bis jetzt eine vollständige Lösung gelungen wäre. In der Tat scheint dieselbe namentlich in dem Falle, wo jedes Molekül wieder aus mehreren materiellen Punkten (den Atomen) besteht, sehr schwierig, da man die Bewegungsgleichungen bereits für einen Komplex von drei Atomen nicht mehr zu integrieren vermag. Allein bei näherer Betrachtung erweist es sich als doch nicht so unwahrscheinlich, daß sich jene Wahrscheinlichkeit aus den bloßen Bewegungsgleichungen ohne deren Integration wird ableiten lassen. Denn die zahlreichen einfachen Gesetze über das Verhalten der Gase zeigen, daß der Ausdruck für jene Wahrscheinlichkeit gewisse allgemeine, von der speziellen Natur der Gase unabhängige Eigenschaften besitzen muß, und gerade derartige allgemeine Gesetze lassen sich nicht selten schon aus den bloßen Be-

wegungsgleichungen ableiten, ohne daß deren Integration dazu erforderlich wäre. In der Tat gelang es mir, das Problem für Gasmoleküle, die aus beliebig vielen Atomen bestehen, der Lösung zuzuführen. Ich will jedoch hier, der besseren Übersicht halber, zunächst den einfachsten Fall behandeln, daß jedes Molekül ein einzelner materieller Punkt ist. Hieran schließe ich dann erst den allgemeinen, in dem übrigens die Durchführung der Rechnung im Wesen ganz dieselbe ist.

I. Betrachtung einatomiger Gasmoleküle.

Sei irgend ein Raum mit sehr vielen Gasmolekülen erfüllt, deren jedes ein einfacher materieller Punkt ist. Jedes Molekül fliege während des größten Teiles der Zeit geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort. Nur wenn sich zwei Moleküle zufällig sehr nahe kommen, beginnen sie aufeinander einzuwirken. Ich nenne diesen Vorgang, während dessen zwei Moleküle aufeinander einwirken, einen Zusammenstoß der beiden Moleküle, ohne daß jedoch dabei an einen Stoß elastischer Körper zu denken ist; die während des Zusammenstoßes wirkenden Kräfte können vielmehr ganz beliebig sein. Selbst wenn zu Anfang der Zeit alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit besessen hätten, würden sie dieselbe im Verlaufe der Zeit nicht immer beibehalten. Infolge der Zusammenstöße werden vielmehr einige Moleküle größere, andere kleinere Geschwindigkeiten annehmen, bis sich endlich eine solche Verteilung der Geschwindigkeiten unter den Molekülen hergestellt hat, daß dieselbe durch die Zusammenstöße nicht weiter verändert wird. Bei dieser schließlich sich herstellenden Geschwindigkeitsverteilung werden im allgemeinen alle möglichen Geschwindigkeiten von Null bis zu einer sehr großen Geschwindigkeit vorkommen. Die Zahl der Moleküle, deren Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ liegt, wollen wir mit $F(v)dv$ bezeichnen. Dann bestimmt uns also die Funktion F die Geschwindigkeitsverteilung vollständig. Für den Fall einatomiger Moleküle, den wir jetzt betrachten, fand bereits Maxwell für $F(v)$ den Wert $A v^2 e^{-Bv^2}$, wobei A und B Konstanten sind, so daß also die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Geschwindigkeiten durch eine ähnliche Formel gegeben wird, wie die Wahrschein-

lichkeit der verschiedenen Beobachtungsfehler in der Theorie der Methode der kleinsten Quadrate. Der erste Beweis jedoch, den Maxwell für diese Formel gab, wird von ihm selbst als unrichtig bezeichnet. Später gab er zwar einen sehr eleganten Beweis dafür, daß, wenn man die obige Geschwindigkeitsverteilung einmal unter den Gasmolekülen hergestellt hat, dieselbe in der Tat durch die Zusammenstöße nicht weiter verändert wird. Er sucht auch zu beweisen, daß es die einzige Geschwindigkeitsverteilung von der betrachteten Eigenschaft ist. Allein der letztere Beweis scheint mir wieder Fehlschlüsse zu enthalten.¹⁾ Es ist somit noch nicht bewiesen, daß, wie

¹⁾ Erstlich sollte Maxwell eigentlich beweisen, daß ebensooft ein Paar von Molekülen ihre Geschwindigkeit von OA, OB in OA', OB' verwandeln, wie umgekehrt, während er tatsächlich nur davon spricht, daß ein Molekül ebensooft seine Geschwindigkeit von OA in OA' , als von OA' in OA verwandelt; dann behauptet Maxwell, daß, wenn die Geschwindigkeit OA öfter in OA' als umgekehrt übergehe, um ebensoviel öfter die Geschwindigkeit OA' in OA'' als umgekehrt übergehen müsse, weil sonst die Anzahl der Moleküle mit der Geschwindigkeit OA' nicht konstant bleiben könnte, welcher Schluß nur erlaubt wäre, wenn die Geschwindigkeit OA' in gar keine andere, als OA und OA'' übergehen könnte. In der Tat kann nur geschlossen werden, daß eine oder mehrere Geschwindigkeiten $OA'', OA''' \dots$ existieren, in welche die Geschwindigkeit OA' öfter übergeht, als umgekehrt. Um endlich zu beweisen, daß es nicht möglich sei, daß die Geschwindigkeit eines Moleküls öfter von OA in OA' als umgekehrt übergehe, sagt Maxwell, dasselbe müßte sonst eine in sich zurücklaufende Reihe von Geschwindigkeiten $OA, OA', OA'' \dots OA$ lieber in der einen, als in der umgekehrten Ordnung durchlaufen. Dies könne aber nicht sein, denn es ließe sich kein Grund angeben, behauptet er, weshalb das Molekül diesen Zyklus lieber in der einen als in der anderen Ordnung durchlaufe. Diese letztere Behauptung aber scheint mir das zu Beweisende als schon bewiesen anzunehmen. Denn nehmen wir bereits als bewiesen an, daß sich die Geschwindigkeit eines Moleküls ebensooft von OA in OA' , wie umgekehrt, verwandelt, dann wäre freilich kein Grund, warum es diesen Zyklus lieber in der einen, als in der anderen Ordnung durchlaufe. Nehmen wir dagegen den zu beweisenden Satz noch nicht als erwiesen an, so wäre gerade die Tatsache, daß sich die Geschwindigkeit eines Moleküls lieber von OA in OA' , als umgekehrt, lieber von OA' in OA'' , als von OA'' in OA' usw. verwandelt, der Grund, weshalb dasselbe jene Reihe von Geschwindigkeiten lieber in der Ordnung $OA, OA', OA'' \dots OA$, als in der umgekehrten durchlaufen würde. Beide Vorgänge sind ja nichts weniger als identisch. Es kann daher auch nicht a priori auf ihre gleiche Wahrscheinlichkeit geschlossen werden.

immer der Zustand des Gases zu Anfang gewesen sein mag, er sich immer dieser von Maxwell gefundenen Grenze nähern muß. Es könnte sein, daß es außer dieser noch verschiedene andere mögliche Grenzen gibt. Dieser Beweis gelingt aber leicht mittels der Auffassungsweise des Problems, zu deren Auseinandersetzung ich jetzt schreiten will, und welche zudem den Vorteil bietet, daß sie sich direkt auf mehratomige Moleküle, also auf den in der Natur wahrscheinlich allein vorkommenden Fall übertragen läßt.

Ich beginne damit, das Problem nochmals genau zu definieren. Gesetzt also, wir hätten irgend einen Raum R , in demselben befinden sich sehr viele Gasmoleküle. Jedes Molekül ist ein einfacher materieller Punkt, der sich in der bereits geschilderten Weise bewegt. Während des größten Teiles der Zeit fliegt er geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort. Nur wenn sich zwei Moleküle sehr nahe kommen, beginnen sie aufeinander zu wirken. Das Wirkungsgesetz der Kräfte, die während eines Zusammenstoßes wirksam sind, muß uns natürlich gegeben sein. Ich will aber bezüglich desselben gar keine beschränkende Annahme machen. Es kann uns gegeben sein, daß zwei Moleküle wie elastische Kugeln voneinander abprallen; es kann uns auch jedes beliebige andere Wirkungsgesetz gegeben sein. Bezüglich der Gefäßwände, welche das Gas umschließen, will ich jedoch voraussetzen, daß die Moleküle an denselben wie elastische Kugeln reflektiert werden. Es würde da auch jedes beliebige Wirkungsgesetz dieselben Formeln liefern. Aber es vereinfacht die Sache, wenn wir uns über das Gefäß diese spezielle Vorstellung machen. Wir stellen uns nun folgendes Problem: Es sei zu Anfang der Zeit also für $t = 0$, der Ort, die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitsrichtung jedes unserer Moleküle gegeben. Es wird gefragt, welches ist der Ort, die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitsrichtung jedes Moleküls nach Verlauf einer beliebigen Zeit t . Da uns die Gestalt des Gefäßes R , sowie das Wirkungsgesetz der während der Zusammenstöße wirksamen Kräfte gegeben ist, so ist dieses Problem natürlich ein vollständig bestimmtes. Es ist jedoch klar, daß es in dieser Allgemeinheit nicht vollständig auflösbar ist. Die Lösung wird aber eine viel leichtere, wenn wir an die Stelle dieses ganz allgemeinen Problems nur

ein etwas Spezielleres setzen. Nur zwei ganz in der Natur der Sache liegende Beschränkungen wollen wir da hinzunehmen. Es ist zunächst klar, daß nach Verlauf einer sehr langen Zeit für die Geschwindigkeitsrichtung eines Moleküls jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich sein wird. Handelt es sich daher bloß darum, die nach langer Zeit sich herstellende Geschwindigkeitsverteilung zu finden, so können wir annehmen, daß schon zu Anfang jede Geschwindigkeitsrichtung gleich wahrscheinlich gewesen sei. Es kann der allgemeinste Fall auf keine anderen schließlichen Zustandsverteilungen führen, als dieser speziellere. Dies sei die erste Beschränkung, welche wir machen wollen. Die zweite sei, daß die Geschwindigkeitsverteilung schon zu Anfang der Zeit eine gleichförmige gewesen sei. Ich muß da zunächst erklären, was ich unter einer gleichförmigen Geschwindigkeitsverteilung verstehe. Es wird für die Folge besser sein, statt der Geschwindigkeit die lebendige Kraft eines Moleküls einzuführen. Tun wir das gleich jetzt. Es sei x die lebendige Kraft eines unserer Gasmoleküle, so daß also $x = mv^2/2$ ist. R ist der gesamte Raum, in dem unser Gas eingeschlossen ist. Konstruieren wir in diesem Raume R einen kleineren (r will ich ihn nennen), dessen Gestalt ganz beliebig ist, dessen Volumen aber gleich eins sein soll. Wir setzen voraus, daß im Raume r noch immer sehr viele Moleküle sind, daß also seine Dimensionen groß gegen die mittlere Distanz zweier Nachbarmoleküle sind, worin keine Beschränkung liegt, da wir ja die Volumeinheit so groß wählen können, als wir wollen. Die Anzahl der Moleküle im Raume r , deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ liegt, will ich mit $f(x, t) dx$ bezeichnen. Dieselbe wird im allgemeinen davon abhängen, wo ich den Raum r im Raume R konstruiere. Es könnten sich z. B. rechts im Raume R die schnelleren, links die langsameren Moleküle befinden. Dann würde die Anzahl $f(x, t) dx$ verschieden ausfallen, je nachdem ich den Raum r rechts oder links im Raume R konstruiere. Wenn nun dies nicht der Fall ist, wenn die Anzahl $f(x, t) dx$ zu einer gegebenen Zeit vollkommen gleich ausfällt, wo immer ich den Raum r im Raume R konstruieren mag, so sage ich, die Verteilung der lebendigen Kraft sei zur Zeit t eine gleichförmige, d. h. also nichts anderes, als die Moleküle mit den

verschiedenen lebendigen Kräften sind gleichförmig untereinander gemischt. Es sind nicht rechts die schnelleren, links die langsameren, oder umgekehrt. Es ist da wieder klar, daß nach Verlauf einer sehr langen Zeit die Verteilung der lebendigen Kraft eine gleichförmige wird; denn dann ist ja jeder Ort im Gase gleichberechtigt. Die Wände stören nicht, da an ihnen die Moleküle wie elastische Kugeln reflektiert werden; also geradeso von ihnen zurücktreten, als ob der Raum jenseits der Wände von gleich beschaffenem Gase erfüllt wäre. Wir können daher wieder annehmen, daß schon zu Anfang der Zeit die Geschwindigkeitsverteilung eine gleichförmige war. Dies, sowie die gleiche Wahrscheinlichkeit jeder Geschwindigkeitsrichtung zu Anfang der Zeit sind die beiden beschränkenden Annahmen, unter denen wir zunächst das Problem behandeln werden. Es ist klar, daß diese beiden Bedingungen dann auch für alle folgende Zeit erfüllt sein werden, daß also der Zustand des Gases zur Zeit t durch die Funktion $f(x, t)$ vollständig bestimmt ist. Gegeben sei uns der Zustand unseres Gases zu Anfang der Zeit, also $f(x, 0)$. Gefunden soll werden der Zustand nach Verlauf einer beliebigen Zeit t , also $f(x, t)$. Der Weg, den wir da einschlagen werden, ist derselbe, den man in ähnlichen Fällen immer einschlägt. Wir berechnen zuerst, um wieviel sich die Funktion $f(x, t)$ während einer sehr kleinen Zeit τ verändert; hierdurch erhalten wir zunächst eine partielle Differentialgleichung für $f(x, t)$; dieselbe muß dann so integriert werden, daß f für $t = 0$ den gegebenen Wert $f(x, 0)$ annimmt. Wir haben also jetzt eine doppelte Aufgabe vor uns, erstens die Aufstellung der partiellen Differentialgleichung und zweitens deren Integration. Wenden wir uns zuerst an die erste Aufgabe. $f(x, t) dx$ ist die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ liegt. Solange ein Molekül mit keinem anderen zusammenstößt, behält es seine lebendige Kraft unverändert bei. Würden also keine Zusammenstöße erfolgen, so würde sich die Zahl der Moleküle, deren lebendige Kraft zwischen x und $x + dx$ liegt, also $f(x, t)$ gar nicht ändern; diese Funktion ändert sich bloß durch die Zusammenstöße. Wollen wir daher die Veränderung dieser Funktion während einer sehr kleinen Zeit τ erfahren, so müssen wir die Zusammen-

stöße während dieser Zeit der Betrachtung unterziehen. Betrachten wir einen Zusammenstoß, vor welchem die lebendige Kraft des einen der stoßenden Moleküle zwischen x und $x + dx$, die des anderen zwischen x' und $x' + dx'$ liegt. Dadurch ist natürlich die Natur des Zusammenstoßes noch keineswegs vollkommen bestimmt. Je nachdem derselbe ein zentraler oder mehr oder weniger schiefer ist, kann vielmehr die lebendige Kraft des einen der stoßenden Moleküle nach dem Zusammenstoße noch gar mannigfaltige Werte haben. Setzen wir voraus, dieselbe liege nach dem Zusammenstoße zwischen ξ und $\xi + d\xi$; dann ist aber die lebendige Kraft des zweiten Moleküls nach dem Zusammenstoße bestimmt. Bezeichnen wir letztere mit ξ' , so ist nämlich nach dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$(1) \quad x + x' = \xi + \xi';$$

die Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle vor dem Stoße ist gleich der Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle nach demselben. Wir können uns die Grenzen, zwischen denen die unseren Zusammenstoß charakterisierenden Variablen liegen, durch folgendes Schema darstellen:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vor dem Stoße} \dots x, x + dx \quad \overset{a}{x'}, x' + dx', \\ \text{nach ,, ,,} \dots \xi, \xi + d\xi. \end{array} \right. \quad \overset{b}{}$$

Unter der Rubrik a steht die lebendige Kraft des einen, unter der Rubrik b die der anderen der zusammenstoßenden Moleküle. Es fragt sich jetzt, wie viele Zusammenstöße geschehen während der Zeit τ in der Volumeinheit so, daß die lebendige Kraft der stoßenden Moleküle zwischen den durch das Schema (A) dargestellten Grenzen liegt. Die Anzahl dieser Zusammenstöße soll mit dn bezeichnet werden. Die Bestimmung dieser Zahl dn kann nur in recht weitläufiger Weise durch Betrachtung der relativen Geschwindigkeit beider Moleküle geschehen. Da diese Betrachtung außer ihrer Weitläufigkeit nicht die mindeste Schwierigkeit, aber auch kein besonderes Interesse hat, und ihr Resultat so einfach ist, daß man fast sagen möchte, es verstehe sich von selbst, so will ich mich begnügen, hier dieses Resultat mitzuteilen. Dasselbe besteht

in folgendem: Diese Anzahl dn ist erstens proportional der Zeit τ ; je länger diese Zeit τ ist, desto mehr Zusammenstöße der betrachteten Art erfolgen während derselben; natürlich nur, solange τ sehr klein ist, so daß sich der Zustand des Gases während τ nicht merklich ändert. Zweitens ist dn proportional der Größe $f(x, t) dx$; dies ist ja die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zwischen x und $x + dx$ liegt; je mehr solcher Moleküle sich in der Volumeinheit befinden, desto öfter stoßen sie in der betrachteten Weise zusammen. Drittens ist dn proportional $f(x', t) dx'$; denn was von dem einen der zusammenstoßenden Moleküle gilt, gilt natürlich auch vom anderen. Das Produkt dieser drei Größen muß noch multipliziert werden mit einem gewissen Proportionalitätsfaktor, von dem man leicht einsieht, daß er unendlich klein, wie $d\xi$ sein muß. Derselbe wird im allgemeinen von der Natur des Zusammenstoßes, also von den, den Zusammenstoß bestimmenden Größen x, x' und ξ abhängen. Wir wollen, um alles dies auszudrücken, den Proportionalitätsfaktor mit $d\xi \cdot \psi(x, x', \xi)$ bezeichnen, so daß wir also haben:

$$(2) \quad dn = \tau \cdot f(x, t) dx \cdot f(x', t) dx' \cdot d\xi \psi(x, x', \xi).$$

Dies ist das Resultat, zu dem die exakte Betrachtung des Vorganges des Zusammenstoßes führt, durch welche sich natürlich auch die Funktion ψ bestimmen läßt, sobald das Wirkungsgesetz der Moleküle gegeben ist; denn diese Funktion ψ hängt natürlich von dem Wirkungsgesetze ab. Da wir jedoch diese Funktion ψ nicht brauchen werden, so wäre ihre Bestimmung hier überflüssig. Wir wollen jetzt in dem durch die Gleichung (2) gegebenen Ausdrucke für dn die Größe x konstant lassen, nach x' und ξ aber über alle möglichen Werte dieser Größen integrieren, d. h. bezüglich ξ von Null bis $x + x'$, bezüglich x' von Null bis Unendlich. Das Resultat dieser Integrationen bezeichne ich mit $\int dn$; so ist also:

$$\int dn = \tau f(x, t) dx \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} f(x', t) \psi(x, x', \xi) dx' d\xi.$$

Da x für die beiden Integrationen als konstant zu be-

trachten ist, so können wir $f(x, t)$ auch unter die beiden Integralzeichen schreiben, und erhalten:

$$(3) \quad \int dn = \tau dx \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} f(x, t) f(x', t) \psi(x, x', \xi) dx' d\xi.^1)$$

Was ist nun diese Größe $\int dn$? Wir haben x konstant gelassen. Die lebendige Kraft eines Moleküls vor dem Stoße bleibt also zwischen den Grenzen x und $x + dx$ eingeschlossen. Bezüglich aller übrigen Variablen aber haben wir über alle möglichen Werte derselben integriert. Alle übrigen Variablen sind also keiner beschränkenden Bedingung mehr unterworfen. Es ist also $\int dn$ einfach die Zahl der Zusammenstöße, welche in der Volumeinheit während der Zeit τ so geschehen, daß vor denselben die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen x

1) Anstatt die Grenzen eines bestimmten Integrales wirklich hinzuschreiben, kann man dieselben noch in verschiedener Weise bestimmen, z. B. durch Ungleichungen. In dem bestimmten Integrale der Formel (3) ist x als Konstante zu betrachten. Die beiden Integrationsvariablen sind x' und ξ ; dieselben können nur positive Werte inklusive Null annehmen, denn es sind lebendige Kräfte, und zwar muß auch $x + x' - \xi \geq 0$ sein; denn $x + x' - \xi$ ist die lebendige Kraft des zweiten Moleküls nach dem Zusammenstoße; andererseits ist klar, daß alle positiven x' und ξ , für welche auch $x + x' - \xi$ positiv ausfällt, möglichen Zusammenstößen entsprechen; also innerhalb der Integrationsgrenzen liegen. Die drei Ungleichungen

$$(3a) \quad x' \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad x + x' - \xi \geq 0$$

definieren uns also ebenfalls die Integrationsgrenzen des Integrales der Formel (3) unzweideutig. Es empfiehlt sich diese Methode der Grenzbestimmung dadurch, daß sie die Rechnung oft bedeutend abkürzt. Eine dritte Methode der Grenzenbestimmung ist die geometrische. Man trägt die Integrationsvariablen auf rechtwinkligen Koordinatenachsen auf und bestimmt die Fläche, über welche zu integrieren ist. Tragen wir in unserem Falle auf der Abszissenachse OX' die Variable x' , auf der Ordinatenachse $O\xi$ die Variable ξ auf, so erhalten wir die Fläche, über welche zu integrieren ist, indem wir $OA = x$ machen, und die Gerade AB ins Unendliche und unter 45° gegen die Koordinatenachsen geneigt ziehen.

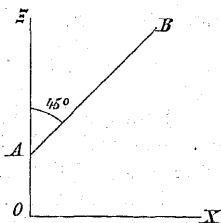


Fig. 1.

Das unendliche Trapez $X'OAB$ ist dann die Fläche, über welche die Integration zu erstrecken ist. Die letztere Art, die Grenzen darzustellen, zeichnet sich namentlich durch ihre große Anschaulichkeit aus.

und $x + dx$ liegt. Durch jeden dieser Zusammenstöße verliert ein Molekül diese lebendige Kraft, folglich wird durch jeden dieser Zusammenstöße die Zahl der Moleküle, deren lebendige Kraft zwischen x und $x + dx$ liegt, um eins vermindert.¹⁾ Im ganzen geschehen während der Zeit τ in der Volumeinheit $\int dn$ solcher Zusammenstöße. Im ganzen wird also jene Zahl um $\int dn$ vermindert. Die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ lag, ist aber, wie wir wissen, $f(x, t) dx$; während der Zeit τ wird sie infolge der eben betrachteten Zusammenstöße um $\int dn$ vermindert, wir müssen also $\int dn$ von $f(x, t) dx$ abziehen. Wir haben bis jetzt bloß die Zusammenstöße berücksichtigt, durch welche ein Molekül eine lebendige Kraft, die zwischen x und $x + dx$ liegt, verliert, durch welche also $f(x, t) dx$ vermindert wird. Wir müssen jetzt noch jene betrachten, durch welche ein Molekül eine solche lebendige Kraft gewinnt, durch welche also $f(x, t) dx$ vermehrt wird. Bezeichnen wir die Zahl dieser letzteren Zusammenstöße mit $\int dv$, so muß also $\int dv$ zu $f(x, t) dx$ addiert werden; in der Summe

$$(4) \quad f(x, t) dx - \int dn + \int dv$$

ist das erste Glied die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ lag; davon ist subtrahiert die Zahl der Moleküle, welche während der Zeit τ diese lebendige Kraft verlieren, addiert die Zahl der Moleküle, welche während der Zeit τ diese lebendige Kraft gewinnen. Das Resultat ist offenbar die Zahl der Moleküle, welche zur Zeit $t + \tau$ diese lebendige Kraft haben, also $f(x, t + \tau) dx$. Wir erhalten somit:

$$(5) \quad f(x, t + \tau) dx = f(x, t) dx - \int dn + \int dv.$$

¹⁾ Ausgenommen sind hiervon jene Zusammenstöße, bei denen auch nach dem Stoße die lebendige Kraft eines oder gar beider Moleküle zwischen x und $x + dx$ liegt. Man sieht jedoch leicht, daß die Zahl dieser Zusammenstöße, sowie auch derjenigen, vor denen die lebendige Kraft beider Moleküle zwischen x und $x + dx$ liegt, durch welche also gleichzeitig zwei Moleküle diese lebendige Kraft verlieren, unendlich klein höherer Ordnung ist, also vernachlässigt werden darf. Die ersteren Zusammenstöße, welche wir jetzt unberechtigter Weise subtrahieren, sind übrigens zudem auch in $\int dv$ enthalten, und werden daher ohnedies später wieder hinzuaddiert.

Es muß noch $f d\nu$ bestimmt werden. $f d\nu$ ist die Zahl der Zusammenstöße in der Volumeinheit während der Zeit τ , nach denen die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen x und $x + dx$ liegt. Wir müssen also jetzt für die lebendige Kraft vor dem Stoße eine andere Bezeichnung wählen. Sei also etwa $d\nu$ die Zahl der Zusammenstöße, welche in der Volumeinheit während der Zeit τ so geschehen, daß vor denselben die lebendige Kraft des einen Moleküls zwischen u und $u + du$, die des anderen zwischen v und $v + dv$ liegt, nach dem Stoße aber die des einen Moleküls zwischen x und $x + dx$ liegt. Die lebendige Kraft des anderen Moleküls nach dem Stoße ist natürlich hierdurch wieder bestimmt. $d\nu$ ist also die Zahl der Zusammenstöße, welche, entsprechend dem früher mit (A) bezeichneten Schema, durch folgendes Schema charakterisiert sind:

$$(B) \left\{ \begin{array}{ccc} & a & b \\ \text{vor dem Stoße} & \dots u, u + du & v, v + dv \\ \text{nach „ „} & \dots x, x + dx & \end{array} \right.$$

Man sieht sogleich, daß sich die jetzt betrachteten Zusammenstöße von den früher betrachteten, durch das Schema (A) dargestellten bloß darin unterscheiden, daß jetzt die lebendigen Kräfte vor und nach dem Zusammenstoße durch andere Buchstaben ausgedrückt sind. Die Anzahl $d\nu$ der jetzt betrachteten Zusammenstöße kann also aus der Zahl dn der früher betrachteten durch bloße Buchstabenvertauschung gefunden werden. Und zwar muß, wie man leicht (am besten durch Vergleichung der beiden Schemata) sieht, jetzt

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \text{ebenso} \\ u \text{ statt } x, \quad v \text{ statt } x', \quad x \text{ statt } \xi \\ du \text{ statt } dx, \quad dv \text{ statt } dx', \quad dx \text{ statt } d\xi \end{array} \right.$$

gesetzt werden. Die Anzahl der früher betrachteten Zusammenstöße hieß dn und war durch die Gleichung (2) gegeben. Nehmen wir darin die Buchstabentauschung (C) vor, so erhalten wir $d\nu$. Es ist also

$$d\nu = \tau \cdot f(u, t) du f(v, t) dv dx \cdot \psi(u, v, x).$$

Hier wollen wir wieder x konstant lassen; bezüglich u und v aber über alle möglichen Werte dieser Größen integrieren. Das Resultat

$$\tau dx \iint f(u, t) f(v, t) \psi(u, v, x) du dv$$

ist die Zahl der Zusammenstöße in der Volumeinheit während der Zeit τ , nach denen die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen x und $x + dx$ liegt (denn nach allen anderen Variablen wurde über alle möglichen Werte integriert), also die Zahl der Zusammenstöße, durch welche ein Molekül eine lebendige Kraft gewinnt, die zwischen x und $x + dx$ liegt; genau jene Zahl, welche wir schon früher mit $\int dv$ bezeichneten.¹⁾ Tun wir dies wieder, so erhalten wir also:

$$(6) \quad \int dv = \tau dx \iint f(u, t) f(v, t) \psi(u, v, x) du dv.$$

Es entsteht noch die Frage nach den Grenzen des Doppelintegrals.²⁾ Wenn $u > x$ ist, so kann v alle möglichen Werte

¹⁾ Man könnte glauben, daß wir hier die Zusammenstöße vergessen haben, nach denen die lebendige Kraft des zweiten der stoßenden Moleküle zwischen x und $x + dx$ liegt. Sei für einen solchen Stoß $u = u_1$, $v = v_1$. Da wir bezüglich u und v über alle möglichen Werte integriert haben, so haben wir auch den Stoß, für welchen $u = v_1$, $v = u_1$ ist, und nach dem Stoße die lebendige Kraft des ersten Moleküls zwischen x und $x + dx$ liegt, in das Integral aufgenommen; dies ist aber genau der Fall, den wir eben vergessen zu haben fürchteten. Denn welches wir als das erste, welches als das zweite Molekül auffassen, ist gleichgültig. Alle diese Zusammenstöße sind also in unserem Integrale schon mit berücksichtigt, nur tritt dabei u an die Stelle von v und umgekehrt. Wollte man noch ein zweites Integral beifügen, das die Stöße enthält, nach denen die lebendige Kraft des zweiten Moleküls zwischen x und $x + dx$ liegt, so müßte dafür im Doppelintegrale jede Ambe aus Werten von u und v ohne Permutation genommen, also nach v von Null (resp. $x - u$) bis u , nach u von Null bis Unendlich integriert werden. Nur jene Fälle, wo die lebendige Kraft beider Moleküle nach dem Stoße zwischen x und $x + dx$ liegt, haben wir nicht, wie es sein sollte, doppelt gezählt, was aber kein Fehler ist, da jene Zahl unendlich klein höherer Ordnung ist.

²⁾ Bestimmen wir die Grenzen nach der in der Anmerkung S. 325 angedeuteten Methode, so erhalten wir zur Grenzbestimmung die Ungleichungen:

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u + v - x \geq 0.$$

Führen wir jetzt beliebige neue Variablen p, q ein, so ist bekanntlich

$$dp dq = \Sigma \pm \frac{dp}{du} \cdot \frac{dq}{dv} du dv.$$

Im speziellen Falle, daß wir $p = u + v - x$, $q = u$ setzen, ist die Funktionaldeterminante gleich eins (sie ist natürlich positiv zu nehmen); ferner wird in diesem Falle

$$v = p + x - q.$$

von Null bis Unendlich durchlaufen; ist aber $u < x$, so kann v nicht kleiner als $x - u$ werden, weil sonst $u + v - x$, was ja die lebendige Kraft des zweiten Moleküls nach dem Stoße ist, negativ würde. Wenn also $u < x$ ist, so durchläuft v alle Werte von $x - u$ bis Unendlich. Es muß also schon das Integral nach u in zwei zerlegt werden. Eines von Null bis x , das andere von x bis Unendlich. Im ersten ist bezüglich v von $x - u$ bis Unendlich, im zweiten von Null bis Unendlich zu integrieren. Die Formel (6) geht also nach richtiger Grenzenbestimmung über in folgende:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int dv &= \tau dx \int_0^x \int_{x-u}^{\infty} f(u, t) f(v, t) \psi(u, v, x) du dv \\ &+ \tau dx \int_x^{\infty} \int_0^{\infty} f(u, t) f(v, t) \psi(u, v, x) du dv. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen jetzt statt v die neue Variable

$$(8) \quad w = u + v - x$$

einführen, so daß also $v = x + w - u$ ist. Da bei der Integration nach v sowohl u als auch x als konstant zu betrachten sind,

Es geht daher die Gleichung (6) über in

$$\int dv = \tau dx \iint f(q, t) \cdot f(p + x - q, t) \cdot \psi(q, p + x - q, x) dp dq.$$

Und die Ungleichungen, welche die Grenzen bestimmen, gehen in folgende über:

$$q \geq 0, \quad p + x - q \geq 0, \quad p \geq 0.$$

Nun können wir im Integrale die Variablen bezeichnen, wie wir wollen, wenn wir nur dieselbe Bezeichnungsveränderung auch in den Ungleichungen vornehmen. Verwechseln wir die Buchstaben p, q mit x', ξ , so erhalten wir also

$$\int dv = \tau dx \iint f(\xi, t) f(x + x' - \xi, t) \psi(\xi, x + x' - \xi, x) dx' d\xi.$$

Und die Grenzen sind bestimmt durch

$$x' \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad x + x' - \xi \geq 0;$$

also wieder durch die Ungleichungen (3a), die auch die Grenzen in der Formel (3) bestimmten. Wenn wir also zum Schlusse den Integralzeichen die Grenzen wieder anhängen, so stimmt die letzte Formel mit der Formel (11) des Textes, welche wir also hier auf einem kürzeren Wege gewonnen haben.

so folgt aus der Formel (8) $dw = dv$. Es ist also nach richtiger Grenzbestimmung der Integration bezüglich w

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \int dv &= \tau dx \int_0^x \int_0^\infty f(u, t) f(x+w-u, t) \psi(u, x+w-u, x) du dw \\ &+ \tau dx \int_x^\infty \int_{u-x}^\infty f(u, t) f(x+w-u, t) \psi(u, x+w-x, x) du dv. \end{aligned} \right.$$

Da diese Integrale eine einfache Summierung einer Anzahl von Stößen darstellen, so können wir die Integrationsordnung ohne weiteres umkehren. Dadurch geht das erste Doppelintegrale der Formel (9) über in folgendes:

$$(10) \int_0^\infty \int_0^x f(u, t) f(x+w-u, t) \psi(u, x+w-u, x) dw du.$$

Bei dem zweiten ist die Bestimmung der neuen Integrationsgrenzen nicht ganz so einfach. Wir wollen dieselben durch geometrische Betrachtungen gewinnen. Wir tragen auf der Abszissenachse OU die Werte von u , auf der Ordinatenachse OW die von w auf. x ist bei der Integration konstant. Machen wir $OA = x$ und ziehen durch A die beiden unbegrenzten

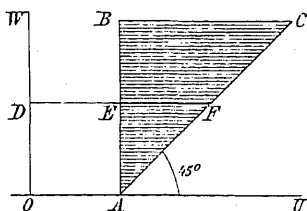


Fig. 2.

Geraden AB parallel OW , und AC unter 45° gegen die Koordinatenachsen geneigt. In dem zweiten Doppelintegrale der Formel (9) war nach u von x bis Unendliche, also vom Punkte A an bis ins Unendliche bezüglich w von $u - x$ bis Unendliche, also von der Geraden AC angefangen bis

ins Unendliche zu integrieren. Die gesamte Integration war also über das unbegrenzte Dreieck zu erstrecken, welches in der Figur schraffiert ist. Und nun ist es leicht, die Grenzen zu bestimmen, wenn zuerst nach u , dann nach w integriert wird. Für ein gegebenes w , also z. B. $w = OD$ ist bezüglich u von DE bis DF , also von x bis $x+w$ zu integrieren. Bezüglich w geht dann die Integration von Null bis Unendliche. Das zweite Doppelintegral der Formel (9) verwandelt sich also in

$$\int_0^{\infty} \int_x^{x+w} f(u, t) f(x+w-u, t) \psi(u, x+w-u, x) dw du.$$

Es vereinigt sich, wie man sieht, mit dem ersten in Formel (10) gegebenen, zu einem einzigen Doppelintegrale. (Das erste stellt nebenbei bemerkt die Integration über das unbegrenzte Rechteck $WOAB$ unserer Figur dar.) Die Wiedervereinigung beider Doppelintegrale liefert:

$$\int dv = \tau dx \int_0^{\infty} \int_0^{x+w} f(u, t) f(x+w-u, t) \psi(u, x+w-u, x) dw du.$$

Um diesen Ausdruck gleichförmiger mit dem durch Formel (3) gegebenen Ausdrücke für $\int dn$ zu machen, will ich statt w den Buchstaben x' , statt u den Buchstaben ξ schreiben. Bekanntlich kann man ja in einem bestimmten Integrale die Variablen, nach denen zu integrieren ist, bezeichnen wie man will, wenn nur die Grenzen dieselben bleiben. Dadurch ergibt sich

$$(11) \quad \int dv = \tau dx \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} f(\xi, t) f(x+x'-\xi, t) \psi(\xi, x+x'-\xi, x) dx' d\xi.$$

Bevor wir die beiden für $\int dn$ und $\int dv$ gefundenen Werte in die Gleichung (5) substituieren, wollen wir jene Gleichung noch etwas transformieren. Entwickeln wir ihre linke Seite nach dem Taylorschen Lehrsatz, so ergibt sich

$$f(x, t) dx + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \tau dx + A\tau^2 dx = f(x, t) dx - \int dn + \int dv,$$

wobei A irgend eine endliche Größe ist, und daraus

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\int dv}{\tau dx} - \frac{\int dn}{\tau dx} - A\tau,$$

also nach Substitution der Werte (3) und (11) für $\int dn$ und $\int dv$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} f(\xi, t) f(x+x'-\xi, t) \psi(\xi, x+x'-\xi, x) dx' d\xi \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} f(x, t) f(x', t) \psi(x, x', \xi) dx' d\xi - A\tau. \end{aligned}$$

Da alles bis auf $A\tau$ endlich ist, kann dasselbe vernachlässigt werden. Ferner können die beiden Integrale in eins

zusammengefaßt werden, da ja Integrationsvariablen und Grenzen in beiden dieselben sind. Dadurch ergibt sich:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \int_0^\infty \int_0^{x+x'} [f(\xi, t) f(x + x' - \xi, t) \psi(\xi, x + x' - \xi, x) \\ &\quad - f(x, t) f(x', t) \psi(x, x', \xi)] dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Dies ist die gesuchte partielle Differentialgleichung, welche das Gesetz der Veränderung der Funktion f bestimmt. Sie bedarf jedoch noch einer Transformation, zu welcher wir die beiden durch folgende für beliebige x, x' und ξ gültige Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften der Funktion ψ brauchen werden:

$$(13) \quad \psi(x, x', \xi) = \psi(x', x, x + x' - \xi),$$

$$(14) \quad \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) = \sqrt{\xi (x + x' - \xi)} \psi(\xi, x + x' - \xi, x),$$

wobei selbstverständlich alle Wurzeln mit dem positiven Zeichen zu nehmen sind; die ψ sind auch wesentlich positive Größen. Die erste dieser beiden Gleichungen läßt sich leicht beweisen. Sei dn' die Zahl der Zusammenstöße, welche in der Volumeneinheit während der schon früher mit τ bezeichneten sehr kleinen Zeit so geschehen, daß vor denselben die lebendige Kraft des ersten Moleküls zwischen x' und $x' + dx'$, die des zweiten zwischen x und $x + dx$, und nach demselben die des ersten Moleküls zwischen $x + x' - \xi - d\xi$ und $x + x' - \xi$ liegt, also der Stöße, welche durch das Schema

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} & a & b \\ \text{vor dem Stoße} \dots & x', x' + dx' & x, x + dx \\ \text{nach „ „ „ „} & \dots x + x' - \xi - d\xi, x + x' - \xi & \end{array} \right.$$

charakterisiert sind. Dann kann dn' wieder durch bloße Buchstabenvertauschung aus der früher mit dn bezeichneten Größe gefunden werden. Und zwar zeigt die Vergleichung der Schemata (D) und (A), daß man

$$\begin{aligned} x' \text{ statt } x, \quad x \text{ statt } x', \quad x + x' - \xi - d\xi \text{ statt } \xi, \\ dx' \text{ statt } dx, \quad dx \text{ statt } dx' \end{aligned}$$

schreiben muß. $d\xi$ bleibt. Nimmt man diese Vertauschungen in der Gleichung (2) vor, so ergibt sich:

$$(15) \quad dn' = \tau f(x', t) dx' \cdot f(x, t) dx \cdot d\xi \psi(x', x, x + x' - \xi - d\xi).$$

Wenn aber die lebendige Kraft des einen Moleküls nach dem Stoße zwischen $x + x' - \xi - d\xi$ und $x + x' - \xi$ liegt, so liegt die des anderen genau zwischen ξ und $\xi + d\xi$. Statt des Schemas (D) könnten wir unsere Zusammenstöße also auch durch folgendes

	a	b
vor dem Stoße . . .	$x', x' + dx'$	$x, x + dx$
nach „ „ . . .		$\xi, \xi + d\xi$

charakterisieren. Und jetzt sieht man, daß es ganz dieselben Zusammenstöße, wie die durch das Schema (A) charakterisierten sind. Denn, welches Molekül ich als das erste, welches als das zweite bezeichne (welches in die Rubrik a , welches in die Rubrik b eintrage) ist offenbar gleichgültig. Da jene beiden Gattungen von Zusammenstößen gar nicht verschieden sind, so muß also auch ihre Anzahl gleich, folglich $dn = dn'$ sein. Setzen wir die beiden Werte (2) und (15) wirklich gleich und streichen die beiden gemeinsamen Faktoren, so ergibt sich

$$\psi(x, x', \xi) = \psi(x', x, x + x' - \xi - d\xi).$$

Hier kann das Differential $d\xi$ neben dem Endlichen weggelassen werden, da ja ψ unmöglich diskontinuierlich sein kann, und wir erhalten somit die Gleichung (13). Schwieriger ist der Beweis der Gleichung (14). Der Beweis dieser Gleichung wurde zuerst, freilich in etwas anderer Form, von Maxwell geliefert; dieselbe wurde dann von mir bedeutend verallgemeinert, wobei sie sich als spezieller Fall des Jacobischen Prinzips des letzten Multiplikators erwies; ich glaube, mich daher mit dem Beweise dieser Gleichung hier nicht aufhalten zu sollen, dieselbe vielmehr als etwas Bekanntes voraussetzen zu können. Ich bemerke nur noch, daß bei ihrem Beweise vorausgesetzt wird, daß die zwischen zwei materiellen Punkten wirksame Kraft Funktion ihrer Entfernung ist, nach der Richtung ihrer Verbindungslinie wirkt, und Wirkung und Gegenwirkung gleich sind. Diese Voraussetzungen sind also zur Gültigkeit der folgenden Rechnungen notwendig. Mit Rücksicht auf die Gleichung (14) kann aus der eckigen Klammer der Gleichung (12) auch ψ als gemeinsamer Faktor herausgehoben werden, und es ergibt sich:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ &\quad \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Dies ist die Fundamentalgleichung für die Veränderung der Funktion $f(x, t)$. Ich bemerke nochmal, daß die Wurzeln alle positiv zu nehmen sind, sowie auch ψ und die f wesentlich positive Größen sind. Setzen wir für einen Augenblick

$$(16a) \quad f(x, t) = C\sqrt{x} e^{-hx},$$

wobei C und h Konstanten sind, so daß also

$$\begin{aligned} f(x', t) &= C\sqrt{x'} e^{-hx'}, & f(\xi, t) &= C\sqrt{\xi} e^{-h\xi}, \\ f(x+x'-\xi, t) &= C\sqrt{x+x'-\xi} e^{-h(x+x'-\xi)} \end{aligned}$$

wird, so verschwindet der Ausdruck in der eckigen Klammer der Gleichung (16); es wird also $\partial f(x, t)/\partial t = 0$. Dies ist nichts anderes, als der Beweis Maxwells übertragen in unsere gegenwärtige Bezeichnungsweise. Ist die Zustandsverteilung zu irgend einer Zeit durch die Formel (16a) bestimmt, so ist $\partial f(x, t)/\partial t = 0$, d. h. dieselbe verändert sich im Verlaufe der Zeit nicht weiter. Dies und nichts anderes ist von Maxwell bewiesen worden. Wir wollen aber jetzt das Problem viel allgemeiner auffassen. Wir wollen annehmen, die Verteilung der lebendigen Kraft sei zu Anfang der Zeit eine ganz beliebige gewesen, und wollen uns fragen, wie verändert sich dieselbe im Verlaufe der Zeit. Ihre Veränderung ist bestimmt durch die partielle Differentialgleichung (16). Es kann diese partielle Differentialgleichung, wie wir später sehen werden, in ein System gewöhnlicher Differentialgleichung verwandelt werden, wenn man an die Stelle des Doppelintegrals eine Summe sehr vieler Glieder setzt. Es ist ja ein solches Doppelintegral bekanntlich nichts anderes, als eine abgekürzte Bezeichnung für eine Summe unendlich vieler Glieder. An dem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen werden dann alle Rechnungsoperationen viel anschaulicher. Ich will jedoch absichtlich diese Vertauschung der Summation mit einer Integration vorerst nicht vornehmen, damit es nicht scheine, als sei dieselbe zum Beweise unserer Sätze notwendig. Dieser Beweis

kann geführt werden ganz ohne daß man die Symbolik der Integralrechnung verläßt. Nur zur Veranschaulichung derselben werden wir zum Schlusse die Summenformeln benützen. Wir wollen zunächst den Beweis eines Satzes liefern, welcher die Grundlage unserer ganzen gegenwärtigen Untersuchung bildet, des Satzes nämlich, daß die Größe

$$(17) \quad E = \int_0^{\infty} f(x, t) \left\{ \log \left[\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \right] - 1 \right\} dx$$

niemals zunehmen kann, wenn die in dem bestimmten Integrale vorkommende Funktion $f(x, t)$ der partiellen Differentialgleichung (16) genügt. Auf der rechten Seite der Formel (17) ist bezüglich x von Null bis Unendlich zu integrieren. Es fällt also x aus der Größe E ganz heraus. E ist nur eine Funktion von t . Da t in den Grenzen des Integrals nicht vorkommt, so erhalten wir den Differentialquotienten dE/dt , indem wir die Größe unter dem Integralzeichen partiell nach t differenzieren, x dabei konstant lassend. Diese Differentiation, welche ungemein leicht auszuführen ist, liefert

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^{\infty} \log \left[\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \right] \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \cdot dx.$$

Wir nehmen an, daß $f(x, t)$ die Gleichung (16) befriedigt. Substituieren wir aus dieser Gleichung den Wert für $\partial f(x, t)/\partial t$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \int_0^{\infty} \log \left[\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \right] dx \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ & \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx' d\xi. \end{aligned}$$

Da bei der Integration nach x' und ξ die Größe x als konstant zu betrachten ist, so können wir den Logarithmus auch unter die beiden folgenden Integralzeichen setzen und schreiben

$$(18) \quad \left\{ \frac{dE}{dt} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \right. \\ \left. \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx dx' d\xi. \right.$$

Die wahre Bedeutung der Transformationen, welche wir jetzt mit diesem Ausdrucke vornehmen werden, wird freilich erst in ein helles Licht treten, wenn wir die Integrale durch Summenformeln ersetzen werden. Es wird sich da zeigen, daß alle folgenden Transformationen des Integrals wie natürlich nichts anderes als Veränderungen der Summationsordnung sind; es wird dann auch klar werden, warum gerade diese Änderungen der Summationsordnung notwendig sind. Jetzt aber will ich hierauf nicht näher eingehen, sondern so rasch als möglich zum Beweise des Satzes zu gelangen suchen, daß in der Tat E nicht zunehmen kann. Wir können in der Formel (18) zuerst nach x' und dann nach x integrieren¹⁾; dadurch erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx' dx d\xi,$$

oder wenn wir für $\psi(x, x', \xi)$ seinen Wert aus der Gleichung (13) substituieren,

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{x x'} \psi(x' x, x+x'-\xi) dx' dx d\xi.$$

¹⁾ Daß die Vertauschung der Integrationsordnung unbedingt gestattet ist, folgt schon daraus, daß wir die Gleichungen (20), (22) und (23) genau in derselben Weise wie die Gleichung (18) direkt hätten ableiten können; wir schlugen den Weg der Transformation bloß ein, um die Schlüsse, durch welche wir die Gleichung (18) erhielten, nicht viermal wiederholen zu müssen. Auch dadurch, daß die früher angewandte Differentiation unter dem Integralzeichen unerlaubt wird, indem der Integrand diskontinuierlich wird, erleidet der im Texte geführte Beweis keine Störung, wie man nachweisen kann, indem man aus dem gesamten Raume, über den in den Formeln (18), (20), (22) und (23) die Integrationen zu erstrecken sind, gleichzeitig um alle Stellen, für welche eine der Größen s , s' , σ oder σ' Null oder unendlich wird, sehr dünne flächenartig ausgedehnte Streifen ausschließt. Von der Gesamtheit der auf diese Art aus $4(dE/dt)$ ausgeschlossenen Glieder läßt sich dann mittels der ergänzten Taylorschen Reihe beweisen, daß ihre Summe nicht positiv sein kann, wenn keine dieser Größen unendlich nahe unendlich viele Diskontinuitätsstellen hat.

Wir lassen jetzt die Variablen x' und x unverändert; aber statt ξ führen wir die neue Variable $\xi' = x + x' - \xi$ ein, so daß also $\xi = x + x' - \xi'$, $d\xi = -d\xi'$ wird. Dann ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(x+x'-\xi', t)}{\sqrt{x+x'-\xi'}} \frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{x x'} \psi(x', x, \xi') dx' dx d\xi',$$

oder, wenn man Zeichen und Grenzen des ersten Integrals umkehrt:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} \frac{f(x+x'-\xi', t)}{\sqrt{x+x'-\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ &\times \sqrt{x x'} \psi(x', x, \xi') dx' dx d\xi'. \end{aligned} \right.$$

Dieses dreifache Integral ist jetzt ganz so gebaut, wie das der Formel (18); nur sind die Variablen, nach denen integriert werden soll, anders bezeichnet. Allein das ist nur ein scheinbarer Unterschied. Die Integrationsvariablen eines bestimmten Integrals kann man ja bezeichnen wie man will, solange nur die Grenzen dieselben bleiben. Wir können daher auch in der Formel (19) statt ξ' wieder ξ schreiben, und auch die Buchstaben x und x' miteinander vertauschen. Dadurch ergibt sich

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ &\times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Über die Identität der beiden Integrale (19) und (20) kann kein Zweifel bestehen, da sie sich bloß durch die Buchstaben unterscheiden, mit denen die Integrationsvariablen bezeichnet sind. Einen dritten Ausdruck für dE/dt erhalten wir in folgender Weise. Wir substituieren in der Formel (18) statt $\sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi)$ seinen Wert aus der Gleichung (14). Dadurch erhalten wir zunächst:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{\xi(x+x'-\xi)} \psi(\xi, x+x'-\xi, x) dx dx' d\xi.$$

Wir wollen jetzt für x' eine neue Variable einführen. Da müssen wir uns die Integration nach x' zuerst, also vor der nach ξ ausgeführten denken. Wir brauchen da bloß das Doppelintegral

$$\int_0^{\infty} \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{\xi(x+x'-\xi)} \psi(\xi, x+x'-\xi, x) dx' d\xi$$

zu transformieren. Dasselbe braucht dann nur noch mit dx multipliziert und nach x von Null bis Unendlich integriert zu werden, um dE/dt zu erhalten. In einem solchen Doppelintegrale haben wir bereits früher die Integrationsordnung umgekehrt. Durch ganz dieselben Betrachtungen, wie damals, ergibt sich, daß es in eine Summe zweier Integrale zerfällt, nämlich:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{\xi(x+x'-\xi)} \psi(\xi, x+x'-\xi, x) d\xi dx' \\ + \int_x^{\infty} \int_{\xi-x}^{\infty} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{\xi(x+x'-\xi)} \psi(\xi, x+x'-\xi, x) d\xi dx'.$$

Führen wir jetzt in diese beiden Integrale für x' die Variable $\xi' = x + x' - \xi$ ein, so erhalten wir nach richtiger Grenzenbestimmung:

$$\int_0^{\infty} \int_{x-\xi}^{\infty} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(\xi + \xi' - x, t)}{\sqrt{\xi + \xi' - x}} \right] \\ \times \sqrt{\xi \xi'} \psi(\xi, \xi', x) d\xi d\xi' \\ + \int_x^{\infty} \int_0^{\infty} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(\xi + \xi' - x, t)}{\sqrt{\xi + \xi' - x}} \right] \\ \times \sqrt{\xi \xi'} \psi(\xi, \xi', x) d\xi d\xi'.$$

Diese beiden bestimmten Integrale sind noch bezüglich x von Null bis Unendlich zu integrieren, so daß man also erhält:

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^\infty \int_0^x \int_{x-\xi}^\infty \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(\xi + \xi' - x, t)}{\sqrt{\xi + \xi' - x}} \right] \\ &\quad \times \sqrt{\xi \xi'} \psi(\xi, \xi', x) dx d\xi d\xi' \\ &+ \int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(\xi + \xi' - x, t)}{\sqrt{\xi + \xi' - x}} \right] \\ &\quad \times \sqrt{\xi \xi'} \psi(\xi, \xi', x) dx d\xi d\xi'. \end{aligned} \right.$$

Hier müssen wir jetzt die Integrationsordnung so verändern, daß zuerst nach x , dann nach ξ' , zuletzt nach ξ integriert wird.¹⁾ Da ist es behufs der Grenzenbestimmung wohl am

¹⁾ Alle im Text geführten etwas weitläufigen Grenzenbestimmungen vereinfachen sich außerordentlich, wenn man die Grenzen nach der bereits in der Anmerkung S. 325 gegebenen Weise definiert. Dann sieht die Formel (18) so aus:

$$(18a) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \iiint \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x + x' - \xi, t)}{\sqrt{x + x' - \xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ &\quad \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Zu integrieren ist über alle Werte, welche folgenden Ungleichungen genügen:

$$(18b) \quad x \geq 0, \quad x' \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad x + x' - \xi \geq 0.$$

Die beiden Formeln (18a) und (18b) besagen jetzt ganz dasselbe, wie früher das eine bestimmte Integral (18), und ich bemerke noch, daß jetzt die Integrationsordnung ganz willkürlich ist, ja es ist nicht einmal notwendig, daß überhaupt zuerst nach der einen, dann der anderen Variablen integriert wird, wenn nur über alle Werte integriert wird, die den Ungleichungen (18b) genügen. Führen wir nun irgendwelche neuen Variablen u, v, w ein, so ist bekanntlich

$$du dv dw = \Sigma \pm \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot dx dy dz.$$

Wollen wir nun die Formel (20) des Textes erhalten, so brauchen wir nur zu setzen

$$u = x', \quad v = x, \quad w = x + x' - \xi.$$

Dann wird die Funktionaldeterminante gleich eins, und es ist klar, daß sie mit positivem Zeichen zu nehmen ist, wenn wir immer von den kleineren zu den größeren Werten der Variablen integrieren, also die Differentiale positiv betrachten. Es ist also

$$du dv dw = dx dx' d\xi$$

besten, sich den Integrationsraum geometrisch zu versinnlichen. Da das Integral ein dreifaches ist, so müssen wir hierzu den

und die Gleichung (18a) geht über in

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \log \frac{f(v, t)}{\sqrt{v}} \cdot \left[\frac{f(u+v-w, t) f(w, t)}{\sqrt{u+v-w} \sqrt{w}} - \frac{f(v, t) f(u, t)}{\sqrt{v} \sqrt{u}} \right] \\ \times \sqrt{uv} \psi(v, u, u+v-w) du dv dw.$$

Die Ungleichungen (18b) aber, welche die Grenzen bestimmen, verwandeln sich in

$$v \geq 0, \quad u \geq 0, \quad u+v-w \geq 0, \quad w \geq 0.$$

Nun können wir wieder die Buchstaben u, v, w mit x, x' und ξ vertauschen (an der Bezeichnung der Integrationsvariablen liegt ja nichts) und erhalten für das Integral

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \log \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \cdot \left[\frac{f(x+x'-\xi, t) f(\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi} \sqrt{\xi}} - \frac{f(x, t) f(x', t)}{\sqrt{x} \sqrt{x'}} \right] \\ \times \sqrt{x x'} \psi(x', x, x+x'-\xi) dx dx' d\xi$$

und für die Ungleichungen, die die Grenzen bestimmen

$$(20b) \quad x \geq 0, \quad x' \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad x+x'-\xi \geq 0.$$

Ersetzen wir jetzt schließlich $\psi(x', x, x+x'-\xi)$ nach Gleichung (13) durch $\psi(x, x', \xi)$, so erhalten wir

$$(20a) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \iiint \log \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \cdot \left[\frac{f(\xi, t) f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{\xi} \sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t) f(x', t)}{\sqrt{x} \sqrt{x'}} \right] \\ &\quad \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Die Ungleichungen (20b) sind identisch mit den Gleichungen (18a). Vereinigen wir daher die beiden Formeln (20a) und (20b) in eine einzige, indem wir uns wieder zuerst nach ξ , dann nach x' , zuletzt nach x integriert denken und die Integrationsgrenzen jedesmal den Integralzeichen beisetzen, so erhalten wir die gewünschte Formel (20) des Textes.

Wollen wir die Formel (22) des Textes gewinnen, so setzen wir

$$u = \xi, \quad v = x + x' - \xi, \quad w = x.$$

Die Determinante ist wieder eins, daher

$$du dv dw = dx dx' d\xi.$$

Ferner ist

$$x' = u + v - w.$$

Die Gleichung (18a) lautet also nach Einführung dieser Variablen

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \log \frac{f(w, t)}{\sqrt{w}} \cdot \left[\frac{f(u, t) f(v, t)}{\sqrt{u} \sqrt{v}} - \frac{f(w, t) f(u+v-w, t)}{\sqrt{w} \sqrt{u+v-w}} \right] \\ \times \sqrt{w(u+v-w)} \psi(w, u+v-w, u) du dv dw$$

Raum zu Hilfe nehmen. Ziehen wir uns drei rechtwinklige Koordinatenachsen OX , $O\xi$, $O\xi'$ im Raume, und tragen auf denselben die Werte von x , ξ , ξ' auf. Ferner ziehen wir in der Ebene $XO\xi$ die Gerade OA , welche mit OX und $O\xi$ Winkel von 45° macht und ebenso in der Ebene $\xi O\xi'$ die Gerade OB . Betrachten wir jetzt das erste in der Formel (21) erscheinende dreifache Integral. In demselben ist bezüglich ξ'

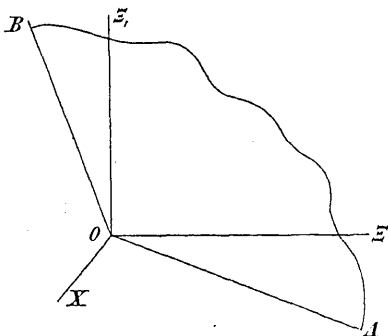


Fig. 1.

von $x - \xi$ bis Unendlich, also von einem Punkte der Ebene AOB bis ins Unendliche hinauf zu integrieren; bezüglich ξ ist von Null bis x , also von Null bis zu einem Punkte der

und die Ungleichungen (18b) lauten

$$w \geq 0, \quad u + v - w \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Vertauschen wir jetzt, ganz wie früher die Buchstaben u , v , w mit x , x' , ξ , so erhalten wir:

$$(22a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \iiint \log \frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \cdot \left[\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} - \frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x + x' - \xi, t)}{\sqrt{x + x' - \xi}} \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\xi(x + x' - \xi)} \psi(\xi, x + x' - \xi, x) dx dx' d\xi \right] \end{aligned} \right.$$

$$(22b) \quad x \geq 0, \quad x' \geq 0, \quad x + x' - \xi \geq 0, \quad \xi \geq 0.$$

Man sieht sofort, daß wir in der Gleichung (22a) wieder bloß von der Formel (14) Gebrauch zu machen und die Grenzen wirklich anzuschreiben brauchen, um die Formel (22) des Textes zu erhalten. Man sieht also, daß, wenn man von der Methode der Grenzenbestimmung durch Ungleichungen Gebrauch macht, die Transformationen fast ohne alle Rechnung gemacht werden können, welche im Texte weitläufige Rechnungen erfordern. Wenn ich trotzdem im Texte von der weitläufigeren Methode Gebrauch machte, so geschah es bloß, weil diese Art der Grenzenbestimmung durch Ungleichungen eine etwas ungewöhnlichere ist. Ich bemerke hier noch, daß für E auch folgender Ausdruck gesetzt werden kann:

$$(17a) \quad E_1 = \int_0^\infty f(x, t) \log \left[\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \right] dx.$$

Geraden OA zu integrieren. Der Integrationsraum des ersten Integrals ist also der ganze Teil des Raumes, welcher vertikal über AOB steht (wofern man sich die Achse $O\xi'$ vertikal denkt). Ebenso findet man, daß der Integrationsraum des zweiten Integrals der Formel (21) jener Teil des Raumes ist, der vertikal über dem Dreiecke $AO\xi$ steht. (Jenes Dreieck von O gegen A und gegen ξ zu ins Unendliche erstreckt gedacht.) Beide Integrale zusammen repräsentieren uns also eine Integration, die über die körperliche Ecke zu erstrecken ist, die von den vier Figuren AOB , $AO\xi$, $BO\xi'$ und $\xi O\xi'$ begrenzt wird. Und nun ist es leicht, die Grenzen zu bestimmen, wenn zuerst nach x integriert wird. Bei konstantem ξ und ξ' bleiben wir in jener körperlichen Ecke, wenn x von Null bis $\xi + \xi'$ wächst. Null und $\xi + \xi'$ sind also die Integrationsgrenzen für x . Bezüglich ξ und ξ' aber geht die Integration von Null bis Unendlich. Bei dieser neuen Anordnung der Integrationsordnung vereinigen sich also wieder beide Integrale in eines und man hat

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{\xi+\xi'} \log \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(\xi', t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(\xi + \xi' - x, t)}{\sqrt{\xi + \xi' - x}} \right] \\ \times \sqrt{\xi \xi'} \psi(\xi, \xi', x) d\xi d\xi' dx.$$

In diesem bestimmten Integrale ist es wieder gleichgültig, mit welchen Buchstaben wir die Variablen, nach denen zu integrieren ist, bezeichnen. Wir können daher die beiden Variablen ξ und ξ' auch mit den lateinischen Buchstaben x und x' bezeichnen, die Variable x aber mit dem Buchstaben ξ . Tun

Dieser Ausdruck ist nämlich bloß um

$$\int_0^\infty f(x, t) dx,$$

also um die Gesamtzahl der Moleküle in der Volumeinheit größer, als der im Texte für E gegebene. Und da diese Gesamtzahl konstant ist, so unterscheidet er sich nur durch eine Konstante davon, kann also wie der im Texte gegebene nicht zunehmen. Eine andere Transformationsmethode der Integrale besteht darin, daß man der Funktion $\psi(x, x', \xi)$ den Wert Null beilegt, so oft $x + x' - \xi < 0$ ist, und dann alle Integrationen von Null bis Unendlich erstreckt.

wir dies und setzen noch vor das ganze Integral das negative Zeichen, während wir gleichzeitig die Zeichen in der eckigen Klammer umkehren, so ergibt sich

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \cdot \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \\ & \times \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Wenden wir auf diese Formel wieder ganz dieselbe Transformation an, durch welche wir aus der Gleichung (18) die Gleichung (20) erhielten, so gewinnen wir noch einen vierten Ausdruck für dE/dt . Ich glaube, diese Transformation hier nicht wirklich ausführen zu sollen; man übersieht leicht, daß ihr Resultat folgendes ist:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} \cdot \left[\frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} \right. \\ & \left. - \frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} \right] \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx dx' d\xi. \end{aligned} \right.$$

Ich will jetzt die vier Ausdrücke, die wir für dE/dt erhielten, noch einmal übersichtlich zusammenstellen, wobei ich mich aber folgender Abkürzungen bediene. Ich setze:

$$\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} = s, \quad \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} = s', \quad \frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} = \sigma, \quad \frac{f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} = \sigma',$$

$$\sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) = r.$$

Dadurch gehen die vier Gleichungen (18), (20), (22) und (23) über in

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log s \cdot (\sigma \sigma' - s s') r dx dx' d\xi$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log s' \cdot (\sigma \sigma' - s s') r dx dx' d\xi$$

$$\frac{dE}{dt} = - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \sigma \cdot (\sigma \sigma' - s s') r dx dx' d\xi$$

$$\frac{dE}{dt} = - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \sigma' \cdot (\sigma \sigma' - s s') r dx dx' d\xi.$$

Wir erhalten auch dE/dt , wenn wir alle die vier Ausdrücke addieren und die Summe durch 4 dividieren. Da rechts lauter bestimmte Integrale mit denselben Integrationsvariablen und denselben Grenzen stehen, so können wir die Integralzeichen vor die Summen schreiben und brauchen bloß die Größen unter den Integralzeichen zu addieren. Heben wir da noch den gemeinsamen Faktor heraus, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} (\log s + \log s' - \log \sigma - \log \sigma') (\sigma \sigma' - s s') r dx dx' d\xi,$$

oder nach Zusammenziehen der Summe der Logarithmen in den Logarithmus eines Produkte.

$$(24) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \left(\frac{s s'}{\sigma \sigma'} \right) \cdot (\sigma \sigma' - s s') r dx dx' d\xi.$$

Wenn nun nicht für alle Wertekombinationen der in den s und σ enthaltenen Variablen

$$(25) \quad s s' = \sigma \sigma'$$

ist, so muß für einige entweder $s s' > \sigma \sigma'$ oder $s s' < \sigma \sigma'$ sein. Im ersten Falle ist $\log (s s' / \sigma \sigma')$ positiv, $\sigma \sigma' - s s'$ aber negativ, im zweiten umgekehrt; in beiden Fällen ist daher das Produkt

$$\log \left(\frac{s s'}{\sigma \sigma'} \right) \cdot (\sigma \sigma' - s s')$$

negativ. Nun ist aber die Größe r wesentlich positiv, da ψ immer positiv ist, und auch die Quadratwurzeln mit positivem Zeichen zu nehmen sind. Es ist also die Größe unter dem Integralzeichen, folglich auch das ganze Integral notwendig negativ. Es muß also E notwendig abnehmen. Nur wenn allgemein die Gleichung (25) gilt, kann E konstant bleiben. Da nun, wie wir später sehen werden, E auch nicht negativ unendlich werden kann, so muß es sich mit wachsender Zeit immer mehr einem Minimum nähern, für welches $dE/dt = 0$ wird, daher die

Gleichung (25) besteht. Diese Gleichung lautet, wenn wir für s , s' , σ und σ' wieder ihre Werte substituieren:

$$\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{f(x', t)}{\sqrt{x'}} = \frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi}} \cdot \frac{f(x + x' - \xi, t)}{\sqrt{x + x' - \xi}}.$$

Damit diese Gleichung für alle Werte der Variablen x , x' und ξ bestehe, muß, wie sich leicht zeigen läßt,

$$f(x, t) = C\sqrt{x}e^{-hx}$$

sein. Es ist somit streng bewiesen, daß, wie immer die Verteilung der lebendigen Kraft zu Anfang der Zeit gewesen sein mag, sie sich nach Verlauf einer sehr langen Zeit immer notwendig der von Maxwell gefundenen nähern muß. Das bisher Vorgenommene ist nun allerdings nichts weiter als ein mathematischer Kunstgriff, um einen Satz streng zu beweisen, dessen exakter Beweis bisher nicht gelungen ist. Es gewinnt aber sehr an Bedeutung durch seine Anwendbarkeit auf die Theorie mehratomiger Gasmoleküle. Dort läßt sich wieder von einer gewissen Größe B beweisen, daß dieselbe infolge der Molekularbewegung nur abnehmen oder im Grenzfalle konstant bleiben kann. Es läßt sich also der Beweis liefern, daß bei der Atombewegung von Systemen beliebig vieler materieller Punkte immer eine gewisse Größe existiert, welche infolge jener Atombewegung nicht zunehmen kann, und diese Größe stimmt bis auf einen konstanten Faktor genau mit der von mir in der Abhandlung „Analyt. Beweis der 2. Haupts. usw.“, Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 63,¹⁾ für das bekannte Integral $\int (dQ/T)$ gefundenen Größe überein. Es ist also hiermit ein analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes auf einem ganz anderen Wege angebahnt, als derselbe bisher versucht wurde. Bisher suchte man nämlich immer zu beweisen, daß $\int (dQ/T) = 0$ ist für den umkehrbaren Kreisprozeß, womit noch immer nicht analytisch bewiesen ist, daß es für den nicht umkehrbaren Kreisprozeß, der doch allein in der Natur vorkommt, immer negativ ist, während der umkehrbare Kreisprozeß bloß ein Ideal ist, dem man sich mehr oder weniger nähern, es aber nicht vollkommen erreichen kann. Hier dagegen gelangen wir direkt zum Satze, daß $\int (dQ/T)$ im allgemeinen negativ

¹⁾ Nr. 20 dieses Bandes.

und nur für den Grenzfall gleich Null ist, der natürlich der umkehrbare Kreisprozeß ist (weil für ihn nicht, wenn man ihn in dem einen und anderen Sinne durchläuft, $\int (dQ/T)$ immer negativ sein kann).

II. Ersetzung der Integrale durch Summen.

Ich will mich hier nicht länger mit Betrachtung der Beziehung der Größe E zum Integrale $\int (dQ/T)$ aufhalten, sondern jetzt zeigen, wie alles bisher Vorgetragene viel klarer und anschaulicher wird, wenn wir die partielle Differentialgleichung (16) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen verwandeln. Es geschieht dies, indem wir das in jener partiellen Differentialgleichung erscheinende Doppelintegral durch eine Summe ersetzen nach der bekannten Formel

$$\int_0^{\infty} f(x, t) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon [f(\epsilon, t) + f(2\epsilon, t) + f(3\epsilon, t) + \dots + f(p\epsilon, t)]$$

für $\lim \epsilon = 0$, $\lim p\epsilon = \infty$.

Wir wollen beide Integrale der Formel (16) durch eine derartige Summe ersetzen, und zuerst ϵ und p endlich annehmen. Dann verwandelt sich die Gleichung (16) in eine Differentialgleichung mit folgenden Unbekannten:

$$f(\epsilon, t), f(2\epsilon, t), \dots, f(p\epsilon, t).$$

Jede dieser Unbekannten ist nur mehr Funktion der Zeit. Die Zahl der Unbekannten ist p . Allein die Gleichung (16) muß für jedes x gelten. Setzen wir darin der Reihe nach

$$x = \epsilon, x = 2\epsilon, \dots, x = p\epsilon,$$

so erhalten wir im ganzen p Differentialgleichungen zwischen unseren p Unbekannten; und da die Unbekannten nur Funktionen der Zeit sind, so sind die Differentialgleichungen keine partiellen. Dieses System von p gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen p Unbekannten lösen wir zuerst auf und untersuchen dann, welcher Grenze sich die Lösung nähert, wenn ϵ unendlich klein, $p\epsilon$ unendlich groß wird. Jene Grenze ist dann die Lösung der partiellen Differentialgleichung. Die Substitution der Summenformel in die partielle Differential-

gleichung hat gar keine Schwierigkeit. Dieselbe verwandelt sich dann in das Gleichungssystem (34) auf Seite 352. Auf dieser Seite werden wir dann auch die übrigen jetzt nur skizzierten Rechnungsoperationen ausführen. Zuvor will ich aber noch zeigen, wie man unser Problem modifizieren muß, um direkt statt auf die partielle Differentialgleichung auf jenes System von p gewöhnlichen Differentialgleichungen zu kommen. Die Methode, deren wir uns hierbei bedienen werden, ist keineswegs neu. Die Integrale sind bekanntlich nichts anderes als symbolische Bezeichnungen für Summen unendlich vieler, unendlich kleiner Glieder. Die symbolische Bezeichnung der Integralrechnung zeichnet sich nur durch eine solche Kürze aus, daß es in den meisten Fällen nur zu unnützen Weitschweifigkeiten führen würde, wenn man die Integrale erst als Summen von p Gliedern hinschriebe und dann p immer größer werden ließe. Trotzdem aber gibt es Fälle, in denen die letztere Methode wegen der Allgemeinheit, die sie erzielt, namentlich aber wegen der größeren Anschaulichkeit, in der sie die verschiedenen Lösungen eines Problems erscheinen läßt, nicht ganz zu verschmähen ist. Ich erinnere da an die elegante Auflösung des Problems der Saitenschwingungen durch Lagrange in den *Miscellanea taurinensia*, wo derselbe zuerst die Schwingungen eines Systems von n miteinander verbundenen Kugeln behandelt, und dann zu den Saitenschwingungen gelangt, indem er n immer größer, die Masse jeder Kugel immer kleiner werden läßt. In ähnlicher Weise wurde auch das Problem der Diffusion und Wärmeleitung (durch Stefan, Sitzungsab. d. Wiener Akad. Bd. 47 u. Beez) gelöst. Noch eine hübsche Anwendung dieser Methode auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{dr ds} = a \left(\frac{dw}{dr} + \frac{dw}{ds} \right)$$

deutet Riemann in den Ber. d. Götting. Ges. d. Wiss. Bd. 8 an. Diese Methode scheint mir nun auch in unserem Falle, wenn man sich einmal an einige Abstraktionen gewöhnt hat, die Deutlichkeit sehr zu fördern. Wir wollen an die Stelle der kontinuierlichen Variablen x eine Reihe diskreter Werte ε , 2ε , 3ε , ... $p\varepsilon$ setzen. Wir müssen daher annehmen, daß unsere Moleküle nicht imstande sind, eine kontinuierliche

Reihe lebendiger Kräfte anzunehmen, sondern bloß solche, welche Vielfache einer gewissen Größe ε sind. Im übrigen wollen wir ganz dasselbe Problem wie früher behandeln. In einem Raume R haben wir sehr viele Gasmoleküle. Aber jedes derselben soll nur fähig sein, folgende lebendige Kräfte anzunehmen:

$$(26) \quad \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon \dots p\varepsilon$$

Kein Molekül soll eine dazwischen liegende noch größere lebendige Kraft annehmen. Wenn zwei Moleküle zusammenstoßen, so sollen sie ihre lebendige Kraft in gar mannigfaltiger Weise verändern. Aber immer soll nach dem Stoße die lebendige Kraft jedes Moleküls wieder ein Vielfaches von ε sein. Ich brauche wohl nicht zu bemerken, daß wir es dafür den Augenblick nicht mit einem reellen physikalischen Probleme zu tun haben. Es dürfte schwer sein, eine Vorrichtung zu ersinnen, welche den Zusammenstoß zweier Körper so reguliert, daß nach demselben die lebendige Kraft eines jeden immer ein Vielfaches von ε ist. Darum handelt es sich hier auch gar nicht. Jedenfalls steht es uns frei, die mathematischen Konsequenzen dieser Annahme zu prüfen, welche nichts weiter als ein Hilfsmittel sein soll, um uns die Berechnung des physikalischen Vorganges zu erleichtern. Denn zum Schlusse werden wir ja ε unendlich klein, $p\varepsilon$ unendlich groß setzen, wodurch sofort die unter (26) gegebene Reihe lebendiger Kräfte in eine kontinuierliche, unsere mathematische Fiktion also in das früher behandelte physikalische Problem übergeht. Wir nehmen nun an, zur Zeit t befinden sich w_1 Moleküle mit der lebendigen Kraft ε , w_2 Moleküle mit der lebendigen Kraft $2\varepsilon \dots w_p$ mit der lebendigen Kraft $p\varepsilon$ in der Volumeinheit. Wir nehmen wieder an, schon zur Zeit t sei die Verteilung der lebendigen Kraft eine gleichförmige gewesen (die mit w bezeichneten Größen seien also unabhängig davon, wo wir den Raum vom Volumen eins konstruieren) und für die Geschwindigkeitsrichtung sei jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich gewesen. Im Verlaufe der Zeit werden aus der Volumeinheit Moleküle von einer gewissen lebendigen Kraft, z. B. $k\varepsilon$ austreten; allein da die Verteilung der lebendigen Kraft eine gleichförmige ist, so werden durchschnittlich ebenso viele wieder aus der Umgebung eintreten. Und da es

sich hier nur um Durchschnittswerte handelt, so werden sich die mit w bezeichneten Anzahlen also nur durch die Zusammenstöße verändern. Wollen wir daher die Differentialgleichungen für die Veränderungen der w aufstellen, so müssen wir die Zusammenstöße einer näheren Betrachtung unterziehen. Bezeichnen wir mit $N_{\kappa\lambda}^{kl}$ die Zahl der Zusammenstöße, welche in der Volumeinheit während der sehr kleinen Zeit τ so geschehen, daß vor denselben die lebendige Kraft des ersten der stoßenden Moleküle $k\varepsilon$, die des zweiten $l\varepsilon$, nach dem Stoße aber die des ersten $\kappa\varepsilon$, des zweiten $\lambda\varepsilon$ ist. Die vier Größen k, l, κ, λ sind ganze positive Zahlen $\geq p$; denn Zusammenstöße, bei denen die Größen k, l, κ, λ andere Werte hätten, finden, wie wir wissen, nicht statt. Außerdem besteht zwischen denselben die Gleichung

$$(27) \quad k + l = \kappa + \lambda,$$

da die Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle vor dem Stoße gleich der Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle nach dem Stoße sein muß. Da wir es gegenwärtig nicht mit einem reellen physikalischen Probleme zu tun haben, so können wir diese Anzahl $N_{\kappa\lambda}^{kl}$ natürlich auch nicht wirklich bestimmen; wir können über dieselbe vielmehr jede beliebige Voraussetzung machen und die daraus folgenden Konsequenzen prüfen. Wollen wir aber, daß unser Problem für unendlich kleine ε in das früher behandelte übergeht, so müssen wir voraussetzen, daß $N_{\kappa\lambda}^{kl}$ vollkommen analog bestimmt sei, wie früher die Anzahl der Zusammenstöße bestimmt war. Wir nehmen also an, die Zahl $N_{\kappa\lambda}^{kl}$ sei wieder erstens proportional der Zeit τ , zweitens proportional der Anzahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft $k\varepsilon$ in der Volumeinheit, also proportional w_k , drittens proportional der Zahl w_l . Das Produkt dieser drei Größen sei noch zu multiplizieren mit einem gewissen Proportionalitätsfaktor, der noch von den vier die Natur des Zusammenstoßes bestimmenden Größen k, l, κ, λ , aber nicht von der Zeit abhängen kann, und mit $A_{\kappa\lambda}^{kl}$ bezeichnet werden mag. Fassen wir alles dieses zusammen, so haben wir also:

$$(28) \quad N_{\kappa\lambda}^{kl} = \tau \cdot w_k \cdot w_l \cdot A_{\kappa\lambda}^{kl}.$$

Jetzt ist die Zahl der Zusammenstöße ganz analog wie früher in Formel (2) bestimmt. Die Größe A tritt an die Stelle

der früher mit ψ bezeichneten. Wollen wir die Analogie vollständig machen, so müssen wir der Größe A auch noch dieselben Eigenschaften beilegen, welche die Größe ψ hatte. ψ erfüllte die Gleichung

$$(29) \quad \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) = \sqrt{\xi(x + x' - \xi)} \psi(\xi, x + x' - \xi, x).$$

In unserem Falle sind die lebendigen Kräfte vor dem Stoße $k\varepsilon$, $l\varepsilon$, die nach demselben $\varkappa\varepsilon$, $\lambda\varepsilon$; in unserem Falle ist also

$$x = k\varepsilon, \quad x' = l\varepsilon, \quad \xi = \varkappa\varepsilon, \quad x + x' - \xi = \lambda\varepsilon.$$

Der Größe $\psi(x, x', \xi)$ entspricht $A_{\varkappa\lambda}^{kl}$, und man sieht leicht, daß der Größe $\psi(\xi, x + x' - \xi, x)$ die Größe $A_{kl}^{\varkappa\lambda}$ entspricht. Die Gleichung (29) geht also in unserem Falle über in

$$(30) \quad \sqrt{k l} \cdot A_{\varkappa\lambda}^{kl} = \sqrt{\varkappa \lambda} \cdot A_{kl}^{\varkappa\lambda}.$$

Nun ist die Analogie eine vollständige, und wir brauchen nur ε unendlich klein, $p\varepsilon$ unendlich groß zu setzen, um aus der Lösung dieses Problems die des früher behandelten physikalischen zu erhalten. Die Formeln werden etwas einfacher, wenn wir $\sqrt{k l} A_{\varkappa\lambda}^{kl}$, was ja wieder eine von den vier Zahlen k, l, \varkappa, λ abhängige Konstante ist, mit $B_{\varkappa\lambda}^{kl}$ bezeichnen. Dann geht die Gleichung (30) über in

$$(31) \quad B_{\varkappa\lambda}^{kl} = B_{kl}^{\varkappa\lambda}$$

und die Gleichung (28) verwandelt sich in

$$(32) \quad N_{\varkappa\lambda}^{kl} = \tau \cdot \frac{w_k w_l}{\sqrt{k l}} \cdot B_{\varkappa\lambda}^{kl}.$$

Die Quadratwurzeln sind natürlich positiv zu nehmen, da $N_{\varkappa\lambda}^{kl}$ wie die w wesentlich positive Zahlen sind, und wir die B auch immer positiv wählen wollen. Nach diesen Vorbereitungen fragen wir uns, welche Veränderung die Größe w_1 während der Zeit τ erfährt. w_1 ist die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε in der Volumeinheit. Wir wissen, daß sich diese Zahl nur infolge der Zusammenstöße verändert. So oft nämlich zwei Moleküle so zusammenstoßen, daß vor dem Stoße eines derselben die lebendige Kraft ε hat, während nach demselben keines mehr die lebendige Kraft ε hat, wird diese Zahl um eins vermindert. Umgekehrt, so oft zwei Moleküle so zusammenstoßen, daß vor dem Stoße keines, nach dem Stoße

aber eines die lebendige Kraft ε hat, wird jene Zahl um eins vermehrt. Ziehen wir also die erstere Zahl von w_1 ab, und addieren die letztere hinzu, so erhalten wir die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, welche zur Zeit $t + \tau$ die lebendige Kraft ε haben, und welche wir mit w_1' bezeichnen wollen. Es handelt sich also jetzt um die Zahl der Zusammenstöße, vor denen eines der stoßenden Moleküle die lebendige Kraft ε hatte. Wenn auch das andere die lebendige Kraft ε hatte, so müssen nach dem Stoße wieder beide die lebendige Kraft ε haben, da die Summe der lebendigen Kraft beider nach dem Stoße wieder 2ε sein muß und keine anderen lebendigen Kräfte als die in der Reihe (26) verzeichneten vorkommen können. Hatte vor dem Stoße ein Molekül die lebendige Kraft ε , das andere 2ε , so muß aus demselben Grunde auch nach dem Stoße eines die lebendige Kraft ε , das andere 2ε haben. Durch alle diese Zusammenstöße ändert sich also die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε nicht. Anders aber ist die Sache, wenn vor dem Stoße ein Molekül die lebendige Kraft ε , das andere 3ε hatte; dann können nach dem Stoße beide die lebendige Kraft 2ε haben. Durch jeden dieser Zusammenstöße wird die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε , also w_1 , um eins vermindert. Im ganzen geschehen N_{22}^{13} solcher Zusammenstöße in der Volumeinheit während der Zeit τ ; durch alle diese Zusammenstöße zusammen nimmt also w_1 um N_{22}^{13} ab. Es ist also N_{22}^{13} von w_1 zu subtrahieren. Ebenso sind N_{23}^{14} , N_{32}^{14} , N_{24}^{15} , \dots , $N_{p-1,2}^{1p}$ von w_1 zu subtrahieren. Dagegen sind die Zahlen N_{13}^{22} , N_{14}^{23} , \dots , $N_{1,p}^{p-1,2}$ dazu zu addieren, weil durch jeden dieser Zusammenstöße die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε um eins vermehrt wird. Es ergibt sich somit:

$$(33) \quad \begin{cases} w_1' = w_1 - N_{22}^{13} - N_{23}^{14} - N_{32}^{14} - N_{32}^{15} - \dots \\ \quad \quad \quad + N_{13}^{22} + N_{14}^{23} + N_{14}^{32} + N_{15}^{24} + \dots \end{cases}$$

Das Gesetz, welches hier herrscht, ist leicht zu übersehen. Zu subtrahieren sind alle N , welche oben den Index 1 haben, zu addieren alle, welche unten den Index 1 haben. Diejenigen, welche diesen Index sowohl oben als auch unten haben, sind zu addieren und subtrahieren, können also ganz weggelassen werden. (Früher, im Integral, haben wir diese sich tilgenden

Glieder bequemlichkeitshalber nicht fortgehoben.) Dabei ist noch zu beachten, daß die vier Indizes der N die Gleichung (27) erfüllen müssen, und daß zwei N , welche durch gleichzeitige Verwechslung der oberen und unteren Indizes auseinander hervorgehen (z. B. N_{23}^{14} und N_{32}^{41}) ganz identischen Zusammenstößen entsprechen, daher nur einmal addiert (respektive subtrahiert) werden dürfen. Entwickeln wir w_1' nach dem Taylorschen Lehrsatz, so ergibt sich

$$w_1' = w_1 + \tau \frac{dw_1}{dt}.$$

Substituieren wir dies, sowie die durch die Gleichung (32) gegebenen Werte N in die Gleichung (33), so ergibt sich, nachdem mit τ wegdividiert wurde

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} = & -B_{22}^{13} \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1} \sqrt{3}} - B_{23}^{14} \frac{w_1 w_4}{\sqrt{1} \sqrt{4}} - B_{32}^{14} \frac{w_1 w_4}{\sqrt{1} \sqrt{4}} - B_{24}^{15} \frac{w_1 w_5}{\sqrt{1} \sqrt{5}} - \dots \\ & + B_{13}^{22} \frac{w_2^2}{2} + B_{14}^{23} \frac{w_2 w_3}{\sqrt{2} \sqrt{3}} + B_{14}^{32} \frac{w_2 w_3}{\sqrt{2} \sqrt{3}} + B_{15}^{24} \frac{w_2 w_4}{\sqrt{2} \sqrt{4}} + \dots, \end{aligned}$$

welche Gleichung unter Berücksichtigung der Gleichung (32) auch so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} = & B_{22}^{13} \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1} \sqrt{3}} \right) \\ & + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14}) \left(\frac{w_2 w_3}{\sqrt{2} \sqrt{3}} - \frac{w_1 w_4}{\sqrt{1} \sqrt{4}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$34) \left\{ \begin{aligned} \frac{dw_2}{dt} = & 2 B_{22}^{13} \left(\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1} \sqrt{3}} - \frac{w_2^2}{2} \right) \\ & + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14}) \left(\frac{w_1 w_4}{\sqrt{1} \sqrt{4}} - \frac{w_2 w_3}{\sqrt{2} \sqrt{3}} \right) + \dots \\ & \vdots \\ \frac{dw_p}{dt} = & (B_{2,p-1}^{1,p} + B_{p-1,2}^{1,p}) \left(\frac{w_{p-1} w_3}{\sqrt{p-1} \sqrt{2}} - \frac{w_1 w_p}{\sqrt{1} \sqrt{p}} \right) \\ & + (B_{3,p-2}^{1,p} + B_{p-2,3}^{1,p}) \left(\frac{w_2 w_{p-2}}{\sqrt{3} \sqrt{p-2}} - \frac{w_1 w_p}{\sqrt{1} \sqrt{p}} \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Es bedarf höchstens noch einer Erläuterung, warum das Glied

$$B_{22}^{13} \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1} \sqrt{3}}$$

im Ausdrucke für dw_2/dt den Faktor 2 hat. Dieses Glied rührt von jenen Zusammenstößen her, für welche vor dem Stoße ein Molekül die lebendige Kraft ε , das andere 3ε , nach dem Stoße beide die lebendige Kraft 2ε haben; durch jeden dieser Stöße wird die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft 2ε nicht um eins, sondern um zwei vermehrt, weil ja durch jeden dieser Stöße gleichzeitig zwei Moleküle die lebendige Kraft 2ε gewinnen. Daher müssen alle diese Stöße doppelt gezählt werden. Ebenso zählen im Ausdrucke für dw_3/dt die Glieder

$$B_{33}^{15} \frac{w_1 w_5}{\sqrt{5}}$$

und

$$B_{33}^{24} \frac{w_2 w_4}{\sqrt{2} \sqrt{4}}$$

usw. doppelt. Es wäre leicht, das Gleichungssystem (34) durch Summenformeln darzustellen; ich glaube aber, daß dadurch für die Deutlichkeit nichts Wesentliches gewonnen würde; das Bildungsgesetz ist ja nach dem Auseinandergesetzten klar. Man sieht auch, daß dies genau das Gleichungssystem ist, in welches die eine partielle Differentialgleichung (18) übergeht, wenn man sie nach der früher auseinandergesetzten Lagrange'schen Methode durch ein System von p gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzt und $f(k\varepsilon, t)$ mit w_k bezeichnet. Um die Gleichungen (34) etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$w_k = \sqrt{k} \cdot u_k.$$

Dieselben verwandeln sich dann in

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4) + \dots \\ \sqrt{2} \frac{du_2}{dt} = 2 B_{22}^{13}(u_1 u_3 - u_2^2) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_1 u_4 - u_2 u_3) + \dots \\ \vdots \\ \sqrt{p} \frac{du_p}{dt} = (B_{2,p-1}^{1,p} + B_{p-1,2}^{1,p})(u_2 u_{p-1} - u_1 u_p) + \dots \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich wieder beweisen, daß

$$E = u_1 \log u_1 + \sqrt{2} u_2 \log u_2 + \dots + \sqrt{p} u_p \log u_p$$

beständig abnehmen muß, solange nicht $u_2^2 - u_1 u_3$, $u_2 u_3 - u_1 u_4 \dots$, kurz alle in den Gleichungen (35) mit den Koeffizienten B multiplizierten Ausdrücke verschwinden. Die Gleichungen (35) haben das Unbequeme, daß sie sich höchstens durch Summenformeln, nicht aber explizit vollständig hinschreiben lassen. Es wird daher ohne Zweifel die Deutlichkeit erhöhen, wenn wir, mit den einfachsten Fällen beginnend, erst allmählich zum allgemeinen Falle übergehen. Sei zunächst $p = 3$; die Moleküle seien also nur fähig, drei verschiedene lebendige Kräfte, ε , 2ε und 3ε anzunehmen. Dann reduziert sich das Gleichungssystem (35) auf folgende drei Gleichungen:

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{d u_1}{d t} = B_{22}^{13} (u_2^2 - u_1 u_3) \\ \sqrt{2} \frac{d u_2}{d t} = 2 B_{22}^{13} (u_1 u_3 - u_2^2) \\ \sqrt{3} \frac{d u_3}{d t} = B_{22}^{13} (u_2^2 - u_1 u_3) \end{cases}$$

und der Ausdruck für E geht über in

$$E = u_1 \log u_1 + \sqrt{2} u_2 \log u_2 + \sqrt{3} u_3 \log u_3.$$

Die Differentiation liefert

$$\frac{d E}{d t} = (\log u_1 + 1) \frac{d u_1}{d t} + (\log u_2 + 1) \frac{d u_2}{d t} + (\log u_3 + 1) \frac{d u_3}{d t}$$

oder nach veränderter Anordnung der Glieder

$$\begin{aligned} \frac{d E}{d t} &= \log u_1 \frac{d u_1}{d t} + \sqrt{2} \log u_2 \frac{d u_2}{d t} + \sqrt{3} \log u_3 \frac{d u_3}{d t} \\ &\quad + \frac{d u_1}{d t} + \sqrt{2} \frac{d u_2}{d t} + \sqrt{3} \frac{d u_3}{d t}. \end{aligned}$$

Die Summe der letzten drei Glieder verschwindet gemäß den Gleichungen (36) und man erhält somit $d E / d t$, indem man die erste dieser Gleichungen mit $\log u_1$, die zweite mit $\log u_2$, die dritte mit $\log u_3$ multipliziert und alle drei addiert. Führt man dies wirklich aus, so erhält man

$$\frac{d E}{d t} = B_{22}^{13} \cdot (u_2^2 - u_1 u_3) \cdot (\log u_1 + \log u_3 - 2 \log u_2)$$

oder

$$\frac{dE}{dt} = B_{22}^{13} \cdot (u_2^2 - u_1 u_3) \log \left(\frac{u_1 u_3}{u_2^2} \right).$$

Von den beiden Faktoren, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung mit B_{22}^{13} multipliziert sind, ist für $u_2^2 > u_1 u_3$ der erste positiv, der zweite negativ, für $u_2^2 < u_1 u_3$ aber der erste negativ und der zweite positiv; ihr Produkt ist daher immer negativ, und da B_{22}^{13} wesentlich positiv ist, so ist dE/dt immer negativ oder gleich Null; letzteres für $u_2^2 = u_1 u_3$. Nun läßt sich aber leicht beweisen, daß E nicht negativ unendlich werden kann. Selbstverständlich kann keine der drei Größen u_1 , u_2 und u_3 negativ oder imaginär werden. Für positive u aber kann $u \log u$ bekanntlich keinen größeren negativen Wert als $-1/e$, die Größe E also keinen größeren negativen Wert als

$$-\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{e}$$

annehmen, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Es muß sich also E , da sein Differentialquotient nicht positiv sein kann, immer mehr einem Minimum nähern, für welches $dE/dt = 0$, also $u_2^2 = u_1 u_3$ ist. Ganz in derselben Weise kann der Beweis auch geführt werden, wenn $n > 3$ ist. Ich betrachte hier nur noch den Fall $n = 4$. In diesem Falle reduzieren sich die Gleichungen (35) auf

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{du^4}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4), \\ \sqrt{2} \frac{du_2}{dt} = 2 B_{22}^{13}(u_1 u_3 - u_2^2) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_1 u_4 - u_2 u_3) + B_{33}^{24}(u_3^2 - u_2 u_4), \\ \sqrt{3} \frac{du_3}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_1 u_4 - u_2 u_3) + 2 B_{33}^{24}(u_2 u_4 - u_3^2), \\ \sqrt{4} \frac{du_4}{dt} = (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4) + B_{33}^{24}(u_3^2 - u_2 u_4). \end{cases}$$

Für E aber findet man

$$E = u_1 \log u_1 + \sqrt{2} u_2 \log u_2 + \sqrt{3} u_3 \log u_3 + \sqrt{4} u_4 \log u_4,$$

$$\frac{dE}{dt} = \log u_1 \frac{du_1}{dt} + \sqrt{2} \log u_2 \frac{du_2}{dt} + \sqrt{3} \log u_3 \frac{du_3}{dt} + \sqrt{4} \log u_4 \frac{du_4}{dt}.$$

Substituiert man hier für

$$\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{du_2}{dt}, \quad \frac{du_3}{dt}, \quad \frac{du_4}{dt}$$

ihre Werte aus den Gleichungen (37), so ergibt sich nach passender Anordnung der Glieder

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & B_{22}^{13} (u_2^2 - u_1 u_3) \log \left(\frac{u_1 u_3}{u_2^2} \right) + B_{33}^{24} (u_3^2 - u_2 u_4) \log \left(\frac{u_2 u_4}{u_3^2} \right) \\ & + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14}) (u_2 u_3 - u_1 u_4) \log \left(\frac{u_1 u_4}{u_2 u_3} \right). \end{aligned}$$

Ich bemerke, daß die Veränderung der Anordnung der Summanden, welche hier erforderlich war, nichts anderes ist als unsere frühere weitläufige Transformation des bestimmten Integrals. Aus dem obigen Ausdrucke sieht man sofort, daß dE/dt wieder notwendig negativ ist, wenn nicht gleichzeitig

$$u_2^2 = u_1 u_3, \quad u_3^2 = u_2 u_4, \quad u_2 u_3 = u_1 u_4$$

ist, wofür man auch setzen kann

$$u_3 = \frac{u_2^2}{u_1}, \quad u_4 = \frac{u_3^2}{u_1}.$$

Ebenso findet man für den allgemeinen Fall, daß dE/dt notwendig negativ ist, daher E notwendig abnimmt, wenn nicht

$$(38) \quad u_3 = \frac{u_2^2}{u_1}, \quad u_4 = \frac{u_3^2}{u_1}, \dots$$

ist. Da nun E wieder keinen größeren negativen Wert als

$$(39) \quad - \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{p}}{e}$$

annehmen kann, so muß es sich notwendig einem Minimum immer mehr und mehr nähern, für welches die Gleichungen (38) bestehen werden. Es nähert sich daher die Zustandsverteilung immer mehr der durch die Gleichungen (38) bestimmten. Es ist noch zu beweisen, daß die Gleichungen (38) die Zustandsverteilung eindeutig bestimmen. Addieren wir alle Gleichungen (35), so ergibt sich

$$\frac{du_1}{dt} + \sqrt{2} \frac{du_2}{dt} + \sqrt{3} \frac{du_3}{dt} + \dots + \sqrt{p} \frac{du_p}{dt} = 0,$$

daher

$$(40) \quad u_1 + \sqrt{2} u_2 + \sqrt{3} u_3 + \dots + \sqrt{p} u_p = a.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(41) \quad u_1 + 2\sqrt{2} u_2 + 3\sqrt{3} u_3 + \dots + p\sqrt{p} u_p = \frac{b}{e},$$

wobei a und b Konstanten sind. Die Bedeutung dieser Gleichungen liegt auf der Hand. Es ist nämlich

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots = u_1 + \sqrt{2} u_2 \pm \sqrt{3} u_3 + \dots = a$$

die Gesamtzahl der Moleküle in der Volumeinheit, b aber ist ihre gesamte lebendige Kraft. Die Gleichungen (40) und (41) besagen uns also, daß jene beiden Größen konstant sind. Seien uns die beiden Größen a und b , also die Gesamtzahl der Moleküle in der Volumeinheit und ihre gesamte lebendige Kraft gegeben. Dann wollen wir den Quotienten $u_2/u_1 = \gamma$ setzen. Die Gleichungen (38) gehen dann über in

$$u_3 = \gamma^2 u_1, \quad u_4 = \gamma^3 u_1, \quad \dots \quad u_p = \gamma^{p-1} u_1.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (40) und (41), so findet man daraus mit Leichtigkeit

$$(42) \quad \begin{cases} \left[p a - \frac{b}{\varepsilon} \right] \sqrt{p} \gamma^{p-1} + \left[(p-1) a - \frac{b}{\varepsilon} \right] \sqrt{p-1} \gamma^{p-2} + \dots \\ + \left(3 a - \frac{b}{\varepsilon} \right) \sqrt{3} \gamma^2 + \left(2 a - \frac{b}{\varepsilon} \right) \sqrt{2} \gamma + a - \frac{b}{\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

Da alle u notwendig positiv sind, so sieht man unmittelbar, daß $(b/\varepsilon) - a$ positiv, $(b/\varepsilon) - p a$ aber negativ sein muß. Es muß daher b zwischen εa und $\varepsilon p a$ liegen. In der Gleichung (42) ist daher der Koeffizient von γ^{p-1} positiv, das von γ freie Glied aber negativ. Ihr Gleichungspolynom ist also für $\gamma = \infty$ positiv, für $\gamma = 0$ negativ; sie liefert also eine positive Wurzel für γ und sie liefert nur eine, weil die Reihe der Koeffizienten nur einen Zeichenwechsel hat. Negative oder imaginäre Werte für γ haben natürlich keinen Sinn. Aus γ aber lassen sich alle u , mithin auch die w eindeutig bestimmen. Wie immer also die Zustandsverteilung zu Anfang der Zeit gewesen sein mag, es gibt eine, und nur eine, der sie sich mit wachsender Zeit immer mehr nähert. Dieselbe hängt bloß ab von den Konstanten a und b , also der Gesamtzahl und der gesamten lebendigen Kraft der Moleküle (Dichte und Temperatur des Gases). Dieser Satz wurde zunächst nur für den Fall bewiesen, daß die Zustandsverteilung schon zu Anfang der Zeit eine gleichförmige war. Er muß also auch gelten, wenn dies nicht der Fall war, wenn die Moleküle nur so verteilt waren, daß sie sich mit wachsender Zeit immer mehr mischen, daß

also die Zustandsverteilung nach Verlauf einer sehr langen Zeit eine gleichförmige wird, und dies wird immer der Fall sein, mit Ausnahme ganz spezieller Fälle, z. B. wenn die Moleküle anfangs in einer geraden Linie angeordnet gewesen wären, und auch von den Wänden in diese Gerade zurückreflektiert würden. Da wir dies für beliebige p und ε bewiesen haben, so können wir sofort zu dem Falle übergehen, wo $1/p$ und ε unendlich klein sind.¹⁾ Wir haben zunächst:

$$w_k = \sqrt{h} u_k = u_1 \sqrt{h} \gamma^{k-1}.$$

¹⁾ Für sehr große p wird der Ausdruck (39) sehr groß von der Ordnung $p^{3/2}$. In diesem Falle ist es also notwendig, einen kleineren negativen Wert aufzusuchen, den E niemals überschreiten kann. Die hier mit E bezeichnete Größe unterscheidet sich durch eine Konstante von der früher so bezeichneten. Wollen wir die in der Anm. S. 339, Gleichung (17a) mit E_1 bezeichnete Größe erhalten, die wieder nur durch eine Konstante von den übrigen mit diesen Buchstaben bezeichneten Größen verschieden ist, so müssen wir zu unserem gegenwärtigen E noch

$$- \frac{3 \log \varepsilon}{2} (u_1 + \sqrt{2} u_2 + \dots)$$

addieren. Es ist also

$$E_1 = E - \frac{3 \log \varepsilon}{2} (u_1 + \sqrt{2} u_2 + \dots) = u_1 \log \left(\frac{u_1}{\varepsilon^{3/2}} \right) + \sqrt{2} u_2 \log \left(\frac{u_2}{\varepsilon^{3/2}} \right) + \dots$$

Es ist zunächst klar, daß E_1 eine für alle reellen positiven Werte der u reelle und kontinuierliche Funktion derselben ist. Ferner kann (wenn wir eine negative Größe als um so kleiner bezeichnen, je größer ihr Zahlenwert ist) E nicht kleiner als der Ausdruck (39), also E_1 nicht kleiner als

$$- \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} + \dots \sqrt{p}) - \frac{3}{2} a \log \varepsilon$$

werden. Es muß daher E_1 ein Minimum haben, wenn die u alle reellen positiven mit den Gleichungen (40) und (41) verträglichen Werte durchlaufen. Man beweist zunächst leicht, daß für dieses Minimum keines der u gleich Null sein kann, daß es also nicht an der Grenze der von den u gebildeten Mannigfaltigkeit liegen kann, und folglich nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung gefunden wird. Addieren wir zum totalen Differential von E_1 das der beiden Gleichungen (40) und (41); ersteres mit dem unbestimmten Multiplikator λ , letzteres mit dem ebenfalls erst zu bestimmenden Multiplikator μ multipliziert, so ergibt sich

$$(\log u_1 + \lambda + \mu) d u_1 + (\log u_2 + \lambda + 2 \mu) \sqrt{2} d u_2 + \dots = 0.$$

Für unendlich kleine ε setzen wir nun wieder

$$(43) \quad \varepsilon = dx, \quad k\varepsilon = x, \quad \gamma = e^{-h\varepsilon}, \quad \frac{u_1}{\varepsilon^{3/2}} = C$$

Für das Minimum muß bekanntlich der Faktor jedes Differentials verschwinden, woraus man nach Elimination von λ und μ erhält

$$\log u_2 - \log u_1 = \log u_3 - \log u_2 = \dots$$

oder

$$u_3 = \frac{u_2^2}{u_1}, \quad u_4 = \frac{u_3^2}{u_2} \dots,$$

worin man sogleich die Gleichungen (38) wieder erkennt. Dieselben bestimmen also in der Tat den kleinsten Wert, den E_1 annehmen kann, wenn die u alle möglichen mit den Gleichungen (40) und (41) vereinbaren Werte annehmen. Da aber die u während des ganzen Vorganges in der Tat an die Gleichungen (40) und (41) gebunden sind, so ist dies der kleinste Wert, den E_1 während des ganzen Vorganges anzunehmen imstande ist. Um denselben zu berechnen, setzen wir wieder

$$u_2 = u_1 \gamma, \quad u_3 = u_1 \gamma^2 \dots$$

Wir wissen, daß wir dann aus den Gleichungen (38), (40) und (41) einen einzigen positiven Wert für γ finden, der also dem wirklichen Minimum von E_1 entsprechen muß. Dieser Minimalwert von E_1 ist also

$$E' = \frac{1}{\varepsilon} b \log \gamma + a \log \left(\frac{u_1}{\gamma \varepsilon^{3/2}} \right).$$

Einen kleineren Wert kann E_1 nicht annehmen. Und dieser Wert bleibt selbst für unendlich kleine ε und unendliche p endlich. Er geht nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (43) über in

$$a \log C - b h,$$

oder weil

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h^3}} C, \quad b = \frac{3\pi}{2h}$$

ist, so kann man hierfür schreiben

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h^3}} C (\log C - \frac{3}{2}),$$

was, da die Konstanten C und h nicht unendlich sind, eine endliche Größe ist. Es kann also die mit E_1 bezeichnete Größe nicht negativ unendlich werden, dagegen könnte E_1 positiv unendlich sein. Doch läßt sich leicht zeigen, daß dann unmöglich Wärmegleichgewicht herrschen kann. Dies, sowie eine ausführliche Diskussion der Ausnahmefälle, wo

$$\lim_{\tau} \frac{\varepsilon}{\tau} [f(\varepsilon, t + \tau) \log f(\varepsilon, t + \tau) + \sqrt{2} f(2\varepsilon, t + \tau) \log f(2\varepsilon, t + \tau) + \dots \\ - f(\varepsilon, t) \log f(\varepsilon, t) - \sqrt{2} f(2\varepsilon, t) \log f(2\varepsilon, t) - \dots]$$

ungleich ausfallen könnte, je nachdem ε/τ oder τ/ε verschwindet, würde mich jedoch hier zu weit führen.

und erhalten

$$w_k = C\sqrt{x} e^{-hx} dx,$$

also wieder die Maxwellsche Zustandsverteilung. Ebenso überzeugt man sich, daß die Summe, welche wir hier mit \mathcal{E} bezeichnet haben, abgesehen von einem konstanten Addenden, in das Integral der Formel (17a) übergeht; wir erhalten also nach dieser Methode alle Resultate wieder, welche wir früher durch die Transformation der bestimmten Integrale gewannen, und sie hat den Vorteil, daß sie viel einfacher und durchsichtiger ist. Nur muß man sich dabei an die Abstraktion, daß ein Molekül nur imstande sei, eine endliche Anzahl lebendiger Kräfte anzunehmen, als Übergangsstadium gewöhnt haben.

Setzt man in den Gleichungen (35) die Differentialquotienten der u nach der Zeit gleich Null, so erhält man die Bedingungsgleichungen, daß die Zustandsverteilung sich mit wachsender Zeit nicht ändert, also stationär ist. Man sieht sogleich, daß die Gleichungen (35) dann außer der von uns gefundenen noch zahlreiche andere Lösungen haben, welche aber keine denkbaren stationären Zustandsverteilungen darstellen, da dabei die Wahrscheinlichkeit gewisser lebendiger Kräfte notwendig negativ oder imaginär ausfällt. Ganz analog verhält es sich natürlich auch, wenn, wie es in der Natur der Fall ist, jedes Molekül alle lebendigen Kräfte von Null bis Unendlich annehmen kann. Die Bedingung, daß die Zustandsverteilung stationär sei, erhält man dann, wenn man in der Gleichung (16)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 0$$

setzt. Dieselbe ist also

$$0 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{f(\xi) f(x+x'-\xi)}{\sqrt{\xi} \sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x) f(x')}{\sqrt{xx'}} \right] \sqrt{xx'} \psi(x, x', \xi) dx' d\xi.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$f(x) = C\sqrt{x} e^{-hx};$$

also die Maxwellsche Zustandsverteilung. Aus dem vorher Gesagten aber folgt, daß dieselbe noch unendlich viele andere Lösungen hat, welche aber nicht brauchbar sind, da dabei $f(x)$ immer für gewisse x negativ oder imaginär ausfällt. Daraus

folgt am klarsten, daß Maxwells Versuche, a priori zu beweisen, daß seine Lösung die einzige sei, fehlschlagen mußten. Sie ist nicht die einzige, sondern es kann nun bewiesen werden, daß sie allein lauter positive Wahrscheinlichkeiten liefert, daß sie also allein brauchbar ist.

III. Diffusion, Reibung und Wärmeleitung der Gase.

Hier sollen nur noch wenige Bemerkungen Platz finden, die sich auf den Fall beziehen, daß die Zustandsverteilung zwar nicht ganz regellos, aber doch auch nicht das ist, was wir gleichförmig genannt haben, und daß auch nicht alle Geschwindigkeitsrichtungen gleichmäßig vertreten sind, was bei innerer Reibung und Wärmeleitung stattfindet. Dann sei

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t) d\xi d\eta d\zeta$$

an der Stelle im Gase, deren Koordinaten x, y, z sind, die auf die Volumeinheit entfallende Anzahl der Moleküle, für welche die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung der x -Achse zwischen ξ und $\xi + d\xi$, die in der Richtung der y -Achse zwischen η und $\eta + d\eta$, die in der Richtung der z -Achse zwischen ζ und $\zeta + d\zeta$ liegt. Ein Zusammenstoß ist durch die Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 der beiden stoßenden Moleküle vor demselben, sowie durch die Größen b und φ bestimmt. (Letztere beide Größen, sowie die später vorkommenden V, h, A_2, X usw. sollen dieselbe Bedeutung wie in Maxwells Abhandl. Phil. mag. 4. ser. vol. 35 haben.) Funktionen dieser acht Variablen sind die Geschwindigkeitskomponenten ξ', η', ζ' und $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ nach dem Stoße. Schreiben wir der Kürze halber $d\omega_1$ für $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$, und bezeichnen mit f den Wert der Funktion $f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)$, mit f_1, f' und f'_1 die Werte dieser Funktion, wenn man darin für $\xi\eta\zeta$, bzw. $\xi_1\eta_1\zeta_1, \xi'\eta'\zeta'$ oder $\xi'_1\eta'_1\zeta'_1$ setzt; dann muß die Funktion f der Differentialgleichung

$$(44) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} + Y \frac{\partial f}{\partial \eta} + Z \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ & + \int d\omega_1 \int b db \int d\varphi V (ff_1 - f'f'_1) = 0 \end{aligned} \right.$$

genügen, wie man leicht sieht, wenn man ein Volumelement sich mit den Geschwindigkeiten ξ , η , ζ fortbewegt denkt und erwägt, wie sich in demselben die Zustandsverteilung durch die Zusammenstöße verändert. Ist das Gas von fixen Wänden umgeben, so folgt aus der Gleichung (44) wieder, daß E durch die Molekularbewegung nur abnehmen kann, wenn man setzt

$$E = \iiint \iiint \iiint f \log f \, dx \, dy \, dz \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

welcher Ausdruck der Entropie des Gases proportional ist. Um für den Fall anderer Grenzbedingungen nur ein Beispiel zu geben, sei die Abstoßung zweier Moleküle der 5. Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional. X , Y , Z sollen im folgenden immer verschwinden. Wir wollen setzen

$$(45) \quad f = A(1 + 2h a y \xi + c \xi \eta) e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

wobei die beiden Konstanten a und c sehr klein sein sollen. Substituieren wir diesen Wert in die Gleichung (44), vernachlässigen die Quadrate und Produkte von a und c und führen die Integrationen nach b und φ genau so durch, wie es Maxwell in der zitierten Abhandlung (S. 141—144) lehrt, so finden wir, daß die Gleichung (44) erfüllt ist, wenn

$$c = - \frac{2ha}{3A_2 k \varrho}$$

gemacht wird. Die Formel (45) gibt also eine mögliche Zustandsverteilung, und zwar diejenige, wobei sich jede der xz -Ebene parallele Schicht in der Richtung der x -Achse mit der Geschwindigkeit ay bewegt, wenn y die y -Koordinate der betreffenden Schicht ist, also den einfachsten Fall innerer Reibung. Die Reibungskonstante ist das in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgehende durch $-a$ dividierte Bewegungsmoment, also

$$- \frac{\varrho \bar{\xi} \eta}{a} = - \frac{\varrho}{a} \frac{\iiint \xi \eta f \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{\iiint f \, d\xi \, d\eta \, d\zeta} = \frac{1}{6A_2 k h} = \frac{p}{3A_2 k \varrho};$$

genau wie sie schon Maxwell gefunden hat. Die Bezeichnungen sind durchaus die von Maxwell gebrauchten. Ein allgemeinerer Ausdruck ist folgender:

$$(46) \quad \left\{ f = A \left[1 - \frac{2ht}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2h(u\xi + v\eta + w\zeta) + \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 + \gamma \zeta^2 + \alpha' \eta \zeta + \beta' \xi \zeta + \gamma' \xi \eta \right] e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \right.$$

Derselbe genügt ebenfalls der Gleichung (44), wenn u, v, w lineare Funktionen von x, y, z sind, und

$$\alpha = -\frac{2h}{3A_2k\varrho} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha' = -\frac{2h}{3A_2k\varrho} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

gesetzt wird. Analoge Werte haben β, γ, β' und γ' . Der Ausdruck (46) stellt eine beliebige Bewegung des Gases dar, bei der die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w im Punkte mit den Koordinaten x, y, z lineare Funktionen dieser Koordinaten sind. Wenn nicht

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist, so ändert sich die Dichte und Temperatur mit der Zeit. Letztere wie bei einem Gase, dem man keine Wärme zuführt. Berechnet man mittels des Ausdruckes (46)

$$\overline{\xi^2}, \overline{\eta^2}, \overline{\xi\eta} \dots,$$

so erhält man wieder die schon von Maxwell gefundenen Werte. Wäre $\partial^2 u / \partial x^2$ von Null verschieden, so erhielte man in die Gleichung (44) noch ein Glied, das sich nicht tilgen würde, nämlich

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \xi^3 e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

als dessen durchschnittlichen Wert wir etwa

$$(47) \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial x} (\overline{\xi^2})^{\frac{3}{2}} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} &= \frac{2h}{3A_2k\varrho} \sqrt{\frac{p^3}{\varrho^3}} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{\varrho}{p}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \end{aligned} \right.$$

annehmen können. Man sieht leicht, daß dieser Wert gegen jedes der übrigen Glieder, aus denen die Gleichung (44) besteht, wenn man darin den Wert von f aus Gleichung (46) substituiert, verschwindet, daß also die Gleichung (44) noch nahe erfüllt ist, man somit bei Berechnung der Zustandsverteilung die Größen u, v, w nach dem Taylorschen Satze entwickeln und bei den ersten Potenzen von x, y, z stehen bleiben kann. Das erste Glied der Gleichung (44) nach Substitution des Wertes f aus Gleichung (46) wäre z. B.

$$-\frac{2h}{3} \xi^2 \frac{\partial u}{\partial x} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}.$$

Sein mittlerer Wert also

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}.$$

Berechnet man den Quotienten dieser Größe in die Größe (47) für Luft bei 0° C und dem Normalbarometerstande numerisch, so findet man denselben etwa = 0,00009 mm $\times \frac{\partial^2 u / \partial x^2}{\partial u / \partial x}$. Derselbe ist also selbst dann noch verschwindend klein, wenn $\frac{\partial u / \partial x}{\partial^2 u / \partial x^2}$ etwa 1 mm ist, wenn also die Werte von $\partial u / \partial x$, die um 1 mm voneinander abstehen, durchschnittlich sich wie 1:2 verhalten. Erst wenn dies schon für Werte von $\partial u / \partial x$ der Fall ist, deren Abstände nicht mehr groß gegen die mittlere Weglänge sind, würde dieser Quotient erheblich. Auch der Wert

$$f = A[1 + ax + by + cz - (a\xi + b\eta + c\zeta)t] e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$$

befriedigt die Gleichung (44). Für ein Gemenge zweier Gasarten wollen wir die auf die zweite bezüglichen Größen durch einen unten angefügten Stern bezeichnen, p und p_* seien die Partialdrucke, m und m_* die Massen eines Moleküls für beide Gasarten. Dann tritt an die Stelle der Gleichung (44) folgende:

$$(44^*) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \int d\omega_1 \int b db \int d\varphi V(ff_1 - f'f'_1) \\ + \int d\omega_* \int b db \int d\varphi V(ff_* - f'f'_*) = 0 \end{aligned} \right.$$

und eine analoge Gleichung für die zweite Gasart. Dem einfachsten Falle der Diffusion entspricht das Integral

$$(46^*) \left\{ \begin{aligned} f &= \sqrt{\frac{m^3 h^3}{\pi^3}} N (1 + 2hm u \xi) e^{-hm(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}, \\ f_* &= \sqrt{\frac{m_*^3 h^3}{\pi^3}} N_* (1 + 2hm_* u_* \xi) e^{-hm_*(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}, \end{aligned} \right.$$

wobei N und N_* Funktionen von x , Nu und N_*u_* aber konstant sein sollen. Keine Größe soll Funktion der Zeit sein. Die Gleichung (44*) ist befriedigt, wenn

$$\frac{dN}{dx} + NN_* 2hm m_*(u - u_*) A_1 k = 0$$

ist. Eine analoge Gleichung muß für N_* gelten. Es muß also sein: $N + N_* = \text{const.} =$ der Anzahl der Moleküle beider

Gase in der Volumeinheit; daraus folgt: $Nu = -N_*u_* =$ der Anzahl der Moleküle einer Gasart, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 gehen. Die Diffusionskonstante ist

$$-\frac{Nu}{\frac{dN}{dx}} = \frac{1}{(N+N_*)2hm_*A_1k} = \frac{pp_*}{A_1k\varrho\varrho_*(p+p_*)},$$

weil

$$2h = \frac{N+N_*}{p+p_*} = \frac{N}{p} = \frac{N_*}{p_*}$$

ist.

Will man die Bewegungsgleichungen erhalten, so multipliziere man die Gleichung (44) oder (44*) mit $m\xi d\omega$ (wobei $d\omega = d\xi d\eta d\zeta$) und integriere über alle ξ, η, ζ . Die vier ersten Glieder dieser Gleichungen verwandeln sich dann in

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \bar{\xi}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho \bar{\xi} \eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho \bar{\xi} \zeta)}{\partial z},$$

oder weil

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0$$

in

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\varrho \bar{\xi}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho \bar{\xi} \eta')}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho \bar{\xi} \zeta')}{\partial z},$$

wobei

$$\xi = \xi' + u, \quad \eta = \eta' + v, \quad \zeta = \zeta' + w$$

gesetzt wurde. Die übrigen Glieder aber liefern negativ genommen das durch die Stöße den Molekülen zugeführte Bewegungsmoment, das natürlich verschwindet, wenn kein zweites Gas beigemischt ist. Das zugeführte Bewegungsmoment mehr der Resultierenden aller Druckkräfte

$$\left(-\frac{\partial(\varrho \bar{\xi}^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\varrho \bar{\xi} \eta')}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho \bar{\xi} \zeta')}{\partial z} \right)$$

ist also gleich der mit der Dichte multiplizierten Beschleunigung

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Die letzteren Gleichungen gelten natürlich für jedes beliebige Wirkungsgesetz. Dagegen haben die Ausdrücke (45), (46) und (46*) nur dann Gültigkeit, wenn die Abstoßung zweier Moleküle der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Für jedes andere Wirkungsgesetz, z. B. wenn die Gasmoleküle

wie elastische Kugeln aneinander abprallen, befriedigen die Ausdrücke (45), (46) und (46*) die Gleichungen (44) und (44*) nicht, für alle anderen Wirkungsgesetze ist also bei Diffusion, Reibung usw. die Geschwindigkeitsverteilung durch kein so einfaches Gesetz gegeben. Für den Fall der Diffusion müßte dann f etwa in folgender Form dargestellt werden:

$$(47^*) \quad A[1 + a\xi + b\xi^3 + c(\eta^2 + \zeta^2)\xi + d\xi^5 \dots] e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

und ich sehe kein anderes Mittel zur Auflösung der Gleichung (44*), als die sukzessive Bestimmung der Koeffizienten $a, b, c \dots$. Für alle anderen Wirkungsgesetze ist also die Geschwindigkeitsverteilung eines diffundierenden Gases nicht dieselbe, als ob es sich allein im Raume mit seiner Diffusionsgeschwindigkeit u fortbewegte. Es rührt dies daher, daß die Moleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten auch verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit haben, wodurch die Geschwindigkeitsverteilung fortwährend gestört wird. Da die Glieder des Ausdruckes (47*) mit $\xi^3, \xi\eta^2, \dots$ in die Diffusionskonstante im allgemeinen Glieder von derselben Ordnung liefern, wie die mit ξ , so kann die Diffusionskonstante nicht numerisch exakt erhalten werden, wenn man erstere bei Berechnung des mitgeteilten Bewegungsmomentes vernachlässigt. Doch dürfte der hierdurch herbeigeführte Fehler kaum sehr groß sein. Ähnliches gilt natürlich von der Reibung und Wärmeleitung. Ja es wird nicht nur der Wert, sondern auch die Konstanz der Diffusions-, Reibungskonstante usw. bei anderen als dem Maxwell'schen Wirkungsgesetze fraglich.

Dem Falle der Wärmeleitung in der Richtung der x -Achse entspricht unter Voraussetzung des Maxwell'schen Wirkungsgesetzes folgender Werte von f :

$$f = A[1 + ax(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + bx + c\xi + g\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)] e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

woraus folgt

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = \xi A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} [a(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + b].$$

Das letzte Glied der Gleichung (44) aber reduziert sich, wenn man darin den obigen Wert für f substituiert, und alle Integrationen nach Maxwells Vorschrift ausführt, auf

$$2g A_2 k M N \xi \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{5}{2h} \right) A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}.$$

Damit also die Gleichung (44) erfüllt sei, muß

$$a = -2g A_2 h M N, \quad b = 5g A_2 h M N \cdot \frac{1}{h} = -\frac{5a}{2h}$$

sein. Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehende Masse ist

$$\rho \bar{\xi} = \rho \left(\frac{c}{2h} + \frac{5g}{4h^2} \right).$$

Soll die Wärmeleitung mit keiner Massenbewegung verbunden sein, so muß also

$$c = -\frac{5g}{2h}$$

sein. Bezeichnen wir mit T die absolute Temperatur, mit B aber eine Konstante, so ist

$$T = \frac{M}{2} (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2) \cdot B = \frac{3MB}{4h} \left(1 + \frac{ax}{h} \right),$$

daher mit Vernachlässigung von unendlich kleinem

$$\frac{dT}{dx} = \frac{a}{h} T.$$

Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehende lebendige Kraft ist

$$L = \frac{\rho}{2} (\bar{\xi}^3 + \bar{\xi} \bar{\eta}^2 + \bar{\xi} \bar{\zeta}^2).$$

Die Mittelwerte können ohne Schwierigkeit mittels des angenommenen Wertes von f berechnet werden. Man erhält, wenn man alle dabei vorkommenden Integrale von der Form

$$\iiint \xi^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^n e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi d\eta d\zeta$$

ausrechnet, was am besten durch Differentiation von $N \bar{\xi}^2$ nach h geschieht:

$$L = \frac{5}{8} \frac{\rho g}{h^3} = \frac{5 M N g}{8 h^3}.$$

Die Wärmeleitungs-konstante ist

$$C = -\frac{L}{\frac{dT}{dx}} = -\frac{5 M N g}{8 h^3} \cdot \frac{h}{a T} = \frac{5}{16 h^2 T A_2 l_1}.$$

Beachtet man, daß

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\bar{\xi}^2}{2} = \frac{1}{2h}$$

ist, so ergibt endlich

$$C = \frac{5 p^2}{4 \varrho^2 T A_2 k_1}.$$

Da ich die Gasmoleküle dabei als einfache materielle Punkte betrachtete, so ist bei mir die Maxwell'sche Größe $\beta = 1$ das Verhältnis der Wärmekapazitäten $\gamma = 1^2/3$. Wird daher die spezifische Wärme (der Gewichtseinheit des Gases) bei konstantem Volumen in gewöhnlichen Wärmeeinheiten gemessen mit w , das mechanische Wärmeäquivalent mit $1/J$ bezeichnet, so ist nach einer bekannten Formel

$$(\gamma - 1)w = \frac{2}{3} w = \frac{pJ}{\varrho T}.$$

Die Wärmeleitungs-konstante in gewöhnlichen Wärmeeinheiten gemessen ist also

$$C' = JC = \frac{5 w p}{6 k A_2 \varrho} = \frac{5}{2} w \mu,$$

wobei μ der Reibungskoeffizient ist. Dieser Wert der Wärmeleitungs-konstante ist $3/2$ mal so groß, als der von Maxwell gefundene, was in einem Versehen Maxwells bei Ableitung seiner Gleichung (43) aus (39) seinen Grund hat. Die Gasmoleküle sind dabei von mir als einfache materielle Punkte vorausgesetzt, weil sich unter dieser Annahme allein die Rechnungen exakt durchführen lassen. In der Natur ist diese Annahme freilich nicht erfüllt, und würden daher die obigen Formeln bei ihrer Anwendung auf Experimente noch einer Modifikation bedürfen. Zieht man die intramolekulare Bewegung nach der Art Maxwells in Rechnung, so würde man erhalten

$$C = \frac{5 \beta p^2}{4 \varrho^2 T A_2 k}, \quad C = \frac{5}{2} w \mu.$$

Doch scheint mir dies sehr willkürlich zu sein, und man könnte leicht, wenn man die intramolekulare Bewegung in anderer Weise in Rechnung zieht, erheblich andere Werte für die Wärmeleitungs-konstante erhalten. Aus diesem Grunde scheint mir eine numerisch exakte Berechnung derselben aus der Theorie, solange man nicht mehr über die intramolekulare Bewegung weiß, unmöglich zu sein, und seit daher die Wärmeleitungs-konstante, deren Größenwert man früher kaum für bestimmbar hielt, durch Stefan in so genauer Weise experimentell bestimmt wurde, scheint mir ihre experimentelle Bestimmung die theoretische an Genauigkeit weit zu übertreffen.

Wie sich die Sache gestaltet, wenn die Funktion f keine lineare Funktion von x ist, oder wenn gleichzeitig Wärmeleitung in anderen Richtungen oder Bewegungen stattfinden, wird kaum einer weiteren Erläuterung bedürfen.

IV. Betrachtung mehratomiger Gasmoleküle.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß jedes Molekül ein einzelner materieller Punkt sei. Dies ist bei den in der Natur vorkommenden Gasen sicher nicht der Fall. Wir werden der Wahrheit offenbar weit näher kommen, wenn wir voraussetzen, daß jedes Molekül aus mehreren materiellen Punkten (Atomen) besteht. Das Verhalten solcher mehratomiger Gasmoleküle soll im gegenwärtigen Abschnitte der Betrachtung unterzogen werden. Ich bemerke, daß die früher eingeführten Bedeutungen der Buchstaben in diesem Abschnitte nicht mehr gelten.

Die Anzahl der materiellen Punkte, also der Atome eines Moleküls, sei r . Dieselben mögen durch ganz beliebige Kräfte zusammengehalten werden, von denen wir bloß voraussetzen, daß die zwischen je zwei Atomen wirksame Kraft eine Funktion des Abstandes der beiden Atome sei, und ihre Richtung in die Verbindungslinie derselben fällt, und daß sie so beschaffen sind, daß sich die Atome eines und desselben Moleküls niemals ganz voneinander trennen können. Ich will diese Kräfte als die inneren Kräfte des Moleküls bezeichnen. Während der weitaus größten Zeit der Bewegung eines Moleküls sollen auf die Atome desselben bloß diese inneren Kräfte wirken. Nur wenn das Molekül einem anderen zufällig sehr nahe kommt, sollen auch die Atome jenes anderen auf die Atome dieses Moleküls wirken und vice versa. Ich nenne diesen Vorgang, während dessen beide Moleküle so nahe sind, daß sie aufeinander eine bemerkbare Wirkung ausüben, einen Zusammenstoß, und die Kräfte, welche dabei die Atome des einen Moleküls auf die des anderen und umgekehrt ausüben, sollen die Kräfte des Zusammenstoßes heißen. Von ihnen setze ich wieder bloß voraus, daß sie Funktionen der Entfernung sind, und längs der Verbindungslinie wirken, sowie daß sie so beschaffen sind, daß sich die Atome der beiden Moleküle nicht austauschen, sondern daß nach dem Stoße jedes Molekül wieder aus denselben Atomen

besteht, wie vor demselben. Um den Moment des Beginnes eines Zusammenstoßes scharf definieren zu können, will ich voraussetzen, die Wechselwirkung zweier Moleküle beginne jedesmal, wenn die Distanz der Schwerpunkte beider Moleküle gleich einer gewissen Größe l wird. Diese Distanz wird dann kleiner als l , wächst dann wieder, und wenn sie wieder gleich l geworden ist, so hört die Wechselwirkung, also der Zusammenstoß wieder auf. Der Moment des Beginns des Zusammenstoßes ist freilich in der Natur wahrscheinlich nicht so scharf markiert. Unsere Schlüsse würden nicht alteriert, wenn ich denselben so charakterisieren würde, wie ich es in der Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen“ S. 11¹⁾ tat. Ich will jedoch hier der Einfachheit halber die oben ausgesprochene Voraussetzung beibehalten, welche übrigens jener anderen an Allgemeinheit nicht einmal nachsteht, da wir ja bloß angenommen haben, daß, solange die Distanz der Schwerpunkte $> l$ ist, keine Wechselwirkung stattfindet. Ist dieselbe $= l$ geworden, so kann in manchen Fällen anfangs die Wechselwirkung noch immer gleich Null sein und erst später beginnen. Um den Zustand eines Moleküls zu einer gewissen Zeit t zu definieren, denken wir uns ein für allemal drei aufeinander senkrechte Richtungen fix im Raume angenommen. Wir ziehen durch den Punkt, an dem sich der Schwerpunkt unseres Moleküls zur Zeit t befindet, drei rechtwinklige Koordinatenachsen parallel jenen drei Richtungen, und bezeichnen die Koordinaten der materiellen Punkte unseres Moleküls bezüglich jener Achsen zur Zeit t mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \dots \zeta_r$. Ferner sei c_1 die Geschwindigkeit des ersten Atoms, u_1, v_1, w_1 ihre Komponenten in den Richtungen der Koordinatenachsen; dieselben Größen seien für das zweite Atom c_2, u_2, v_2, w_2 ; für das dritte c_3, u_3, v_3, w_3 usw. Dann ist der Zustand unseres Moleküls zur Zeit t vollständig bestimmt, wenn wir die Werte der $6r - 3$ Größen

$$(A) \quad \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \dots \xi_{r-1}, \eta_{r-1}, \zeta_{r-1}, u_1, v_1, w_1, u_2 \dots w_r$$

zur Zeit t kennen. ξ_r, η_r, ζ_r sind Funktionen der übrigen ξ, η, ζ , weil der Schwerpunkt Koordinatenanfangspunkt ist. Die Koordinaten des Schwerpunktes unseres Moleküls bezüglich der fixen

¹⁾ S. 247 dieses Bandes.

Koordinatenachsen bestimmen nicht den Zustand, sondern bloß die Lage unseres Moleküls. Wenn nun unser Molekül nicht gerade mit einem anderen im Zusammenstoße begriffen ist, so sind zwischen den Atomen desselben bloß die inneren Kräfte tätig. Wir können also, wenn dieselben gegeben sind, zwischen der Zeit und den $6r - 3$ Größen (A) ebenso viele Differentialgleichungen aufstellen, welche wir die Bewegungsgleichungen des Moleküls nennen wollen. Dieselben werden $6r - 3$ Integrale haben, durch welche die Werte der Variabeln (A) als Funktionen der Zeit und der Werte dieser Größen zu Anfang der Zeit ausgedrückt werden können. Eliminieren wir aus denselben die Zeit, so bleiben noch $6r - 4$ Gleichungen mit ebensoviel willkürlichen Integrationskonstanten übrig. Dieselben seien

$$\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2, \dots \varphi_\rho = a_\rho,$$

wobei die a die Integrationskonstanten, die φ aber Funktionen der Variabeln (A) sind. ρ ist gleich $6r - 4$. Aus diesen Gleichungen können daher alle Variabeln (A) bis auf eine als Funktionen dieser einen und der $6r - 4$ Integrationskonstanten ausgedrückt werden. Ich will diese eine Variable ein für allemal mit x bezeichnen; sie kann sowohl eine der ξ, η, ζ , als auch der u, v, w sein. Solange das Molekül nicht mit einem anderen zusammenstößt, erfüllen die Variabeln (A) die Bewegungsgleichungen des Moleküls, bleiben daher die a konstant und die Werte jeder der Variabeln (A) hängen bloß von dem Werte von x ab. Ich will daher $a_1, a_2, \dots a_\rho$ als die die Bewegungsart des Moleküls bestimmenden Konstanten, x aber als die die Bewegungsphase bestimmende Variable bezeichnen. Solange also das Molekül nicht mit anderen zusammenstößt, ändert sich bloß die die Phase bestimmende Variable x . Wenn dagegen das Molekül mit einem anderen zusammenstößt, so ändern auch die mit a bezeichneten Größen ihre Werte; dann ändert sich auch die Bewegungsart des Moleküls. Wir wollen nun annehmen, wir hätten wieder einen Raum \mathfrak{R} , in welchem sich sehr viele Moleküle befinden. Alle diese Moleküle seien gleichartig, d. h. alle bestehen aus gleichviel materiellen Punkten und die zwischen ihnen wirksamen Kräfte seien für alle identische Funktionen ihrer relativen Lage. Beschreiben wir im Raume \mathfrak{R} irgendwo einen kleineren,

aber doch gegen die Distanz zweier Moleküle großen Raum vom Volumen R , so mögen sich in demselben, wo er sich immer befinden mag, $R N$ Moleküle befinden, von denen

$$R f(t, a_1, a_2 \dots a_e) da_1 da_2 \dots da_e$$

zu einer gewissen Zeit t so beschaffen sein sollen, daß für dieselben

$$(B) \quad \begin{cases} \varphi_1 \text{ zwischen } a_1 & \text{und } a_1 + da_1, \\ \varphi_2 \text{ zwischen } a_2 & \text{und } a_2 + da_2 \dots \end{cases}$$

liegt. Die Konstanten a bestimmen die Bewegungsart eines Moleküls; ist demnach die Funktion f gegeben, so ist damit bestimmt, wie viele Moleküle von jeder der verschiedenen Bewegungsarten sich zur Zeit t im Raume R befinden. Wir sagen daher, die Funktion f bestimmt die Verteilung der verschiedenen Bewegungsarten zur Zeit t unter den Molekülen. Ich nehme wieder an, dieselbe sei schon zu Anfang, daher auch für alle folgenden Zeiten eine gleichförmige, d. h. die Funktion f sei unabhängig von der Lage des Raumes R , sobald derselbe nur sehr groß gegen die durchschnittliche Distanz zweier Nachbarmoleküle ist. Ich sage kürzshalber immer, ein Molekül befindet sich in einem Raume, wenn sich der Schwerpunkt desselben in jenem Raume befindet. Wir nehmen nun an, der Wert der Funktion f für $t = 0$, also $f(0, a_1, a_2 \dots)$ sei gegeben; es soll daraus der Wert der Funktion f für irgend eine andere Zeit berechnet werden. Die Konstanten a ändern ihre Werte bloß infolge der Zusammenstöße; es kann sich daher auch die Funktion f bloß infolge der Zusammenstöße verändern, und unsere Aufgabe ist zunächst, die Gleichungen aufzustellen, durch welche die Veränderung der Funktion f bestimmt ist. Wir müssen da wieder berechnen, wie viele Zusammenstöße während einer gewissen Zeit Δt so geschehen, daß vor denselben die Größen a für eines der zusammenstoßenden Moleküle zwischen den Grenzen (B) liegen, ferner, wie viele so, daß nach denselben die Größen a für eines der Moleküle zwischen den Grenzen (B) liegen. Addieren wir die erstere Zahl zu $f(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots$ und subtrahieren die letztere davon, so erhalten wir die Zahl der Moleküle, für welche nach der Zeit Δt die Größen a zwischen den Grenzen (B) liegen, also die Größe $f(t + \Delta t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots$.

Betrachten wir nun irgend einen Zusammenstoß zweier Moleküle; für das erste der stoßenden Moleküle mögen die Konstanten a vor dem Stoße zwischen den Grenzen (B) liegen. Für das zweite mag

$$(C) \quad \begin{cases} \varphi_1 \text{ zwischen } a_1' & \text{und } a_1' + da_1', \\ \varphi_2 \text{ zwischen } a_2' & \text{und } a_2' + da_2' \text{ usf.} \end{cases}$$

liegen. Dadurch ist der Zusammenstoß noch keineswegs vollständig bestimmt; es muß auch noch die Phase der beiden zusammenstoßenden Moleküle, sowie ihre relative Lage im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes gegeben sein. Sei die Phase des ersten Moleküls dadurch gegeben, daß für dasselbe

$$(D) \quad x \text{ zwischen } x \quad \text{und} \quad x + dx$$

liegt, während für das zweite der zusammenstoßenden Moleküle

$$(E) \quad x \text{ zwischen } x' \quad \text{und} \quad x' + dx'$$

liege. Um die relative Lage beider Moleküle im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes zu bestimmen, bezeichnen wir den Winkel zwischen der Verbindungslinie der Schwerpunkte derselben und der x -Achse mit ϑ , den zwischen der xy -Ebene und einer parallel jener Verbindungslinie durch die x -Achse gelegten Ebene mit ω und es mag im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes

$$(F) \quad \begin{cases} \vartheta \text{ zwischen } \vartheta & \text{und } \vartheta + d\vartheta, \\ \omega \text{ zwischen } \omega & \text{und } \omega + d\omega \end{cases}$$

liegen. Alle Zusammenstöße, welche so geschehen, daß dabei die Bedingungen (B), (C), (D), (E) und (F) erfüllt sind, will ich als Zusammenstöße von der Gattung (G) bezeichnen. Es fragt sich jetzt zunächst, wie viele Zusammenstöße von der Gattung (G) geschehen in der Volumeinheit während einer gewissen Zeit Δt ? Wir wollen da die Annahme machen, die innere Bewegung der Moleküle sei sehr rasch, die Stöße dagegen geschehen so selten, daß ein Molekül von einem Zusammenstoße bis zum nächsten oftmals alle möglichen Bewegungsphasen durchläuft. Wir können dann Δt so groß wählen, daß während Δt jedes Molekül öfter alle möglichen Bewegungsphasen durchläuft, aber doch wieder so klein, daß während Δt nur wenige Zusammenstöße stattfinden, daß sich

also f nur sehr wenig verändert. Betrachten wir irgend eines der Moleküle, deren Bewegungsart zwischen den Grenzen (B) liegt; wir wollen es kurz das Molekül (B) nennen. Wir nahmen an, daß es während der Zeit Δt alle möglichen Phasen oftmals durchläuft; daraus läßt sich beweisen, daß sich die Summe aller jener Zeitmomente, während welcher es im Verlaufe der Zeit Δt die Phase (D) hat, zur ganzen Zeit Δt wie $s dx$ zu $\int s dx$ verhält, daß also die Summe aller dieser Zeitmomente

$$(48) \quad \tau = \Delta t \frac{s dx}{\int s dx}$$

ist, wobei s durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\frac{1}{s} = \sum \pm \frac{\partial a_1}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \eta_1} \cdots \frac{\partial a_e}{\partial w_r}$$

Die Integration ist über alle möglichen x , also über alle möglichen Phasen zu erstrecken. Das Produkt $s dx$ ist immer mit positiven Zeichen zu nehmen.

In der Funktionaldeterminante kommen die Differentialquotienten, nach allen Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}, u_1, v_1, \dots w_r$ bis auf x vor; sie kann also als Funktion von x und den Integrationskonstanten a ausgedrückt werden. Der eben ausgesprochene

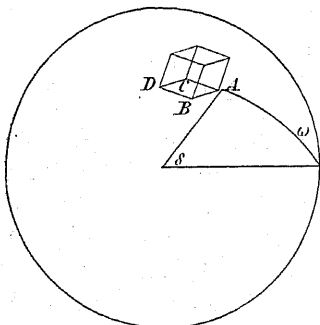


Fig. 3.

Satz läßt sich ganz ähnlich wie Jacobis Prinzip des letzten Multiplikators beweisen; da ich jedoch den Beweis bereits in der Abhandlung: „Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht“ (Sitzungsb. Bd. 63)¹⁾ geführt habe (siehe daselbst die Anmerkung auf S. 15²⁾, so will ich ihn hier nicht noch einmal wiederholen. Ich habe daselbst gezeigt, daß sich die Sache nicht verändert, wenn zur Bestimmung der Phase eine Variable

nicht ausreicht. Die Summe aller Wege, welche während der ganzen oben mit τ bezeichneten Zeit der Schwerpunkt des

¹⁾ Nr. 19 dieses Bandes.

²⁾ S. 272 dieses Bandes.

Moleküls (B) relativ gegen den Schwerpunkt eines Moleküls von der Beschaffenheit (C) zurücklegt, ist gleich $\gamma \tau$, wobei γ die relative Geschwindigkeit der Schwerpunkte beider Moleküle ist. Beschreiben wir nun um den Schwerpunkt des Moleküls (B) eine Kugel vom Radius l , so bildet der Inbegriff aller Punkte dieser Kugel, für welche die Winkel ϑ und ω zwischen den Grenzen l' liegen, ein unendlich kleines Rechteck $ABCD$ (siehe vorstehende Figur 3) vom Flächeninhalte $l^2 \sin \vartheta d\vartheta d\omega$. Denken wir uns dieses Rechteck fest mit dem Schwerpunkte des Moleküls (B) verbunden, so ist also die Summe der Wege, welche es während τ relativ gegen die Moleküle von der Beschaffenheit (C) zurücklegt, ebenfalls $\gamma \tau$. Alle diese Wege bilden mit Vernachlässigung von Unendlichkleinem gleiche Winkel mit den Koordinatenachsen; sie bilden daher auch denselben Winkel (ε) mit der Ebene des Rechtecks $ABCD$, da ja die Geschwindigkeiten sämtlicher Atome des Moleküls (B) durch die Bedingungen (B) und (D) zwischen unendlich nahe Grenzen eingeschlossen sind. Das ganze Volumen, welches daher unser Rechteck während der Summe aller Zeitmomente τ durchwandern würde, wenn es sich bloß mit seiner relativen Geschwindigkeit gegen die Moleküle von der Beschaffenheit (C) bewegte, ist

$$(49) \quad V = l^2 \sin \vartheta d\vartheta d\omega \cdot \sin \varepsilon \cdot \gamma \tau,$$

und es ist leicht einzusehen, daß alle Moleküle, welche sich innerhalb dieses Volumens befinden, mit dem Moleküle (B) so zusammenstoßen, daß dabei die Bedingungen (F) erfüllt sind. Es fragt sich daher nur noch, wie viele Moleküle von der Bewegungsart (C) und der Phase (E) in diesem Volumen liegen werden. Wir wissen, daß in der Volumeinheit $f(t, a_1', a_2' \dots) da_1' da_2' \dots$ Moleküle von der Bewegungsart (C), daher, weil die Verteilung der Bewegungsarten eine gleichförmige ist, $Vf(t, a_1', a_2' \dots) da_1' da_2' \dots$ im Volumen V liegen. Alle diese Moleküle werden jedoch nicht die Phase (E) haben. Vielmehr wird sich die Zahl derjenigen, welche diese Phase haben, zu ihrer Gesamtzahl verhalten wie die Zeit, während welcher ein Molekül die Phase (E) besitzt, zur Zeit, während welcher es alle möglichen Phasen durchläuft, also entsprechend der Gleichung (48) wie $s' dx'$ zu $\int s' dx'$; wobei

$$\frac{1}{s'} = \sum \pm \frac{\partial a_1'}{\partial \xi_1'} \cdot \frac{\partial a_2'}{\partial \eta_1'} \dots$$

ist. Diese Zahl ist also

$$(50) \quad v = \mathcal{V} f(t, a_1', a_2' \dots) d a_1' d a_2' \dots \frac{s' d x'}{\int s' d x'}$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß unter den Molekülen von der Beschaffenheit (C) die verschiedenen Phasen während der Zeit τ gerade so verteilt sind, wie während der Zeit Δt , daß also nicht immer die Phase (D) gerade mit der Phase (E) koinzidiert oder ebensowenig die Phase (E) niemals oder besonders selten mit der (D) gleichzeitig stattfindet. Wenn die Schwingungsdauer der Moleküle von der Beschaffenheit (C) nicht kommensurabel ist mit der der Moleküle von der Beschaffenheit (B), so ist dies selbstverständlich. Wären jedoch diese beiden Schwingungsdauern für alle oder eine endliche Zahl von Molekülpaaren kommensurabel, so müßte dies als eine Eigenschaft der zu Anfang hergestellten Zustandsverteilung vorausgesetzt werden, welche sich dann für alle folgenden Zeiten erhalten würde. Der Ausdruck (50) gibt uns die Zahl der Moleküle im Volumen \mathcal{V} , für welche die Bedingungen (C) und (E) erfüllt sind, und wir wissen, daß alle diese und nur diese während Δt mit dem betrachteten Moleküle von der Beschaffenheit (B), das wir immer das Molekül (B) nannten, so zusammenstoßen, daß dabei die Bedingungen (C), (D), (E) und (F) erfüllt sind. Nun sind aber $f(t, a_1, a_2 \dots) d a_1 d a_2 \dots$ Moleküle von der Beschaffenheit (B) in der Volumeinheit; multiplizieren wir daher noch mit dieser Zahl, so erhalten wir $dn = v f(t, a_1, a_2 \dots) d a_1 d a_2 \dots$ für die Zahl der Molekülpaare, welche in der Volumeinheit während der Zeit Δt so zusammenstoßen, daß alle fünf Bedingungen (B), (C), (D), (E) und (F) erfüllt sind, also für die Zahl der Zusammenstöße von der Gattung (G) während dieser Zeit. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (48), (49) und (50) erhalten wir für diese Zahl den Wert:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} dn &= \frac{f(t, a_1, a_2 \dots) f(t, a_1', a_2' \dots)}{\int s dx \int s' dx'} l^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon d \vartheta d \omega \Delta t. \\ &\times s dx d a_1 d a_2 \dots s' dx' d a_1' d a_2' \dots \end{aligned} \right.$$

Wenn die Werte der Größen

$$(J) \quad a_1, a_2 \dots a_1', a_2' \dots x, x', \vartheta, \omega$$

im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes gegeben sind, so ist damit die Natur des Zusammenstoßes vollkommen charakterisiert; es können also die Werte derselben Größen im Momente des Endes jenes Zusammenstoßes berechnet werden. Es sollen diese Werte im Momente des Endes mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet werden. Es können also dann die Größen

$$(K) \quad A_1, A_2 \dots A_1', A_2' \dots X, X', \Theta, \Omega$$

als Funktionen der Variablen (J) ausgedrückt werden. Ich will den Inbegriff der Bedingungen (B), (C), (D), (E) und (F) kurz als die Bedingungen (G) bezeichnen. Alle Zusammenstöße, für welche die Werte der Variablen im Momente ihres Beginnes den Bedingungen (G) genügten, verlaufen in sehr ähnlicher Weise. Für dieselben werden daher auch im Momente des Endes die Werte der Variablen zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen liegen. Wir wollen annehmen, für alle diese und nur diese Zusammenstöße sollen die Variablen im Momente des Endes zwischen

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \text{ und } A_1 + dA_1, A_2 \text{ und } A_2 + dA_2 \dots A_1' \text{ und } A_1' + dA_1', \\ A_2' \text{ und } A_2' + dA_2' \dots X \text{ und } X + dX, X' \text{ und } X' + dX', \\ \Theta \text{ und } \Theta + d\Theta, \Omega \text{ und } \Omega + d\Omega \end{array} \right.$$

liegen.

Da die Größen (K) Funktionen der Variablen (J) sind, so können wir im Ausdrucke (51) statt einiger Differentiale der Größen (J) auch Differentiale der Größen (K) einführen; wir wollen z. B. statt der vier Differentiale $dx, dx', d\vartheta$ und $d\omega$ die Differentiale von A_1, A_2, A_1' und A_2' einführen, wobei ich übrigens bemerke, daß die vier Größen A_1, A_2, A_1', A_2' nur beispielsweise genommen wurden; wir könnten an ihre Stelle ebensogut vier andere der Größen (K) setzen. Wir erhalten dann

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} dn = \frac{f(a_1, a_2 \dots) f(a_1', a_2' \dots)}{\int s dx \cdot \int s' dx'} s s' s_1 l^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon \Delta t da_1 da_2 \dots \\ da_2 da_1' \dots da_2' dA_1 dA_2 dA_3 dA_4, \end{array} \right.$$

wobei

$$\frac{1}{s_1} = \sum \pm \frac{\partial A_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x'} \cdot \frac{\partial A_1'}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial A_2'}{\partial \omega}$$

ist.

Dies ist die Zahl der Zusammenstöße, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, daß vor denselben die Größen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_e'$ zwischen den Grenzen (B) und (C) und außerdem nach denselben A_1, A_2, A_1' und A_2' zwischen

$$A_1 \text{ und } A_1 + dA_1 \dots A_2' \text{ und } A_2' + dA_2'$$

liegen. Lassen wir in diesem Ausdrucke $a_1, a_2 \dots a_e$ konstant und integrieren bezüglich $a_1', a_2' \dots a_e', A_1, A_2, A_1'$ und A_2' über alle möglichen Werte dieser Größen, so erhalten wir alle Zusammenstöße, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, daß vor denselben die a für eines der zusammenstoßenden Moleküle zwischen den Grenzen (B) lagen, ohne daß hierzu noch irgend eine andere Bedingung hinzukäme. Diese Zahl ist also:

$$(53) \left\{ \begin{aligned} dn' &= da_1 da_2 \dots da_e \Delta t \iint \dots \frac{f(t, a_1, a_2 \dots) f(t, a_1', a_2' \dots)}{f s dx \cdot f s' dx'} s s' s_1 l^2 \gamma \\ &\times \sin \vartheta \sin \varepsilon da_1' da_2' \dots dA_1' dA_2'. \end{aligned} \right.$$

Durch jeden dieser Zusammenstöße wird die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche die a zwischen den Grenzen (B) liegen, also die Zahl $f(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots da_e$ um eins vermindert; es ist also die Zahl dn' von $f(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots$ zu subtrahieren: dann bleibt die Zahl der Moleküle übrig, für welche während Δt die Größen a nicht aufgehört haben, zwischen den Grenzen (B) zu liegen. Hierzu muß noch die Zahl der Zusammenstöße addiert werden, welche so geschehen, daß nicht vor, wohl aber nach denselben die Größen a zwischen den Grenzen (B) liegen. Sie heiße dN' . Dann ist also

$$f(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots da_e - dn' + dN'$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche zur Zeit $t + \Delta t$ die a zwischen den Grenzen (B) liegen. Es ist also

$$(54) \left\{ \begin{aligned} &f(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots da_e - dn' + dN' \\ &= f(t + \Delta t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots da_e. \end{aligned} \right.$$

Die Zahl dN' kann in folgender Weise gefunden werden. Für die Anzahl der Zusammenstöße, welche in der Volum-

einheit während Δt so geschehen, daß bei Beginn derselben die Bedingungen (G) erfüllt sind, fanden wir oben den Ausdruck (51). Für alle diese erfüllen die Variablen im Momente des Endes die Bedingungen (H). Wir brauchen in diesem Ausdrucke bloß die kleinen Buchstaben mit den großen zu vertauschen, um die Zahl der Zusammenstöße zu finden, für welche die Werte der Variablen im Momente des Beginnes Bedingungen erfüllen, die sonst ganz identisch mit den Bedingungen (H) sind, nur daß die Plätze der Schwerpunkte beider Moleküle vertauscht erscheinen, deren Verbindungslinie also gleiche Richtung, aber den entgegengesetzten Sinn hat. Letztere Zahl ist also

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} dN &= \frac{f(t, A_1, A_2 \dots) f(t, A'_1, A'_2 \dots)}{\int S dX \int S' dX'} S S' l^2 \Gamma \sin \Theta \sin E \\ &\times d\Theta d\Omega \Delta t dX dA_1 dA_2 \dots dA_q dX' dA'_1 dA'_2 \dots dA'_q, \end{aligned} \right.$$

wobei $S, S', E \dots$ aus $s, s', \varepsilon \dots$ gebildet werden, indem man darin die Variablen (J) mit den Variablen (K) vertauscht. Für alle diese Zusammenstöße aber werden umgekehrt die Werte der Variablen im Momente des Endes zwischen den Grenzen (G) liegen. Denn es ist klar, daß ein Zusammenstoß, für den im Momente des Beginnes die Bedingungen (G) erfüllt sind, gerade umgekehrt verläuft, wie einer, bei dem im Momente des Beginnes jene mit (H) analogen Bedingungen erfüllt sind. Während also für den ersteren Zusammenstoß im Momente des Endes die Bedingungen (H) erfüllt sind, so sind für den letzteren umgekehrt im Momente des Endes ähnliche wie die Bedingungen (G) erfüllt. Die Formel (55) gibt uns also die Zahl der Zusammenstöße, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, daß im Momente des Endes derselben die Werte der Variablen den Bedingungen (G) genügen. Wir wollen zunächst wieder statt der Differentiale von X, X', Θ und Ω die von a_1, a_2, a'_1, a'_2 einführen, so erhalten wir

$$dN = \frac{f(t, A_1, A_2 \dots) f(t, A'_1, A'_2 \dots)}{\int S dX \int S' dX'} S S' S_1 l^2 \Gamma \sin \Theta \sin E \\ \times \Delta t dA_1 dA_2 \dots dA_q dA'_1 \dots dA'_q da_1 da_2 da'_1 da'_2.$$

In dieser Formel ist

$$\frac{1}{S_1} = \sum \pm \frac{\partial a_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial X'} \cdot \frac{\partial a'_1}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial a'_2}{\partial \Omega},$$

wobei man sich bei Bildung der partiellen Differentialquotienten in der Funktionaldeterminante die a als Funktionen der als independent zu denkenden Größen (G) ausgedrückt denken muß. Führen wir außerdem noch statt der Differentiale von $A_3, A_4 \dots A_e, A_3' \dots A_e'$ die von $a_3, a_4 \dots a_e, a_3' \dots a_e'$ ein, so erhalten wir:

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} dN &= \frac{f(t, A_1, A_2 \dots) f(t, A_1', A_2' \dots)}{\int S dX \int S' dX'} S S' S_1 \sigma l^2 \Gamma \sin \Theta \sin E \\ &\times \Delta t da_1 da_2 \dots da_e' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2', \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\sigma = \sum \pm \frac{\partial A_3}{\partial a_3} \cdot \frac{\partial A_4}{\partial a_4} \dots \frac{\partial A_e'}{\partial a_e'}$$

in welcher Funktionaldeterminante $A_3, A_4 \dots A_e'$ als Funktionen der als independent zu betrachtenden Variabeln $a_1, a_2 \dots a_e', A_1, A_2, A_1', A_2'$ anzusehen sind. In dem Ausdrucke (56) wollen wir uns alle Größen als Funktionen von

$$a_1, a_2 \dots a_e, a_1' \dots a_e', A_1, A_2, A_1', A_2'$$

ausgedrückt denken. Ferner betrachten wir $a_1, a_2 \dots a_e$ als konstant und integrieren bezüglich $a_1', a_2' \dots A_2'$ über alle möglichen Werte dieser Größen. Dadurch erhalten wir die Anzahl der Zusammenstöße, nach denen für eines der stoßenden Moleküle die Größen a zwischen den Grenzen (B) liegen, während sonst alles beliebig ist; also genau die mit dN' bezeichnete Größe. Es ist also

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} dN' &= da_1 da_2 \dots da_e \Delta t \iint \dots \frac{f(t, A_1 \dots) f(t, A_1' \dots)}{\int S dX \int S' dX'} S S' S_1 \sigma l^2 \\ &\times \Gamma \sin \Theta \sin E da_1' da_2' \dots da_e' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2'. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen nun die rechte Seite der Gleichung (54) nach Potenzen von Δt entwickeln und bei der ersten Potenz stehen bleiben, was für sehr kleine Δt gestattet ist. Sie geht dann über in

$$(58) \quad \frac{\partial f(t, a_1, a_2 \dots)}{\partial t} da_1 da_2 \dots da_e \Delta t = -dn' + dN'.$$

Bevor ich hier die Werte von dn' und dN' substituierere, will ich noch an eine Relation erinnern, welche ich bereits in meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehr-

atomiger Gasmoleküle“ (Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 63)¹⁾ bewiesen habe. Die in jener Abhandlung entwickelte Gleichung (19) lautet nämlich nach Einführung unserer Bezeichnungsweise:

$$\begin{aligned} \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon d\xi_1 d\eta_1 \dots d\xi_{r-1} du_1 dv_1 \dots dw_r d\vartheta d\omega \\ = \Gamma \sin \Theta \sin E d\xi_1 dH_1 \dots d\Omega, \end{aligned}$$

wenn $\xi_1, H_1 \dots$ die Werte von $\xi_1, \eta_1 \dots$ im Momente des Endes des Zusammenstoßes bezeichnen. Führen wir in diese Gleichung zunächst $a_1, a_2 \dots a'_e, x, x'$ statt $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ ein, so geht sie über in

$$\begin{aligned} s s' \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon da_1 da_2 \dots da'_e dx dx' d\vartheta d\omega \\ = S S' \Gamma \sin \Theta \sin E dA_1 dA_2 \dots dA'_e dX dX' d\Theta d\Omega, \end{aligned}$$

wobei s und S dieselben Bedeutungen wie früher haben. Führen wir ferner links dA_1, dA_2, dA'_1, dA'_2 statt $dx, dx', d\vartheta, d\omega$ ein, und ähnlich rechts, so erhalten wir

$$\begin{aligned} s s' s_1 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon da_1 da_2 \dots da'_e dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2 \\ = S S' S_1 \Gamma \sin \Theta \sin E dA_1 dA_2 \dots dA'_e da_1 da_2 da'_1 da'_2. \end{aligned}$$

Führen wir auf der rechten Seite dieser Gleichung statt der Differentiale von $A_3, A_4 \dots A_e, A'_3 \dots A'_e$ wieder die von $a_3, a_4 \dots a_e, a'_3 \dots a'_e$ ein, so können wir durch alle Differentiale wegdividieren, und es bleibt uns nur noch:

$$(59) \quad s s' s_1 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon = S S' S_1 \Gamma \sigma \sin \Theta \sin E \dots$$

Nun wollen wir die Werte (53) und (57) für dn' und dN' in die Gleichung (58) substituieren. Dividieren wir dabei durch $da_1 da_2 \dots da_e \Delta t$ weg, ziehen die beiden Integrale rechts in ein einziges zusammen, und beachten endlich noch die Gleichung (59) so ergibt sich

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial f(t, a_1, a_2 \dots a_e)}{\partial t} \\ & = \iint \dots \left[\frac{f(t, A_1, A_2 \dots) f(t, A'_1, A'_2 \dots)}{\int S dX \int S' dX'} - \frac{f(t, a_1, a_2 \dots) f(t, a'_1, a'_2 \dots)}{\int s dx \int s' dx'} \right] \\ & \times s s' s_1 l^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon da'_1 da'_2 \dots da'_e dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2, \end{aligned} \right.$$

und dies ist als die Grundgleichung anzusehen, welche die Veränderung der Funktion $f(t, a_1, a_2 \dots)$ mit wachsender Zeit bestimmt. Alle Größen hat man sich hier als Funktionen der

¹⁾ Nr. 18 dieses Bandes.

$2\rho + 4$ den Zusammenstoß (außer seiner absoluten Lage im Raume) vollkommen bestimmenden Größen $a_1 a_2 \dots a_\rho \dots a_1' \dots a_\rho'$ $A_1 A_2 A_1' A_2'$ ausgedrückt zu denken. $\int S dX$ ist die Größe, welche man erhält, wenn man $\int s dx$ als Funktion dieser $2\rho + 4$ Variablen ausdrückt; dann die kleinen und großen Buchstaben vertauscht, und schließlich wieder die $A_3 A_4 \dots$ als Funktionen der $2\rho + 4$ Variablen ausdrückt, ebenso $\int S dX'$. Man sieht sofort, daß diese Veränderung gleich Null ist, sobald der Ausdruck in der eckigen Klammer für alle Werte der Variablen verschwindet; denn dann verschwindet notwendig auch das Integral, und dies ist nichts anderes, als was ich schon in der bereits zitierten Abhandlung über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen in einer etwas anderen Form gefunden. Allein hiermit ist noch nicht bewiesen, daß das Integral der linken Seite der Formel (60) nur verschwinden kann, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen für alle Werte der Variablen verschwindet. Es könnte vielmehr das Integral auch verschwinden, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen bald positiv, bald negativ würde. Um diesen letzteren Beweis zu liefern, verfahren wir ganz in derselben Weise, wie wir dies früher in der Theorie des Verhaltens einatomiger Gasmoleküle taten. Da die Funktionaldeterminante s nur eine Funktion von $x, a_1 a_2 \dots a_\rho$ ist, und die Grenzen des Integrals $\int s dx$ nur von den a abhängen, so folgt, daß letzteres Integral eine Funktion von $a_1, a_2 \dots a_\rho$ ist. Es ist daher $f(t, a_1, a_2 \dots) / \int s dx$ eine Funktion von $t, a_1, a_2 \dots a_\rho$, und wir wollen setzen:

$$(61) \quad \frac{f(t, a_1, a_2 \dots a_\rho)}{\int s dx} = \varphi(t, a_1, a_2 \dots a_\rho).$$

Ferner werde zur Abkürzung

$$s s' s_1 l^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon = p$$

gesetzt. Dann können wir die Gleichung (13) etwas kürzer so schreiben:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi(t, a_1, a_2 \dots)}{\partial t} \int s dx = \iint \dots [\varphi(t, A_1, A_2 \dots) \varphi(t, A_1', A_2' \dots) \\ - \varphi(t, a_1, a_2 \dots) \varphi(t, a_1', a_2' \dots)] p da_1' da_2' \dots da_\rho' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2' \dots \end{array} \right.$$

Die Größe p besitzt zwei Eigenschaften, die wir später benutzen werden. Erstlich, sie ist symmetrisch bezüglich der

Variablen $a_1, a_2 \dots a_e$ A_1, A_2 und $a'_1, a'_2 \dots a'_e, A'_1, A'_2$, d. h. sie ändert ihren Wert nicht, wenn man gleichzeitig a'_1 mit a_1 und umgekehrt; a'_2 mit a_2 und umgekehrt usw. vertauscht. Denn hierdurch schreibt man bloß dem zweiten der zusammenstoßenden Moleküle den Zustand zu, den vor der Vertauschung das erste hatte, und umgekehrt, und es ist klar, daß sich hierdurch relative Geschwindigkeit usw. beider Moleküle nicht ändert. Daß aber das Produkt ss' und die Größe s_1 ebenfalls in dieser Weise symmetrisch sind, lehrt der bloße Anblick der Ausdrücke für diese Größen. Zweitens, p ist notwendig positiv; denn die durch die Formel (52) dargestellte Zahl dn kann nicht anders als positiv sein; dieselbe enthält aber nebst p lauter positive Faktoren (die Differentiale setzen wir ebenfalls durchweg positiv voraus), folglich muß p ebenfalls positiv sein. Setzen wir jetzt

$$(63) \quad E = \iint \dots \varphi(t, a_1, a_2 \dots) \cdot \int s dx \cdot \log \varphi(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots da_e,$$

wobei \log wieder den natürlichen Logarithmus bezeichnet und die Integrationen über alle möglichen Werte der a zu erstrecken sind, so daß also E nur mehr eine Funktion der Zeit ist, und suchen den Differentialquotienten von E nach der Zeit t . Da die Grenzen der Integrale, durch welche E bestimmt ist, t nicht enthalten, so finden wir dE/dt , indem wir unter dem Integralzeichen nach t differenzieren, und zwar bloß insofern die Größen unter dem Integralzeichen t explizit enthalten, denn die a sind nichts anderes als die Variablen, nach denen integriert werden soll. Wir wissen, daß $\int s dx$ die Zeit auch nicht enthält; dieselbe ist also nur in $\varphi(t, a_1, a_2 \dots)$ enthalten. Berücksichtigen wir noch, daß

$$\iint \dots \varphi(t, a_1, a_2 \dots) \cdot \int s dx \cdot da_1 da_2 \dots da_e$$

die Gesamtzahl der Moleküle in der Volumeinheit, also sein Differentialquotient nach t gleich Null ist, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = \iint \dots \frac{\partial \varphi(t, a_1, a_2 \dots)}{\partial t} \log \varphi(t, a_1, a_2 \dots) \cdot \int s dx \cdot da_1 da_2 \dots da_e.$$

Substituieren wir hier für $\partial \varphi(t, a_1, a_2 \dots) / \partial t$ seinen Wert aus Gleichung (62) und setzen kürzshalber

$$\begin{aligned} \varphi(t, a_1, a_2 \dots) &= \varphi; & \varphi(t, a'_1, a'_2 \dots) &= \varphi'; & \varphi(t, A_1, A_2 \dots) &= \Phi; \\ & & \varphi(t, A'_1, A'_2 \dots) &= \Phi', & & \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$(64) \quad \left\{ \frac{dE}{dt} = \iiint \dots \log \varphi \cdot [\Phi \Phi' - \varphi \varphi'] p da_1 da_2 \dots da_e da_1' \dots da_e' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2' \right.$$

In dem bestimmten Integrale, welches die rechte Seite der Gleichung (64) bildet, können wir wieder die Variablen, nach denen zu integrieren ist, bezeichnen wie wir wollen. Wir können also z. B. $a_1 a_2 \dots A_2$ mit $a_1' a_2' \dots A_2'$ und umgekehrt vertauschen. Dadurch ändert sich weder p noch die Größe in der eckigen Klammer, nur $\log \varphi$ verwandelt sich in $\log \varphi'$, und wir erhalten also, wenn wir zum Schlusse auch noch die Integrationsordnung umkehren, so daß wieder in der alten Reihenfolge integriert wird:

$$(65) \quad \frac{dE}{dt} = \iiint \dots \log \varphi' [\Phi \Phi' - \varphi \varphi'] p da_1 da_2 \dots da_e' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2'.$$

Nun wollen wir diejenigen a , welche in Formel (64) mit den kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden, mit den großen und umgekehrt bezeichnen, so erhalten wir:

$$(66) \quad \frac{dE}{dt} = \iiint \dots \log \Phi [\varphi \varphi' - \Phi \Phi'] P dA_1 dA_2 \dots dA_e' da_1 da_2 da_1' da_2',$$

wobei $P = SS' S_1 l^2 \Gamma \sin \Theta \sin E$ ist. Man erhält also P , indem man p als Funktion der $2\varrho + 4$ Größen $a_1 a_2 \dots a_e' A_1 \dots A_2'$ ausdrückt und dann die großen und kleinen Buchstaben vertauscht. Nun wissen wir aber, daß $A_3 A_4 \dots A_e A_3' \dots A_e'$ als Funktionen von $a_1 a_2 \dots a_e' A_1 A_2 A_1'$ und A_2' ausgedrückt werden können. Wir können also in der Formel (66) statt der Differentiale von $A_3 A_4 \dots A_e A_3' A_4' \dots A_e'$ wieder die von $a_3 a_4 \dots a_e a_3' \dots a_e'$ einführen, was natürlich wieder bloß eine rein formelle Veränderung ist. Wir können ja unter dem Integralzeichen statt der Variablen, nach denen die Integration zu geschehen hat, beliebige andere Funktionen derselben einführen, folglich auch, wenn wir wollen, diejenigen, welche uns früher $a_3 a_4 \dots$ durch $A_3 A_4 \dots$ ausdrückten. Dadurch geht die Gleichung (66) über in

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \dots \log \Phi [\varphi \varphi' - \Phi \Phi'] P \sigma da_1 da_2 \dots da_e' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2',$$

oder wegen der Gleichung (59) in

$$(67) \quad \frac{dE}{dt} = \iiint \dots \log \Phi [\varphi \varphi' - \Phi \Phi'] p da_1 da_2 \dots da_e' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2'.$$

Die Integrationen sind in allen diesen Formeln über alle möglichen Werte der Variablen zu erstrecken. Vertauschen wir hier endlich wieder $a_1 a_2 \dots A_2$ mit $a_1' a_2' \dots A_2'$, so ergibt sich

$$(68) \frac{dE}{dt} = \iint \dots \log \Phi' \cdot [\varphi \varphi' - \Phi \Phi'] p da_1 da_2 \dots da'_e dA_1 dA_2 dA_1' dA_2'$$

Addieren wir nun die Gleichungen (64), (65), (67) und (68) und dividieren durch 4, so bekommen wir

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4} \iint \dots \log \left(\frac{\varphi \varphi'}{\Phi \Phi'} \right) \cdot [\Phi \Phi' - \varphi \varphi'] p da_1 da_2 \dots dA_2'$$

Da nun p immer positiv ist, so folgt aus diesem Ausdrucke sofort wieder, daß dE/dt niemals positiv sein kann, also E selbst nur abnehmen oder konstant bleiben kann. Letzteres kann nur der Fall sein, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer also

$$(69) \varphi(t, a_1, a_2 \dots a_e) \cdot \varphi(t, a_1', a_2' \dots a_e') - \varphi(t, A_1, A_2 \dots A_e) \cdot \varphi(t, A_1', A_2' \dots A_e')$$

für alle Werte der Variablen verschwindet. Es kann daher die Zustandsverteilung nicht periodisch zwischen gewissen Grenzen hin und her schwanken, und für die Grenze, der sie sich mit wachsender Zeit nähert, muß der Ausdruck (69) allgemein verschwinden.

Die Bedeutung der eben vorgenommenen Transformation der Gleichung (64) kann wie im Falle einatomiger Gasmoleküle durch Zerlegung des Integrals in eine Summe veranschaulicht werden. Setzen wir etwa

$$a_1 = b_1 \varepsilon, \quad a_2 = b_2 \varepsilon \dots a'_e = b'_e \varepsilon, \quad A_1 = B_1 \varepsilon \dots,$$

wobei ε eine beliebige sehr kleine Größe, die b aber ganze Zahlen sind; ferner

$$\varphi(t, a_1, a_2 \dots) = w_{b_1 b_2 \dots}, \quad \int s dx = v_{b_1 b_2 \dots}, \quad \varepsilon^{e+4} p = D_{B_1 B_2 \dots B_1' B_2' \dots}$$

Da D von allen Variablen abhängt, so müssen ihm $2\varrho + 4$ Indizes gegeben werden; die übrigen Indizes wurden ihm der Symmetrie wegen beigelegt. Die v sind Konstanten, deren Wert im allgemeinen von den Indizes abhängt; die w sind Funktionen der Zeit. Das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche dann an die Stelle der Gleichung (64) treten, ist dann folgendes:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} v_{b_1 b_2 \dots} \frac{dw_{b_1 b_2 \dots}}{dt} &= \sum D_{B_1 B_2 \dots B_1' B_2' \dots}^{b_1 b_2 \dots b_1' b_2' \dots} \\ &[w_{B_1 B_2 \dots B_1' B_2' \dots} - w_{b_1 b_2 \dots b_1' b_2' \dots}]. \end{aligned} \right.$$

Die Summation ist über alle möglichen Werte der $b_1' b_2' \dots B_1 B_2 \dots$ zu erstrecken. In der Gleichung (70) selbst können $b_1 b_2 \dots b_e$ die verschiedensten Werte haben; sie repräsentiert uns daher ein System vieler Differentialgleichungen. Die Gleichung (59) lautet in unserer gegenwärtigen Bezeichnungweise

$$D_{B_1 B_2 \dots B_1' B_2' \dots}^{b_1 b_2 \dots b_1' b_2' \dots} = D_{B_1' B_2' \dots B_1 B_2 \dots}^{b_1 b_2 \dots b_1' b_2' \dots} = D_{b_1 b_2 \dots b_1' b_2' \dots}^{B_1 B_2 \dots B_1' B_2' \dots}$$

und man findet aus derselben und dem Gleichungssystem (70) leicht, daß der Differentialquotient von

$$\sum v_{b_1 b_2 \dots} w_{b_1 b_2 \dots} \log w_{b_1 b_2 \dots}$$

niemals positiv sein kann. Die Summation in diesen letzten Ausdrücke ist über alle möglichen Werte von $b_1 b_2 \dots b_e'$ zu erstrecken. Diese Größe nimmt also beständig ab, bis

$$w_{b_1 b_2 \dots} w_{b_1' b_2' \dots} = w_{B_1 B_2 \dots} w_{B_1' B_2' \dots}$$

ist für alle möglichen Werte von $b_1 b_2 \dots b_e'$ und für alle mit diesen vereinbaren Werte von $B_1 B_2 B_1' B_2'$. Denn D kann für keine Gruppe von Indizes, der mögliche Zustände der Moleküle entsprechen, gleich Null werden. Es müßte ja sonst ein Zusammenstoß die Wahrscheinlichkeit Null haben. Die durch die Gleichung (63) gegebene Größe E können wir noch etwas anders schreiben. Wir sahen, daß

$$f(t, a_1, a_2 \dots) da_1 da_2 \dots da_e \frac{sdx}{fsdx} = \varphi(t, a_1, a_2 \dots a_e) da_1 da_2 \dots da_e \cdot sdx$$

zur Zeit t die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit ist, für welche die Bedingungen (B) und (D) erfüllt sind. Führen wir statt der Differentiale von $a_1 a_2 \dots a_e$ die von $\xi_1 \eta_1 \dots \zeta_{r-1} u_1 v_1 \dots w_r$ ein, so geht dieser Ausdruck über in

$$\varphi(t, a_1, a_2 \dots a_e) d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} du_1 \dots dw_r.$$

Denken wir uns jetzt wieder $a_1 a_2 \dots a_e$ durch $\xi_1 \eta_1 \dots w_r$ ausgedrückt, so wird φ eine Funktion der letzten Variabeln. Es gehe $\varphi(t, a_1, a_2 \dots a_e)$ in $F(t, \xi_1, \eta_1 \dots w_r)$ über, so daß also

$$F \cdot d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} du_1 \dots dw_r$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit ist, für welche

ξ_1 zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi \dots w_r$ zwischen w_r und $w_r + dw_r$ liegt. Den Ausdruck für E können wir dann schreiben

$$E = \iint \dots F \log F s dx da_1 da_2 \dots da_e,$$

oder wenn wir auch die Differentiale von $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ einführen

$$(71) \quad E = \iint \dots F \log F d\xi_1 d\eta_1 \dots d\xi_{r-1} du_1 \dots dw_r.$$

Ich bemerke noch, daß die Rechnung in derselben Weise geführt werden kann, wenn im Raume R mehrere Gattungen von Molekülen vorhanden sind. Bezeichnen wir die entsprechenden Größen für die zweite Gattung von Molekülen durch Beifügung eines Sternes usw., so kann dann die Größe

$$E = \iint \dots F \log F d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r \\ + \iint \dots F^* \log F^* d\xi_1^* d\eta_1^* \dots dw_r^* +$$

usw. niemals zunehmen.

V. Die Moleküle machen von einem Zusammenstoße bis zum nächsten nicht sehr viele Schwingungen.

Im vorigen Abschnitte machte ich die Annahme, daß jedes Molekül von einem Zusammenstoße bis zum nächsten sehr viele Schwingungen macht. Es läßt sich jedoch auch, wenn dies nicht der Fall ist, mit Leichtigkeit beweisen, daß die durch die Gleichung (71) definierte Größe E nicht zunehmen kann. Es ist hier bequemer, wenn wir die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche zur Zeit t die Variabeln $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ zwischen den Grenzen

$$(L) \quad \xi_1 \text{ und } \xi_1 + d\xi_1 \dots w_r \text{ und } w_r + dw_r$$

liegen, mit $f(t, \xi_1, \eta_1 \dots w_r) d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r$ bezeichnen; f sei also jetzt dieselbe Funktion, welche im vorigen Abschnitte F hieß. Es kann zunächst bewiesen werden, daß die Größe E durch die innere Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert wird, daß sie also konstant bliebe, wenn die Moleküle nicht untereinander zusammenstießen. Es wären dann die Variabeln $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ durch die Differentialgleichungen be-

stimmt, welche wir die Bewegungsgleichungen eines Moleküls genannt haben. Infolge dieser Gleichungen sollen zur Zeit $t + \delta t$ die Variablen für diese und nur diese Moleküle, für die sie zur Zeit t zwischen den Grenzen (L) lagen, zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$(M) \quad \xi_1' \text{ und } \xi_1' + d\xi_1' \dots w_r' \text{ und } w_r' + dw_r'.$$

Ich habe bereits in der Abhandlung über das Wärmeleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen gezeigt, daß man dann hat

$$d\xi_1' d\eta_1' \dots dw_r' = d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r.^1)$$

Fänden keine Zusammenstöße statt, so lägen zur Zeit $t + \delta t$ genau für jene Moleküle die Variablen zwischen den Grenzen (M), für welche sie zur Zeit t zwischen den Grenzen (L) lagen. Die Zahl der ersteren und letzteren Moleküle wäre daher gleich, weil beides ganz dieselben Moleküle wären. Nun ist aber die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche zur Zeit $t + \delta t$ die Variablen zwischen den Grenzen (M) liegen

$$f(t + \delta t, \xi_1' \dots w_r') d\xi_1' \dots dw_r';$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit aber, für welche zur Zeit t die Variablen zwischen den Grenzen (L) liegen, ist

$$f(t, \xi_1 \dots w_r) d\xi_1 \dots dw_r.$$

Es wäre also

$$f(t + \delta t, \xi_1' \dots w_r') d\xi_1' \dots dw_r' = f(t, \xi_1 \dots w_r) d\xi_1 \dots dw_r.$$

(Wir setzen hier wieder voraus, daß die Zustandsverteilung eine gleichförmige an allen Stellen des Gases sei.) Mit Rücksicht auf die Gleichung (72) erhalten wir

$$f(t + \delta t, \xi_1' \dots w_r') = f(t, \xi_1 \dots w_r),$$

also auch

$$(73) \quad f' \log f' d\xi_1' d\eta_1' \dots dw_r' = f \log f d\xi_1 \dots dw_r,$$

wenn wir f für $f(t, \xi_1 \dots w_r)$; f' für $f(t + \delta t, \xi_1' \dots w_r')$ schreiben. Da die Gleichung (73) für jedes System von Differentialen besteht, so erhalten wir auch gleich Ausdrücke, wenn wir

¹⁾ Wenn man mit endlichen Größen rechnen will, lautet diese Gleichung

$$\lim \frac{d\xi_1' d\eta_1' \dots dw_r'}{\delta t d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r} = 1.$$

beiderseits über alle möglichen Werte der Variablen integrieren. Es ist also

$$\iint \dots f' \log f' d\xi_1' \dots dw_r' = \iint \dots f \log f d\xi_1 \dots dw_r,$$

wobei beiderseits über alle möglichen Werte der Variablen zu integrieren ist, weshalb es gleichgültig ist, wie die Integrationsvariablen bezeichnet werden. Man könnte daher auch schreiben:

$$\begin{aligned} \iint \dots f(t + \delta t, \xi_1 \dots w_r) \log f(t + \delta t, \xi_1 \dots w_r) d\xi_1 \dots dw_r \\ = \iint \dots f \log f d\xi_1 \dots dw_r. \end{aligned}$$

Hier ist die Größe rechts der Wert des E zur Zeit $t + \delta t$, die links der Wert des E zur Zeit t . Beide sind also gleich. Die Größe E würde also ihren Wert gar nicht ändern, wenn sich die Atome der Moleküle ihren Bewegungsgleichungen gemäß bewegten, ohne daß die Moleküle untereinander zusammenstießen. Es handelt sich noch darum, zu finden, um wieviel sich die Größe E infolge der Zusammenstöße verändert. Wenn dann δt sehr klein genommen wird, so ist die Gesamtveränderung der Größe E die Summe der Einzelveränderungen. Bezeichnen wir den Zuwachs, welchen E durch die Zusammenstöße erfährt, mit δE , so ist zunächst

$$(74) \quad \delta E = \iint \dots \log f \delta f d\xi_1 \dots dw_r,$$

wobei δf der Zuwachs ist, den f während der Zeit δt durch die Zusammenstöße erfährt, so daß die Zahl (δN) der Moleküle, welche während der Zeit δt in der Volumeinheit den Zustand (L) durch die Zusammenstöße gewinnen, um $\delta f d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r$ größer ist als die Zahl (δn) der Moleküle, welche während derselben Zeit durch die Zusammenstöße diesen Zustand verlieren, daß also

$$(75) \quad \delta N - \delta n = \delta f d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r$$

ist. Ein Molekül hat den Zustand (L), ist dabei ein abgekürzter Ausdruck statt des längeren: Die den Zustand bestimmenden Variablen $\xi_1 \eta_1 \dots w_r$ liegen für dieses Molekül zwischen den Grenzen (L). Ich nehme wieder an, der Zusammenstoß zweier Moleküle beginne, wenn die Schwerpunkte derselben in die Distanz l gelangen. Der Winkel zwischen der Verbindungs-

linie beider Schwerpunkte und der x -Achse heiße wieder ϑ , der zwischen der xy -Ebene und einer parallel jener Verbindungslinie durch die x -Achse gelegten Ebene ω . Dann ist die Zahl der Zusammenstöße in der Volumeinheit während der Zeit δt , für welche im Momente des Beginnes die Variablen ϑ und ω

(N) zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, ω und $\omega + d\omega$,

ferner die Variablen $\xi_1 \eta_1 \dots w_r$ für das eine stoßende Molekül zwischen den Grenzen (L), für das andere aber zwischen irgendwelchen anderen Grenzen, z. B.

(P) ξ_1' und $\xi_1' + d\xi_1' \dots w_r'$ und $w_r' + dw_r'$

liegen,

$$f d\xi_1 \dots dw_r f' d\xi_1' \dots dw_r' g l^2 \sin \vartheta d\vartheta d\omega \delta t,$$

wobei g die relative Geschwindigkeit der Schwerpunkte der Moleküle ist. Für alle diese und nur diese Moleküle sollen im Momente des Endes des Stoßes ϑ und ω zwischen den Grenzen

(N*) Θ und $\Theta + d\Theta$, Ω und $\Omega + d\Omega$,

ferner die Variablen $\xi_1, \eta_1 \dots w_r$ für das erste Molekül zwischen den Grenzen

(L*) Ξ_1 und $\Xi_1 + d\Xi_1 \dots W_r$ und $W_r + dW_r$,

für das andere aber zwischen den Grenzen

(P*) Ξ_1' und $\Xi_1' + d\Xi_1' \dots W_r'$ und $W_r' + dW_r'$

liegen. Durch jeden dieser Zusammenstöße verliert ein Molekül den Zustand (L). Im ganzen verlieren daher in der Volumeinheit während der Zeit δt

$$\delta n = f d\xi_1 \dots dw_r \delta t \iint \dots f' d\xi_1' \dots dw_r' g l^2 \sin \vartheta d\vartheta d\omega$$

Moleküle den Zustand (L), wobei wieder die Integrationen über alle möglichen Werte der Differentiale zu erstrecken sind. Die Anzahl der Zusammenstöße, welche während der Zeit δt in der Volumeinheit so geschehen, daß im Momente ihres Beginnes die Variablen zwischen den Grenzen (L*), (N*) und (P*) liegen, ist

$$(76) \quad \delta v = F d\xi_1 \dots dW_r F' d\xi_1' \dots dW_r' G l^2 \sin \Theta d\Theta d\Omega \delta t.$$

Für alle diese Zusammenstöße liegen die Variablen im Momente des Endes zwischen den Grenzen (L), (N) und (P), weil diese Zusammenstöße gerade umgekehrt wie die früher betrachteten verlaufen.¹⁾ Da die Variablen

$$(R) \quad \Xi_1 \dots W_r, \Xi_1' \dots W_r', \Theta, \Omega$$

Funktionen von

$$(Q) \quad \xi_1 \dots w_r, \xi_1' \dots w_r', \vartheta, \omega$$

sind, so kann man in den Ausdruck (76) statt der ersteren auch die letzteren Variablen einführen. Es wird dann

$$G \sin \Theta d \Xi_1 \dots d W_r' d \Theta d \Omega = g \sin \vartheta d \xi_1 \dots d w_r' d \vartheta d \omega,$$

wie aus dem allgemeinen Theoreme folgt, das ich im zweiten Abschnitte meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen“ bewiesen habe. Infolgedessen wird

$$(77) \quad \delta v = F F' d \xi_1 \dots d w_r' \sin \vartheta g l^2 d \vartheta d \omega \delta t.$$

Im obigen wurde F, F', f' für $f(t, \Xi_1 \dots W_r), f(t, \Xi_1' \dots W_r')$ $f(t, \xi_1' \dots w_r')$ geschrieben. G ist die Größe, die man erhält, wenn man in g die Variablen (Q) mit den Variablen (R) vertauscht. Im Ausdrucke (77) hat man sich überall die Variablen (R) als Funktionen der Variablen (Q) ausgedrückt zu denken. Integrieren wir denselben bezüglich $\xi_1' \dots w_r', \vartheta, \omega$ über alle möglichen Werte, so erhalten wir die Zahl aller Moleküle, welche in der Volumeneinheit während der Zeiteinheit durch die Zusammenstöße den Zustand (L) gewinnen, also die Zahl, die schon früher mit δN bezeichnet wurde. Es ist also

$$\delta N = d \xi_1 \dots d w_r \delta t \iint \dots F F' g l^2 \sin \vartheta d \xi_1' \dots d w_r' d \vartheta d \omega.$$

Setzen wir diese Werte für δn und δN in die Gleichung (75) ein, so erhalten wir

$$\delta f = \delta t \iint \dots (F F' - f f') g l^2 \sin \vartheta d \xi_1' \dots d w_r' d \vartheta d \omega,$$

¹⁾ Natürlich sind beim Vergleich des Endzustandes eines Zusammenstoßes mit dem Anfangszustande eines anderen die Plätze der Schwerpunkte beider Moleküle zu vertauschen, weil sich dieselben zu Anfang gegeneinander, zu Ende aber voneinander bewegen.

und wenn wir dies in die Gleichung (74) substituieren,

$$\delta E = \delta t \iint \dots \log f(FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta d\xi_1 \dots dw_r d\xi_1' \dots dw_r' d\vartheta d\omega.$$

Die Verwechslung des ersten und zweiten der zusammenstoßenden Moleküle liefert, wie früher

$$\delta E = \delta t \iint \dots \log f'(FF' - ff'') g l^2 \sin \vartheta d\xi_1 \dots dw_r d\xi_1' \dots dw_r' d\vartheta d\omega.$$

Führen wir in den beiden letzten Gleichungen statt der Integrationsvariablen (Q) die Variablen (R) ein, was immer möglich ist, da man in einem bestimmten Integrale statt der Integrationsvariablen beliebige Funktionen derselben einführen kann, und vertauschen dann die großen und kleinen Buchstaben, was wieder erlaubt ist, da man in einem bestimmten Integrale die Variablen bezeichnen kann wie man will, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\delta E = - \delta t \iint \dots \log F(FF' - ff'') g l^2 \sin \vartheta d\xi_1 \dots dw_r' d\vartheta d\omega,$$

$$\delta E = - \delta t \iint \dots \log F'(FF' - ff'') g l^2 \sin \vartheta d\xi_1 \dots dw_r d\vartheta d\omega.$$

(Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Variablen (R) dieselben Funktionen der (Q), wie umgekehrt die (Q) von den (R) sind.) Die Addition aller dieser vier Gleichungen aber liefert

$$\delta E = \frac{1}{4} \delta t \iint \dots \log \left(\frac{ff'}{FF'} \right) \cdot (FF' - ff'') g l^2 \sin \vartheta d\xi_1 \dots dw_r d\vartheta d\omega,$$

woraus wieder ersichtlich ist, daß die Größe E durch die Zusammenstöße nur abnehmen kann, und da sie durch die Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert wird, so folgt, daß sie auch im ganzen nur abnehmen kann.

Wenn die Zustandsverteilung zu Anfang der Zeit keine gleichförmige war, so enthält die Funktion f auch die Koordinaten x, y, z derjenigen Stelle des Gases, für welche sie die Geschwindigkeitsverteilung darstellt. Alsdann tritt an die Stelle von E ein etwas allgemeinerer Ausdruck. Wenn

$$f(t, x, y, z, \xi_1, \eta_1 \dots w_r) dx dy dz d\xi_1 \dots dw_r,$$

die Zahl der Moleküle ist, welche sich zur Zeit t im Volumenelemente $dx dy dz$ mit den Koordinaten x, y, z befinden, und für welche die den Zustand bestimmenden Variablen zwischen den Grenzen (L) liegen, so kann die Größe

$$(78) \quad E = \iiint \dots f \log f \cdot dx dy dz d\xi_1 \dots dw_r$$

nicht zunehmen. Um hierfür den Beweis zu liefern, wollen wir das Problem noch etwas allgemeiner auffassen. Gesetzt, wir hätten sehr viele Systeme materieller Punkte (Moleküle). Jedes derselben bestehe aus r materiellen Punkten $m_1 m_2 \dots m_r$ (die m sollen zugleich die Massen derselben sein). Die Masse m_1 sei für alle Systeme gleich; ebenso die Masse m_2 usw. x_1, y_1, z_1 seien die Koordinaten, u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeitskomponenten von m_1 . Analoge Bedeutung haben $x_2 y_2 \dots$; und zwar ist es gleichgültig, ob der Koordinatenanfangspunkt für die verschiedenen Systeme derselbe oder verschieden ist. Die Kräfte, welche auf irgend einen der materiellen Punkte wirken, seien solche Funktionen der Koordinaten $x_1 y_1 z_1 x_2 \dots z_r$, daß eine Kraftfunktion existiert, und zwar sei diese Kraftfunktion für alle Systeme dieselbe Funktion von $x_1 y_1 \dots z_r$. Bezeichnen wir dann wieder mit $f(t, x_1, y_1, z_1 \dots w_r) dx_1 dy_1 \dots dw_r$ die Anzahl der Systeme, für welche die Variablen $x_1 y_1 z_1 x_2 \dots z_r u_1 \dots w_r$ zwischen den Grenzen

$$(S) \quad x_1 \text{ und } x_1 + dx_1 \dots w_r \text{ und } w_r + dw_r$$

liegen und setzen

$$(79) \quad E = \iiint \dots f \log f dx_1 dy_1 \dots dw_r,$$

so kann genau wie früher bewiesen werden, daß sich die Größe E durch die Bewegung der materiellen Punkte der Systeme nicht ändert, solange zwischen denselben nur die inneren Kräfte des betreffenden Systems tätig sind. Es soll nun auch zwischen den materiellen Punkten verschiedener Systeme Wechselwirkung stattfinden, und zwar soll die zwischen je zwei Punkten tätige Kraft Funktion ihrer Entfernung sein und in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirken. Die Bedingungen, wann die Wechselwirkung zweier verschiedener Systeme beginnt, sollen so sein, daß niemals (oder doch nur höchst selten) drei Systeme gleichzeitig in Wechselwirkung kommen. Sonst aber können sie beliebig sein. (Es kann, um ein Beispiel zu geben, die Wechselwirkung zweier Systeme eintreten, so oft ein materieller Punkt des einen irgend einem des anderen ungewöhnlich nahe kommt.) Die Anzahl der Paare von Systemen,

welche während der Zeit δt so in Wechselwirkung kommen, daß im Momente des Beginnes der Wechselwirkung die den Zustand bestimmenden Variablen für das eine System zwischen den Grenzen (S), für das andere aber zwischen den Grenzen

$$x_1' \text{ und } x_1' + dx_1' \dots w_r' \text{ und } w_r' + dw_r'$$

liegen, ist dann wieder

$$(80) \quad f(t, x_1 \dots w_r) f(t, x_1' \dots w_r') dx_1 \dots dw_r dx_1' \dots dw_r' \delta t \cdot \varphi.$$

φ ist eine Funktion der relativen Lage und der Geschwindigkeiten der Atome beider Systeme. Berücksichtigt man, daß diese Funktion wieder die allgemeine durch die Gleichung (19) meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“ ausgedrückte Eigenschaft besitzen muß, so kann man ganz wie früher beweisen, daß die Größe E durch die Wechselwirkung der verschiedenen Systeme nur abnehmen kann. Der Beweis kann auch geführt werden, wenn nicht alle Systeme gleich beschaffen sind, sondern wenn sie zwei oder mehreren Gattungen angehören, aber von jeder Gattung sehr viele Individuen vorhanden sind. (Man übersieht sofort, daß ein Gemisch von Gasmolekülen mit ungleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung nur ein spezieller Fall hiervon ist.) Wenn die Kraftfunktion den Wert gz hat, findet man für einatomige Gasmoleküle

$$f = A e^{-h \left(gz + \frac{mc^2}{2} \right)}.$$

Die bekannten Formeln für das barometrische Höhenmessen, sowie alle aerostatischen erweisen sich also ebenfalls als spezielle Fälle der Formeln für das Wärmegleichgewicht.

VI. Auflösung der Gleichung (81) und Berechnung der Entropie.

Wir haben bewiesen, daß für mehratomige Gasmoleküle im Falle des Gleichgewichtes der lebendigen Kraft der Ausdruck (69) verschwinden muß, daß also für dasselbe

$$(81) \quad \varphi(a_1, a_2 \dots) \varphi(a_1', a_2' \dots) - \varphi(A_1 A_2 \dots) \varphi(A_1' A_2' \dots) = 0$$

sein muß für alle möglichen Werte der Variablen.

$$(82) \quad a_1 a_2 \dots a_1' a_2' \dots A_1 A_2 \dots A_1' A_2' \dots A_2'.$$

Es handelt sich noch darum, eine Funktion φ zu finden, welche diese Gleichung erfüllt. Es ist klar, daß, wenn λ die gesamte in einem Moleküle enthaltene lebendige Kraft und Arbeit, A und h Konstanten sind, der Wert $\varphi = A e^{-h\lambda}$ notwendig die Gleichung (81) erfüllt. Es ist dies die Lösung des Problems, welche ich schon in der Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“ fand. Allein es wäre noch der Beweis zu liefern, daß dies die einzig mögliche Lösung der Gleichung (81) ist. Während dieser Beweis für einatomige Gasmoleküle der allerleichteste Schritt ist, so ist er hier unstreitig der schwierigste, da es hier nicht möglich ist, die verschiedenen Gleichungen, welche die Werte der Variablen vor und nach dem Stoße miteinander verbinden, wirklich allgemein anzugeben. Doch läßt sich wenigstens für zweiatomige Moleküle unter Voraussetzung einer bestimmten Art der Wechselwirkung der Moleküle während des Zusammenstoßes beweisen, daß es die einzig mögliche Lösung ist. Nehmen wir an, jedes Molekül bestehe aus zwei Atomen. r sei ihre Distanz, $(m/2)\chi'(r)$ die Kraft, mit der sie sich anziehen, wenn das Molekül mit keinem anderen im Zusammenstoße begriffen ist, so daß $(m/2)\chi(r)$ die Kraftfunktion ist. Damit die Formeln nicht zu weitläufig werden, nehme ich an, daß alle Atome gleiche Massen haben (der allgemeinere Fall kann dann sofort in ganz analoger Weise berechnet werden). Die Summe des Wertes der Kraftfunktion und der lebendigen Kraft beider Atome eines Moleküls bleibt von einem Zusammenstoße bis zum nächsten konstant. Bezeichnen wir die Größe, welche man erhält, wenn man diese Summe mit der halben Masse eines Atoms dividiert, mit a , das vierfache Geschwindigkeitsquadrat des Schwerpunktes des Moleküls mit b , und den vierfachen Flächenraum, den der vom Schwerpunkte zu einem Atome gezogene Radiusvektor in der Zeiteinheit zurücklegt, mit c , so sind a , b , c die einzigen die Natur der Atombahn bestimmenden Integrationskonstanten. Die übrigen bestimmen bloß deren Lage im Raume. Man kann durch die Verbindungslinie der beiden Moleküle eine Ebene so legen, daß die Geschwindigkeitskomponente w senkrecht zu dieser Ebene für beide Atome gleich ist. Diese Ebene soll die Bahnebene heißen. α sei ihr Winkel mit irgend einer fixen Ebene, β der

Winkel zwischen ihrer Durchschnittslinie mit der fixen Ebene und einer in der fixen Ebene gezogenen fixen Geraden. γ sei der Winkel, welchen diejenige Geschwindigkeitskomponente des Schwerpunktes des Moleküls, welche parallel der Bahnebene ist, δ der Winkel, welchen die Apsidenlinie der Bahnkurve der Atome bei ihrer Bewegung um den Schwerpunkt mit der Durchschnittslinie der Bahnebene und der fixen Ebene einschließen. Das Gas sei nach allen Richtungen gleich beschaffen; von einem Zusammenstoße eines Moleküls bis zum nächsten sollen sehr viele Maxima und Minima der Entfernung seiner Atome (Apsidenstellungen) eintreten. Endlich soll der Winkel zweier sich folgender Apsidenlinien in keinem rationalen Verhältnisse zu π stehen (mit Ausnahme unendlich weniger spezieller Bahnformen). Dann sind $a, b, c, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ die im vorigen Abschnitte mit $a_1 a_2 \dots a_e$ bezeichneten Integrationskonstanten, r ist gleich 2, $\rho = 6r - 4 = 8$, die Größe $\varphi(a_1, a_2 \dots a_e) da_1 \dots da_e$ muß dann die Form

$$\varphi(a, b, c, w) \sin \alpha da db dc dw d\alpha d\beta d\gamma d\delta$$

haben. Infolge der Gleichberechtigung aller Richtungen im Raume kann φ die Winkel α, β, γ nicht enthalten. Infolge unserer Annahme über die Apsidenlinien sind auch alle Werte des δ gleichberechtigt. Wir wollen jetzt bloß solche Zusammenstöße der Betrachtung unterziehen, bei denen w und die Bahnebene für beide zusammenstoßende Moleküle identisch sind. Die Gleichung (81) muß für alle Zusammenstöße, also auch für diese gelten. Nun wird aber α durch die Zusammenstöße nicht verändert, die Gleichung (81) verwandelt sich daher in

$$(83) \varphi(a, b, c, w) \cdot \varphi(a', b', c', w) = \varphi(A, B, C, w) \cdot \varphi(A', B', C', w).$$

Wir wollen noch eine spezielle Annahme über die Wechselwirkung zweier Moleküle während des Zusammenstoßes machen. Der Stoß zweier Moleküle soll darin bestehen, daß ein Atom des einen Moleküls sich mit einem des anderen wie elastische Kugeln stößt. (Wir bezeichnen die zusammenstoßenden Atome als die ersten der betreffenden Moleküle.) Legen wir jetzt parallel der Verbindungslinie der Centra der stoßenden Atome im Momente des Stoßes eine fixe x -Achse (jene Verbindungslinie soll in die Bahnebene fallen) und senkrecht darauf aber parallel der Bahnebene eine fixe y -Achse. Im Momente des

Beginnes des Zusammenstoßes seien u, v die Geschwindigkeitskomponenten des ersten Atoms des ersten der beiden stoßenden Moleküle in der Richtung dieser beiden Koordinatenachsen; ξ, η die Koordinaten desselben bezüglich eines Systems, das seinen Ursprung im Schwerpunkte des Moleküls hat, und dessen Achsen parallel unseren fixen sind. u_1, v_1 seien die Geschwindigkeitskomponenten des zweiten Atoms des ersten Moleküls. Die Bezeichnung der auf das andere Molekül und auf den Moment des Endes des Zusammenstoßes bezüglichen Größen leiten wir hieraus in der immer gebrauchten Weise ab. Dann ist

$$(84) \quad \begin{cases} a = u^2 + v^2 + u_1^2 + v_1^2 + 2w^2 + \chi, \\ b = (u + u_1)^2 + (v + v_1)^2 + 4w^2, \\ a' = u'^2 + v'^2 + u_1'^2 + v_1'^2 + 2w'^2 + \chi', \\ b' = (u' + u_1')^2 + (v' + v_1')^2 + 4w'^2. \end{cases}$$

Durch den Zusammenstoß kehren sich bloß die x -Komponenten der Geschwindigkeit der stoßenden Atome um; es ist also $U = u', U' = u$; alle anderen großen Buchstaben haben denselben Wert wie die entsprechenden kleinen. Es ist also

$$(85) \quad \begin{cases} A = u'^2 + v^2 + u_1^2 + v_1^2 + 2w^2 + \chi, \\ B = (u' + u_1)^2 + (v + v_1)^2 + 4w^2, \\ A' = u^2 + v'^2 + u_1'^2 + v_1'^2 + 2w'^2 + \chi', \\ B' = (u + u_1')^2 + (v' + v_1')^2 + 4w'^2. \end{cases}$$

Wir wollen nun zeigen, daß, wenn beliebige Werte der Größen

$$(86) \quad a, b, c, a', b', c', w, w'$$

gegeben sind, diejenigen von den den Zustand des Systems im Momente des Beginnes des Zusammenstoßes definierenden Größen $u, v, \xi \dots$, welche hierdurch noch nicht bestimmt sind, immer so gewählt werden können, daß gegebene Werte von

$$(87) \quad A, B, C, A', B', C'$$

nach dem Stoße zum Vorschein kommen, wenn nur die Größen (86) und (87) die einzige Bedingung

$$(88) \quad a + a' = A + A',$$

also die Gleichung der lebendigen Kraft erfüllen, daß also

zwischen den Größen (86) und (87) keine andere als diese Gleichung besteht.

Setzen wir zur Abkürzung

$$b - a - B + A = g, \quad b' - a' - B' + A' = g',$$

so sind g und g' ebenfalls gegebene Größen.

Wir finden

$$g = 2u_1(u - u'), \quad g' = 2u'_1(u' - u),$$

daraus

$$(89) \quad u' = u - \frac{g}{2u_1}, \quad u'_1 = -\frac{g'}{g}u_1$$

und folglich

$$(90) \quad \begin{cases} b - B = (u + u_1)^2 - \left(u - \frac{g}{2u_1} + u_1\right)^2 \\ b' - B' = \left(u - \frac{g}{2u_1} - \frac{g'}{g}u_1\right)^2 - \left(u - \frac{g'}{g}u_1\right)^2. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$b - B + b' - B' = g + g',$$

also die Gleichung der lebendigen Kraft. Diese muß erfüllt sein. Man kann dann u_1 willkürlich wählen. Die andere Gleichung (90) bestimmt u quadratisch, die Gleichungen (89) aber bestimmen u' und u'_1 . Die Gleichungen (89) und (90) aber ersetzen vier der Gleichungen (84) und (85) vollkommen. Es bleiben noch die vier anderen übrig. Dazu kommen aber die Gleichungen für die c . Sie lauten:

$$(91) \quad \begin{cases} c = \xi(v - v_1) - \eta(u - u_1), & c' = \xi'(v' - v'_1) - \eta'(u' - u'_1), \\ C = \xi(v - v_1) - \eta(u' - u_1), & C' = \xi'(v' - v'_1) - \eta'(u - u'_1), \end{cases}$$

woraus folgt

$$\eta = \frac{c - C}{u' - u}, \quad \eta' = -\frac{c' - C'}{u' - u},$$

was wieder zwei der Gleichungen (91) ersetzt, und η und η' bestimmt. Es bleiben noch vier der Gleichungen (84) und (85) und zwei der Gleichungen (91) zu erfüllen, also z. B.

$$(92) \quad \begin{cases} v^2 + v_1^2 = a - u^2 - u_1^2 - 2w^2 - \chi, \\ (v + v_1)^2 = b - (u + u_1)^2 - 4w^2, \\ v - v_1 = \frac{1}{\xi}[c + \eta(u - u_1)]; \end{cases}$$

$$(93) \quad \begin{cases} v'^2 + v_1'^2 = a' - u'^2 - u_1'^2 - 2w'^2 - \chi', \\ (v' + v_1')^2 = b' - (u' + u_1')^2 - 4w'^2, \\ v' - v_1' = \frac{1}{\xi} [c' + \eta(u - u_1)], \end{cases}$$

in welchen Gleichungen auch die u und η als gegeben zu betrachten sind, weil wir sie durch gegebene Größen ausdrückten. Eliminiert man aus den Gleichungen (92) die v , so bleibt eine einzige Gleichung für ξ , welche dann auch die v zu bestimmen gestattet; ebenso bestimmt man aus den Gleichungen (93) ξ' , v' und v_1' . Wenn also nun die Gleichung (88) erfüllt ist, so können wir jede der Variablen ξ , η , u , $v \dots$ gesondert durch die gegebenen Größen

$$(T) \quad a, b, c, w, a', b', c', w', A, B, C, A', B', C'$$

ausdrücken; zwischen den letzteren kann also nur die Gleichung (88) bestehen. Die Gleichung (85) muß also für alle Werte der Variablen (T), welche die Gleichung (88) befriedigen, erfüllt sein. Es muß also φ die Form $A e^{-h\lambda}$ haben. Daß auch w in φ nicht vorkommen darf, beweist man leicht aus den übrigen Zusammenstößen. Da schon bei den eben betrachteten Zusammenstößen u_1 völlig willkürlich war, und bei Betrachtung aller Zusammenstöße natürlich noch mehr willkürliche Größen hineinkommen, so ist es nicht wahrscheinlich, daß für andere Wirkungsgesetze während des Zusammenstoßes andere Lösungen möglich werden. Doch weiß ich vorläufig kein anderes Mittel des Beweises, als daß man jedes Wirkungsgesetz speziell behandelt.

Indem wir als sehr wahrscheinlich annehmen, daß für den Fall des Wärmegleichgewichtes die Funktion φ immer die Form $A e^{-h\lambda}$ haben muß, können wir jetzt die Größe E für Körper berechnen, zwischen deren Atomen sich bereits das Wärmegleichgewicht hergestellt hat. Als den allgemein gültigen Wert für E (aus dem nicht gewisse, wegen der speziellen Natur des Problems konstante Größen weggelassen wurden) bezeichnen wir den Wert (79).

Würden wir denselben als Entropie bezeichnen, so hätte dies jedoch den Übelstand, daß die Gesamtentropie zweier Körper durch eine Konstante der Summe der Entropie beider einzelnen verschieden wäre. Wir betrachten daher lieber

folgenden, nur durch eine Konstante vom Ausdrucke (79) verschiedenen:

$$E^* = \int \int \dots \int f \log \left(\frac{f}{N} \right) dx_1 \dots dx_r.$$

Hierbei ist N die gesamte Zahl der Moleküle des Gases, $f dx_1 \dots dx_r$ die Zahl derjenigen, für welche $x_1, y_1 \dots w_r$ zwischen den Grenzen

$$(S) \quad x_1 \text{ und } x_1 + dx \dots w_r \text{ und } w_r + dw_r$$

liegen. Setzen wir

$$dx_1 dy_1 \dots dz_r = d\sigma, \quad du_1 dv_1 \dots dw_r = ds, \quad \frac{f}{N} = f^*,$$

so hat f^* auch eine einfache Bedeutung. Es ist $f^* ds d\sigma$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül den Zustand (S) hat (die Zeit, während der es ihn hat, dividiert durch die ganze Zeit, während der es sich bewegte).

Es wird dann

$$(94) \quad E^* = N \int \int f^* \log f^* ds d\sigma.$$

Für einatomige Gase ist, wenn N die Gesamtzahl der Moleküle des Gases, V der von ihnen eingenommene Raum, m die Masse, T die mittlere lebendige Kraft eines Atoms ist,

$$f^* = \frac{1}{V \left(\frac{4\pi T}{3m} \right)^{3/2}} e^{-\frac{3m}{4T}(u^2 + v^2 + w^2)},$$

daher

$$\begin{aligned} E^* &= N \int \int \dots \int f^* \log f^* dx dy dz du dv dw \\ &= -N \log \left[V \left(\frac{4\pi T}{3m} \right)^{3/2} \right] - \frac{3}{2} N, \end{aligned}$$

was, da m und N konstant sind, bis auf einen konstanten Faktor und Addenden mit dem Ausdrucke für die Entropie einatomiger Gase übereinstimmt. Für Gase mit r -atomigen Molekülen ist

$$f^* = A e^{-h \left(\chi + \frac{\Sigma m c^2}{2} \right)},$$

wobei χ die Kraftfunktion, $\Sigma(m c^2/2)$ die gesamte lebendige Kraft eines Moleküls ist. Dabei ist wegen $\int \int f^* ds d\sigma = 1$

$$T = \frac{3}{2h}, \quad A = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{mh} \right)^{3r/2} \int e^{-h\chi} d\sigma}.$$

Man findet also

$$(95) \quad E^* = N \log A - h N \frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} - \frac{3}{2} r N.$$

Um die Beziehung der Größe E^* zum zweiten Hauptsatze in der Form $\int (dQ/T) < 0$ zu erkennen, wollen wir uns unter einem System von r materiellen Punkten, wie wir es bis jetzt betrachteten, nicht ein Gasmolekül, sondern einen ganzen Körper vorstellen. (Wir wollen ihn das System A nennen.) Mit ihm sei während einer gewissen Zeit ein zweites System (B) materieller Punkte, also ein zweiter Körper in Wechselwirkung. Die beiden Körper können von gleicher oder verschiedener Beschaffenheit sein. Theoretisch wird der Effekt der Wechselwirkung nicht bloß von der Art und Weise der Einwirkung, sondern auch von den Phasen abhängen, in denen sich beide Körper im Momente des Beginnes der Wechselwirkung befinden. Hiervon ist nun erfahrungsmäßig nichts zu merken, was zweifellos daher rührt, daß der Effekt der Phase durch die große Anzahl der in Wechselwirkung tretenden Moleküle kompensiert wird. (Eine ähnliche Ansicht hat bereits Clausius unlängst ausgesprochen.) Um den Effekt der Phase zu eliminieren, wollen wir statt eines Systems (A) sehr viele (N), gleichbeschaffene, aber in verschiedenen Phasen befindliche, betrachten, die übrigens untereinander in gar keiner Wechselwirkung stehen sollen. $f(t, x_1 \dots w_r)$ $ds d\sigma$ sei wieder die Zahl der Systeme mit dem Zustande S , und wir setzen $f/N = f^*$. Auch von der Gattung (B) seien sehr viele Systeme vorhanden. Eine der Funktion f analoge Bedeutung für dieselben habe die Funktion $f'(t, x_1' \dots w_r')$. Die Funktionen f^* und f' können auch diskontinuierlich sein, so daß sie nur, wenn die Variablen sehr nahe gewissen durch eine oder mehrere Gleichungen verbundenen Werten liegen, groß, sonst aber verschwindend sind. Als diese Gleichungen können diejenigen gewählt werden, die den äußeren sichtbaren Bewegungszustand des Körpers und die in ihm enthaltene lebendige Kraft charakterisieren, wobei zu beachten ist, daß lebendige Kraft sichtbarer Bewegung in ihrer Verteilung an die Atome so weit von der schließlich sich bildenden stationären Verteilung abweicht, daß sie Unendliches in E^* liefert, weshalb sie auch beim zweiten Hauptsatze als Wärme von unendlicher Temperatur zählt. Auf jedes der

Systeme (A) soll eines der Systeme (B) wirken, und zwar soll der Beginn der Wechselwirkung mit den verschiedensten Phasen zusammenfallen. Alle Effekte, welche nicht von der Phase abhängen, müssen dann gerade so ausfallen, als ob nur ein System (A) auf ein System (B) in einer beliebigen Phase wirkte, und wir wissen, daß die Wärmeerscheinungen in der Tat nicht von der Phase abhängen. Die Funktion f kann dabei, sofern sie nicht durch die gesamte lebendige Kraft oder sichtbare Bewegung der Körper bedingt ist, beliebig gewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein System (A) mit dem Zustande (S) mit einem System (B), dessen Zustand durch ganz analoge Bedingungen gegeben ist, in Wechselwirkung tritt, ist wieder durch einen der Formel (52) ganz analogen Ausdruck gegeben, woraus wie früher bewiesen werden kann, daß die Größe E^* nur abnehmen kann. Nach lange fortgesetzter Wechselwirkung (für das Temperaturgleichgewicht) erlangt E^* sein Minimum, was eintritt, wenn allgemein $ff' = FF'$ ist. Wenn der Körper ruht, so ist die Lösung dieser Gleichung

$$f^* = A e^{-h\left(\chi + \Sigma \frac{m c^2}{2}\right)},$$

wobei $f^* ds d\sigma$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein System (A) den Zustand (S) hat. Die der Entropie aller N Systeme (A) proportionale Größe E ist wieder durch die Gleichung (95) gegeben. Die Entropie eines einzigen Systems (A) ist daher dem N^{ten} Teil davon, also der Größe

$$(96) \quad E^* = \iint f^* \log f^* ds d\sigma = \log A - h \frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} - \frac{3r}{2}$$

proportional, was bis auf einen konstanten Faktor und Addenden mit dem von mir schon in der Abhandlung „Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes aus den Sätzen über Wärmegleichgewicht“ (s. dort Gleichung 18) gefundenen Ausdrucke übereinstimmt.¹⁾

¹⁾ Vgl. hierzu die Anmerkung zu Nr. 32 des II. Bandes dieser Sammlung.

Resultate einer Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte.¹⁾

Vorläufige Mitteilung.

(Wien. Ber. 66. S. 256 bis 263. 1872.)

Wird der Raum zwischen zwei Kondensatorplatten statt mit Luft mit einer anderen isolierenden Substanz ausgefüllt, ohne daß sich die Distanz der Platten ändert, so wird die Kapazität des Kondensators nach der Theorie der Dielektrizität $D = 1 + 4\pi\epsilon$ mal so groß. D bezeichnen wir als die Dielektrizitätskonstante des Isolators. ϵ ist die von Helmholtz (Borchardts Journal Bd. 72 S. 115) eingeführte Größe. Für Luft setzen wir $D = 1$. Aus dieser Theorie folgt aber noch eine andere merkwürdige Konsequenz, die bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint, nämlich daß elektrische Kräfte auf einen Nichtleiter, ohne daß sich derselbe elektrisiert, bloß vermöge seiner dielektrischen Polarisation, ganz erhebliche Anziehungen ausüben müssen; und zwar finde ich aus der Helmholtzschen Theorie, daß eine nicht leitende Kugel im homogenen elektrischen Felde $(D-1)/(D+2)$ mal so stark angezogen werden muß, als eine gleich große leitende Kugel unter Einfluß derselben Kräfte, wenn letztere isoliert und ursprünglich unelektrisch ist, so daß sie nur durch Induktion elektrisch wird. Ich machte nun zwei Versuchsreihen. Bei der ersten wurden zwischen zwei Kondensatorplatten möglichst planparallele Platten verschiedener isolierender Substanzen gebracht. Der Kondensator wurde mit einer Daniellschen Batterie geladen, seine Kapazität sowohl wenn Luft als auch wenn der Isolator

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 9. S. 141. 10. Oktober 1872-

zwischen den Platten war, mittels eines Thomsonschen Quadrantelektrometers bestimmt. Die isolierenden Platten lagen locker zwischen den Kondensatorplatten, die noch dazwischen befindliche Luftschicht wurde ebenfalls der Rechnung unterzogen. Ebenso wurde wegen des Randes eine freilich nur annäherungsweise richtige Korrektion angebracht. Für Hartgummi, Schwefel, Paraffin und Kolophonium gaben verschieden starke Ladungen, verschiedene Ladungsdauern, von drei Minuten bis Bruchteilen einer Sekunde, verschieden dicke isolierende Platten und verschiedene Distanzen der Kondensatorplatten konstante Werte für D , und zwar fand ich

für Hartgummi	$D = 3,17, 3,11, 3,20,$
„ Schwefel	$D = 3,85, 3,83,$
„ Paraffin	$D = 2,34, 2,28,$
„ Kolophonium . . .	$D = 2,54, 2,57.$

Die beiden angeführten Zahlen beziehen sich immer auf zwei verschiedene untersuchte Platten von verschiedener Dicke. Andere Versuche, wobei die isolierende Platte zwischen zwei Quecksilberflächen gebracht und die Kapazität des so gebildeten Kondensators untersucht wurde, ergaben

für Hartgummi	$D = 3,05, 3,10, 3,24,$
„ Paraffin	$D = 2,33, 2,31.$

Die Zahl für Hartgummi ist wahrscheinlich deshalb etwas zu klein, weil das Quecksilber sich am Rande durch Kapillarität nicht gut an das Hartgummi anlegte. Für Glas, Stearin und Guttapercha dagegen scheint D selbst für so geringe Ladungen nicht konstant zu sein, sondern namentlich mit wachsender Ladungsdauer rasch zuzunehmen.

Die zweite Versuchsreihe bestätigte die zuletzt bemerkte Konsequenz der Dielektrizitätstheorie, und zwar wurde sie hauptsächlich angestellt, um zu beweisen, daß die Veränderung der Kapazität von Kondensatoren durch Zwischenschichten in einer wirklichen Elektrisierung der kleinsten Teile derselben (oder Drehung der bereits elektrisierten) ihren Grund hat, nicht aber darin, daß die Elektrizität etwa durch verschiedene Körper verschieden hindurch wirkt.

Es wurde eine Kugel aus dem zu untersuchenden isolierenden Materiale an vollkommen isolierenden Fäden an den einen

Hebelarm einer sehr empfindlichen Drehwage gehängt, deren anderer Hebelarm mit einem Spiegel äquilibrirt war, mittels dessen in der bekannten Weise die kleinsten Drehungen der Drehwage abgelesen werden konnten. In einiger Entfernung von der isolierenden Kugel stand eine fixe Kugel, die durch Funken einer Influenzmaschine geladen und wieder entladen werden konnte. Die ganze Drehwage befand sich in einer bis auf die erforderlichen Schlitz verschlossenen Schachtel aus Goldpapier, aus der nur die isolierende Kugel an ihrem Faden heraushing. Früher war sorgfältig geprüft worden, daß weder der Faden, an dem die Kugel hing, noch die in der Schachtel befindlichen Bestandteile eine Einwirkung erfuhren, daß also der bei Elektrisierung der fixen Kugel eintretende Ausschlag der Drehwage nur von der Wirkung der Elektrizität der fixen Kugel auf die isolierende herrühren konnte. Daß letztere nicht schon früher elektrisch war und sich auch nicht merklich dauernd elektrisierte, wurde konstatiert, indem die fixe Kugel bald mehrmals nacheinander positiv, bald abwechselnd positiv und negativ geladen wurde. Genau an die Stelle der nicht leitenden Kugel konnte eine gleich große leitende (ursprünglich unelektrische) Kugel gehängt werden, um die Einwirkung, welche beide erfuhren, zu vergleichen. Wenn auch die Schlagweite gleich blieb, so war es doch nicht möglich, der fixen Kugel bei den verschiedenen Versuchen, die teils nach Einhängung der isolierenden, teils nach Einhängung der leitenden, aber isolierten Kugel gemacht wurden, immer genau dieselbe Elektrizitätsmenge zuzuführen. Um den daherrührenden Fehler korrigieren zu können, war die fixe Kugel mit einer zweiten fixen leitend verbunden, der eine ganz ähnliche Drehwage (aber mit leitend mit der Erde verbundener Kugel) gegenüber stand.

Der Ausschlag der zweiten Drehwage diente als Maß der mitgeteilten Elektrizitätsmenge. Das Verfahren war nun folgendes: In die erste Drehwage wurde die nicht leitende Kugel eingehängt. Nun ließ man einen Funken überspringen, welcher zunächst die beiden fixen Kugeln elektrisierte. Durch ihre Wirkung auf die Hängenden gerieten die beiden Drehwagen in Schwingungen. Da sie nicht rasch genug zur Ruhe kamen, wurde ihr Ausschlag in bekannter Weise aus mehreren Ablesungen berechnet. Da die Ausschläge sehr klein waren,

konnten sie als der Kraft proportional betrachtet werden. Den Ausschlag der ersten dividiert durch den der zweiten Drehwage bezeichne ich kurz als „die Anziehung der isolierenden Kugel“. Jetzt wurde an die Stelle der nicht leitenden die gleich große leitende Kugel gehängt. Der Ausschlag der ersten Drehwage dividiert durch den der zweiten soll jetzt „die Anziehung der leitenden Kugel“ heißen. Der Quotient der Anziehung der nicht leitenden Kugel in die der leitenden ist jedesmal die in der folgenden Tabelle angeführte Zahl. Die Zahlen dieser Tabelle geben also an, um wievielfach die leitende, aber isolierte Kugel stärker angezogen wird als eine gleich große unter denselben Umständen befindliche nicht leitende. Dieser Quotient war oft von der Zeit der Einwirkung abhängig.

	Zeit der Einwirkung				
	0,9 sec	1,8 sec	22 $\frac{1}{2}$ sec	45 sec	90 sec
Schwefel	—	2,125	—	2,110	—
Hartgummi	—	2,064	—	2,094	—
Paraffin	2,980	2,920	—	1,420	—
Kolophonium . .	2,140	1,927	1,730	1,700	1,650

Um schon aus dieser vorläufigen Notiz eine beiläufige Schätzung der von mir erzielten Genauigkeit möglich zu machen, teile ich die Details für die erste in der obigen Tabelle enthaltene Mittelzahl mit. Die Anziehung der Schwefelkugel, fünfmal gemessen, ergab sich zu

$$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \\ 0,560, 0,547, 0,548, 0,562, 0,559 \quad \text{Mittel } 0,555.$$

Die Anziehung der gleich großen leitenden Kugel aber war

$$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \\ 1,175, 1,180, 1,188, 1,173, 1,179 \quad \text{Mittel } 1,179.$$

Die darüber stehenden Zeichen geben an, mit welcher Elektrizität die fixen Kugeln geladen wurden. Der Quotient ist

$$\frac{1,179}{0,555} = 2,125.$$

Nach der Dielektrizitätstheorie sollten die in der obigen Tabelle enthaltenen Zahlen K den Wert $(D + 2)/(D - 1)$ haben; also wenn man die aus der ersten Versuchsreihe von mir gefundenen Zahlen zugrunde legt

für Schwefel	2,06
„ Hartgummi	2,39
„ Paraffin	3,28
„ Kolophonium	2,93.

Die Zahl für Schwefel zeigt eine genügende Übereinstimmung; für denselben scheint also D innerhalb weiter Grenzen konstant zu sein. Hartgummi wird bereits merklich stärker angezogen; für denselben scheint also D , folglich auch ϵ mit wachsender Ladung zu wachsen. Noch weit mehr gilt dies vom Kolophonium und Paraffin, und zwar ist bei den beiden letzten D von der Zeit der Einwirkung abhängig. Je länger die elektrischen Kräfte wirken, desto bedeutender wird die dielektrische Polarisation. Leider gestattete mein in Eile zusammengestellter Apparat in dieser Hinsicht keine sehr große Mannigfaltigkeit; auch konnte ich die Stärke der elektrisierenden Kraft nicht genügend variieren, um mit der Drehwage allein die Abhängigkeit des D von derselben zu konstatieren. Ich glaube aber, daß meine Methode, die Anziehung isolierender Körper durch elektrische Kräfte zu prüfen, unter den verschiedensten Verhältnissen durchgeführt, imstande wäre, noch reichen Aufschluß über das bisher so wenig erforschte Verhalten der Isolatoren im elektrischen Felde zu liefern.

Die erste Versuchsreihe führte ich im Laboratorium des Herrn Geheimrat Helmholtz in Berlin, die zweite in dem des Herrn Professor Töppler zu Graz aus, und ich sage den beiden Leitern dieser Institute den wärmsten Dank für die Zuvorkommenheit, mit der sie mir die Räumlichkeiten, Apparate usw. ihrer Institute zur Verfügung stellten. Zu besonderem Danké bin ich auch noch Herrn Dr. Albert v. Ettingshausen, Assistenten für Physik an der Grazer Universität, verpflichtet, welcher mich sowohl bei der Zusammenstellung der Apparate, als auch bei den Ablesungen (da immer in zwei

Fernrohren gleichzeitig abgelesen werden mußte) mit nicht geringen Opfern von Zeit und Mühe unterstützte.

Die hier mitgeteilten Zahlen gewinnen ein erhöhtes Interesse, wenn sie mit der Arbeit Maxwells „A dynamical theory of the electromagnetic field“, Transactions of the Royal Society of London 1865, Part I. S. 459, verglichen werden. Dasselbst stellt nämlich Maxwell die Hypothese auf, daß Licht und Elektrizität verschiedene Bewegungsformen eines und desselben Mediums sind, die sich beide aus den Bewegungsgleichungen, die er für jenes Medium aufstellt, ableiten lassen.

Aus diesen Bewegungsgleichungen folgt zwischen der Dielektrizitätskonstante D und dem Brechungsindex i irgend einer Substanz die Relation

$$i = \sqrt{D \mu}$$

(siehe Maxwells Gleichung (80)). μ ist der Koeffizient der magnetischen Induktion der betreffenden Substanz. Derselbe ist allerdings für keine der von mir untersuchten Substanzen bekannt. Doch läßt sich leicht zeigen, daß er unmöglich erheblich von dem der Luft verschieden sein kann; daß er also nahe gleich Eins ist, wenn man wieder den für Luft gleich Eins setzt. Die Vergleichung der Formel Maxwells mit der Helmholtzschen Formel für die Lichtgeschwindigkeit (Borchardts Journal 72. S. 127) zeigt uns, daß μ der von Helmholtz eingeführten Größe $1 + 4\pi \vartheta$ proportional ist. ($4\pi \epsilon$ und $1 + 4\pi \epsilon$ sind bei Maxwell identisch, da man aus Helmholtz' Theorie die Maxwellsche erhält, wenn man den absoluten Wert von ϵ schon für Luft, also auch die anderen Isolatoren sehr groß voraussetzt.) Die Polarisationskonstante ϑ ist nach Weber selbst für Wismut nur $1/400000$ dividiert durch die Dichte des Wismut. Aber selbst wenn man diese Zahl für zu unsicher hält, um weitere Schlüsse darauf zu bauen, so folgt schon aus dem Umstande, daß eine Eisenkugel nach allen Beobachtungen viel stärker als 10000 mal so stark angezogen wird, als eine gleich große Wismutkugel, die außerordentliche Kleinheit des ϑ . Setzt man nämlich selbst für Eisen $\vartheta = \infty$, so folgt daraus für Wismut

$$\frac{4\pi \vartheta}{3 + 4\pi \vartheta} = \frac{1}{10000}$$

Da wir hier alle Verhältnisse viel zu ungünstig annahmen und \mathcal{D} für meine Substanzen jedenfalls noch viel kleiner als für Wismut ist, so kann wohl über die verschwindende Kleinheit von $4\pi\mathcal{D}$ kein Zweifel obwalten. Es ist also für die von mir untersuchten Substanzen $\mu = 1$ zu setzen und es müßte nach der Maxwellschen Ansicht über das Wesen des Lichtes und der Elektrizität der Brechungsexponent einfach die Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante sein. Um diese Konsequenz aus meinen Versuchen zu prüfen, stelle ich in der folgenden Tabelle die Quadratwurzeln von D mit den Brechungsexponenten der betreffenden Substanzen zusammen:

	\sqrt{D}	i
für Schwefel	1,960	2,040
„ Kolophonium	1,597	1,543
„ Paraffin	1,522	1,538, 1,516
„ Hartgummi	1,778	—

Der von mir nach der Wollastonschen Methode bestimmte Brechungsexponent des wahrscheinlich doppeltbrechenden Paraffin fiel merkwürdigerweise verschieden aus, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Reflexionsebene polarisiert war. Ersterem gehört der größere, letzterem der kleinere der angeführten Brechungsexponenten an. Ich glaube, daß die Differenzen dieser Zahlen nicht so groß sind, daß sie nicht aus den bei Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten unvermeidlichen Fehlern erklärt werden könnten, besonders da D für eine und dieselbe Substanz jedenfalls nicht absolut konstant ist. Daß ich die Dielektrizitätskonstante für den Schwefel etwas zu klein fand, ließe sich ganz gut aus den Hohlräumen erklären, die sich in meinen Schwefelplatten tatsächlich vorfanden. Auch von der Dielektrizitätskonstante des Kolophoniums kann wegen der großen Schwierigkeit, gleich dicke Kolophoniumplatten mit erträglich ebener Oberfläche zu erzeugen, keine allzugroße Genauigkeit erwartet werden. Wenn daher meine Versuche auch gegenwärtig weder denjenigen Umfang noch diejenige Genauigkeit haben, daß sie als definitive Konstatierung einer so wichtigen Konsequenz wie der Identität des Lichtes mit der Elektrizität betrachtet werden können, so muß doch das Resultat derselben als ein wichtiges Moment

für die Richtigkeit dieser Theorie bezeichnet werden, und wenn mir anders die Möglichkeit geboten würde, meine Untersuchungen mit größeren Mitteln fortzusetzen, so bezweifle ich nicht, daß es mir bei den reichen Erfahrungen, die ich über diesen Gegenstand gesammelt habe und bei der durch meine zweite Untersuchungsmethode gebotenen Möglichkeit, auch kleinere Quantitäten auf ihre Dielektrizitätskonstante zu prüfen, gelingen würde, diese Frage ihrer Lösung zuzuführen.

Experimentelle Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Isolatoren.¹⁾

(Wien. Ber. 67. S. 17—80. 1873; Pogg. Ann. 151. S. 482 u. 531. 1874
und Carls Repertorium 10. S. 109. 1874.)

Schon Faraday hatte in der 11. Serie seiner Experimentaluntersuchungen (Pogg. Ann. 47. S. 1 u. 537) gefunden, daß die Kapazität von Kondensatoren nicht bloß von der Gestalt und dem Abstände der Metallplatten, sondern auch von der Beschaffenheit der isolierenden Zwischenschicht abhängt. Siemens war der erste, welcher, indem er die Kondensatoren mit galvanischer Elektrizität lud, eine genauere Bestimmung dieser Abhängigkeit ermöglichte und mittels seiner Wippe nochmals konstatierte, daß diese Erscheinung nicht von dem allmählichen Eindringen der Elektrizität in den Isolator herrühren kann (Pogg. Ann. 102. S. 66). Endlich sind hier noch die Untersuchungen von Gibson und Barklay zu erwähnen, welche die Veränderung der Kapazität von Kondensatoren durch dazwischen gebrachtes Paraffin untersuchten (Phil. mag. IV. Ser. 41. S. 543; Phil. Trans. Roy. Soc. London 161. S. 573. 1871). Man nennt diese Eigenschaft der Isolatoren, die Kapazität der Kondensatoren zu verändern, oder allgemeiner gesprochen, die Verteilung der Elektrizität auf in der Nähe befindlichen Leitern zu verändern, nach Faraday ihre Dielektrizität. Nachdem schon Clausius die Theorie des Einflusses einer dielektrischen Schicht auf die Elektrizitätsverteilung auf einer Franklinschen Tafel entwickelt hatte (siehe dessen Abhandl. Samml. 2. Teil, S. 135), wurde eine ausführliche Theorie derselben zuerst von Maxwell (Lond. Philosoph. Transact. 155. Part I. S. 459)

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 10. S. 5. 9. Januar 1873.

und später noch vollständiger von Helmholtz (Borchhardts Journal 72. S. 57) gegeben. Nach derselben ändert sich das elektrische Potential beim Eintritt in den dielektrischen Körper kontinuierlich; sein Differentialquotient aber in der Richtung der auf den Körper gezogenen Normalen macht einen Sprung, und zwar so, daß, wenn wir mit $\partial V / \partial N_a$ den Wert dieses Differentialquotienten an der Außenseite, mit $\partial V / \partial N_i$ aber den an der Innenseite des Isolators bezeichnen (beide Normalen nach derselben Richtung des Raumes hin gezogen), der Quotient $\partial V / \partial N_a : \partial V / \partial N_i$ eine bloß von der Natur des Isolators abhängige Konstante ist, welche wir seine Dielektrizitätskonstante nennen wollen. Aus dieser Bedingung und der Bedingung, daß V im Innern sämtlicher Isolatoren ebenfalls der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügt, läßt sich die Verteilung der Elektrizität auf jedem gegebenen Systeme von Leitern und Isolatoren berechnen, wenn erstere von gegebenen Elektrizitätsquellen geladen werden. Es schienen mir die bisherigen Versuche, aus denen diese Dielektrizitätskonstante berechnet wurde oder doch berechnet werden könnte, und welche größtenteils nicht direkt in dieser Absicht angestellt wurden, nicht jene Genauigkeit zu besitzen, welche sich mit den gegenwärtigen elektrostatischen Meßapparaten erzielen läßt, und ich stellte mir daher zunächst die Aufgabe, einige Isolatoren, soweit es anging, zu prüfen, ob ihr Verhalten der Theorie Maxwells und Helmholtz' entspräche oder nicht, und im ersteren Falle ihre Dielektrizitätskonstante so genau als möglich zu bestimmen. Die von mir gefundenen Zahlen weichen in der Tat erheblich von denen der übrigen Beobachter ab, wie die Zusammenstellung im Schlußparagraphen dieser Abhandlung zeigt. Von besonderer Bedeutung für unsere Anschauung von der Konstitution der Materie wurde die Dielektrizitätskonstante durch die Theorie Maxwells (am bereits zitierten Orte), nach welcher, wenn Elektrizität und Licht Schwingungen ein und desselben Mediums sind, der Brechungsquotient das geometrische Mittel zwischen der Dielektrizitäts- und Magnetisierungskonstante sein muß. Die kleine, am Schlusse des § 12 beigefügte Tabelle zeigt, daß meine bisherigen Beobachtungen diese Theorie bestätigen, wengleich von einer

definitiven Bestätigung derselben erst nach viel mannigfaltigeren, mit größeren Mitteln ausgeführten Versuchen gesprochen werden könnte, die ich, wenn mir die Möglichkeit geboten würde, baldigst in Angriff nehmen würde.

Das Verfahren, welches ich hierbei einschlug, war folgendes:

Es wurde zuerst die Kapazität eines gewöhnlichen Kohlrauschschen Kondensators mit zwei vertikal stehenden Metallplatten bei verschiedener Distanz der Platten gemessen. Dieselbe ergab sich nach Abzug der Kapazität der Zuleitungsdrähte der Plattendistanz verkehrt proportional, ein Zeichen, daß die am Rande der Kondensatorplatten aufgehäufte Elektrizität ohne störenden Einfluß war. Unter Kapazität eines Leiters im allgemeinen verstehe ich die Elektrizitätsmenge, welche derselbe annimmt, wenn er von einer Elektrizitätsquelle (z. B. einer galvanischen Batterie) vom Potential 1 geladen wird. Dieselbe hängt natürlich von den umgebenden leitenden oder dielektrischen Körpern ab. Unter der Kapazität eines Kondensators speziell verstehe ich die Elektrizitätsmenge, welche die eine Platte desselben aufnimmt, wenn sie mit einer Elektrizitätsquelle vom Potential 1 geladen wird, während die andere mit der Erde verbunden ist. Dann wurden zwischen die beiden Kondensatorplatten Schichten aus der isolierenden Substanz von verschiedener Dicke gebracht, und abermals seine Kapazität bestimmt, wobei jedesmal die Dicke der isolierenden Platte, sowie die Distanz der Kondensatorplatten genau gemessen wurde. Damit die Distanz der Kondensatorplatten durch das Dazwischenschieben des Isolators keine Veränderung erfahre, durfte derselbe den Raum zwischen denselben nicht vollkommen ausfüllen. Nach der Maxwell-Helmholtzschen Theorie ist die Kapazität des Kondensators unter Vernachlässigung der am Plattenrande befindlichen Elektrizität bloß abhängig von der Distanz m der Kondensatorplatten und der Dicke n der dielektrischen Schicht, nicht aber von deren Lage innerhalb der Kondensatorplatten, und zwar ist sie, wenn D die Dielektrizitätskonstante der Zwischenschicht ist, verkehrt proportional dem Ausdrucke $m - n + (n/D)$, also verkehrt proportional der Distanz der Kondensatorplatten, wobei jedoch der von der dielektrischen Schicht erfüllte Raum so zu zählen ist, als ob er D mal so dünn wäre. Mittels dieses Satzes, der durch mannigfaltige

Versuche mit verschieden dicken isolierenden Platten und verschiedenen Distanzen der Kondensatorplatten für jede derselben bestätigt wurde, kann der Einfluß der zwischen den Kondensatorplatten außer dem Dielektrikum noch vorhandenen Luftschicht berechnet und die Dielektrizitätskonstante gefunden werden, für die sich folgende Werte ergaben:

für Hartgummi	3,15,
„ Paraffin	2,32,
„ Schwefel	3,84,
„ Kolophonium	2,55.

Zur Messung der Elektrizitätsmengen benutzte ich das Elektrometer von Thomson, zur Ladung des Kondensators eine Batterie von 18 Daniellschen Elementen. Um die Kapazität des Kondensators zu messen, wurde zuerst das Elektrometer direkt mit der Batterie geladen und der Ausschlag abgelesen. Dann wurde eine Kondensatorplatte mit der Batterie geladen, während die andere mit der Erde in Verbindung war. Hierauf die geladene Kondensatorplatte von der Batterie getrennt und mit dem Elektrometer verbunden. Es ging nur ein Teil ihrer Elektrizität auf das Elektrometer über; der Ausschlag desselben war also jetzt kleiner als früher und aus beiden Ausschlägen konnte das Verhältnis der Kapazität des Kondensators zu der des Elektrometers bestimmt werden. (Wären z. B. beide Kapazitäten gleich, so hätte der Kondensator dem Elektrometer die Hälfte seiner Elektrizität mitgeteilt, der Ausschlag wäre also jetzt halb so groß als früher.) Es konnte also die Kapazität des Kondensators gemessen werden, wenn man die des Elektrometers als Einheit wählt, was erlaubt ist, da es sich immer nur um das Verhältnis zweier Kapazitäten handelt. Um zu konstatieren, ob das Eindringen der Elektrizität in den Isolator nicht störend wirkt, wurde der Versuch einmal so ausgeführt, daß die Kondensatorplatte durch ein paar Sekunden mit der Batterie geladen wurde, und ihre darauffolgende Verbindung mit dem Elektrometer etwa eine Minute dauerte, dann wieder so, daß der Versuch nur einen Bruchteil einer Sekunde währte. Es zeigte sich bei den oben erwähnten Substanzen keine bemerkbare Differenz. Außerdem wurde der Kondensator längere Zeit ge-

laden, hierauf für einen Moment entladen, und dann mit dem Elektrometer verbunden. Er gab nachträglich keine Elektrizität mehr an dasselbe ab, wie es bei unvollkommenen Isolatoren der Fall ist. Um auch noch den Fall zu prüfen, wo außer dem Dielektrikum sich keine Luft zwischen den Kondensatorplatten befindet, legte ich die isolierende Platte auf einen Quecksilberspiegel und goß Quecksilber darüber, dessen Abfließen durch einen Papierrand verhindert wurde, um die beiden an der Platte anliegenden Quecksilberflächen als Kondensatorflächen zu benutzen. Die so erhaltenen Resultate stimmten mit den früheren. Zum Schlusse machte ich einige Versuche an unvollständigen Isolatoren (Glas, Stearin, Guttapercha), deren Verhalten der Elektrizität gegenüber sich auf diesem Wege ebenfalls am besten dürfte prüfen lassen. Dieselben zeigen jedoch unter den verschiedenen Umständen (bei langsamer und rascher Ladung und Entladung, bei dicht und lose anliegenden Kondensatorplatten) ein so verschiedenes Verhalten, daß es mir an Zeit gebrach, dasselbe zu prüfen. Ich will nun eine genaue Beschreibung der Details der Versuche folgen lassen.

§ 1.

Das Elektrometer.

Das zur Messung der Elektrizitätsmengen benutzte Elektrometer war das von Thomson konstruierte Quadrantelektrometer, gefertigt von White in Glasgow. Eine ausführliche Beschreibung dieses vortrefflichen, aber ziemlich komplizierten Instrumentes würde mich hier zu weit führen. Ich will mich daher mit der Auseinandersetzung des Prinzips begnügen, worauf dasselbe beruht, und dann einige Vorsichtsmaßregeln aufzählen, deren Anwendung mir bei seinem Gebrauche unerläßlich schien. Im Elektrometer ist ein ∞ förmiger Aluminiumstreifen bifilar aufgehängt, so daß seine Ebene horizontal ist. Derselbe ist durch einen feinen Platindraht mit der am Boden des Elektrometers befindlichen Schwefelsäure in leitender Verbindung, und wird, wenn man das Instrument gebrauchen will, samt der Schwefelsäure ziemlich stark elektrisiert. Das Innere des Elektrometers isoliert so gut, daß sich die Elektrizität der Schwefelsäure und des Aluminiumstreifens, deren Abnahme

durch ihre verminderte Anziehung auf eine kleine Platinfeder sogleich zu erkennen ist, während eines Tages kaum erheblich vermindert. Dieselbe kann mittels eines kleinen Influenzmaschinchens wieder verstärkt werden, das sich im Elektrometer befindet und durch einen daraus hervorragenden Knopf gedreht wird. Der Aluminiumstreifen ist mit vier metallenen Quadranten schachtelartig umgeben. Fig. 1 stellt den Aluminiumstreifen samt einem der Quadranten in ihrer gegenseitigen

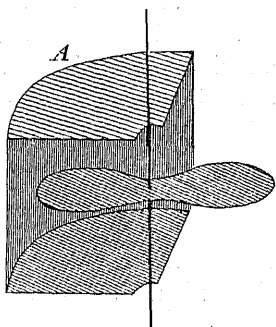


Fig. 1.

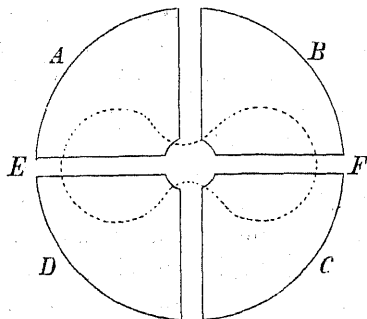


Fig. 2.

Lage perspektivisch dar. Fig. 2 ist die Ansicht der von den Quadranten gebildeten Schachtel von oben; der tiefer liegende Aluminiumstreifen ist punktiert. Zwei gegenüberstehende Quadranten *A* und *C* waren während meiner Versuche beständig mit der Erde leitend verbunden. Waren auch die beiden übrigen unelektrisch, so spielte der Aluminiumstreifen gerade unter den beiden Schlitten *E* und *F* ein. Wurde dagegen jenen beiden Quadranten Elektrizität mitgeteilt, so schlug das Aluminiumplättchen aus, mit dem ein kleiner Hohlspiegel verbunden war, der das Bild einer schmalen Petroleumflamme auf eine fixe Skala warf. Die Lagenveränderung dieses Bildes maß den Ausschlag der Aluminiumplatte. Petroleumflamme und Skala hatte vom Spiegel eine Distanz von ungefähr 1 m. Die Skala hatte 720 Teilstriche in der Distanz von je 0,643 mm; bei 360 war die Ruhelage. Es war zunächst zu bemerken, daß, wenn die beiden Quadranten *B* und *D* längere Zeit geladen und dann entladen wurden, sich die Ruhelage immer etwas im Sinne des früheren Ausschlages verschoben zeigte. Dies konnte keine Folge der elastischen Nachwirkung der

zur Biflaramaufhängung verwendeten Kokonfäden sein, da es nicht eintrat, wenn der Aluminiumstreifen durch mechanische Mittel abgelenkt wurde. Es kam wahrscheinlich von einer Elektrizitätsmitteilung an die Stützen, welche die Quadranten trugen. Infolge dieser Elektrizitätsmitteilung vergrößerte sich der Ausschlag auch mit der Zeit, wenn die Elektrizitätsquelle vollkommen konstant blieb. Um daher vergleichbare Resultate zu erhalten, wurde die Ablesung immer etwa 40 Sekunden nach der Ladung gemacht, und die Ruhelage wieder etwa 40 Sekunden nach der Entladung abgelesen. Bei Anwendung dieser Vorsichtsmaßregel zeigten die Ausschläge die größte Regelmäßigkeit. Wenn man einen Pol mit dem Elektrometer, den anderen mit der Erde verbindet, so gaben 6 Daniellsche Elemente einen Ausschlag von etwas über 300 Skalenteilen, und wenn dieser Ausschlag mehrmals nacheinander gemessen wurde, war der Unterschied höchstens $\frac{1}{2}$ Skalenteil, so daß also der Fehler bei Messung der Spannung nicht $\frac{1}{6}$ Proz. überstieg. Es zeigte sich übrigens, daß man auch ziemlich gute Resultate erhalten konnte, wenn man das Elektrometer länger geladen ließ, sobald man nur die zu jeder Ablesung gehörige Ruhelage 40 Sekunden nach der Entladung bestimmte. Die Batterie darf übrigens niemals auch nur einen Moment in sich geschlossen werden, weil dadurch sogleich ihre elektromotorische Kraft ein wenig abnimmt. Der durch eine bestimmte Elektrizitätsmenge bewirkte Ausschlag war dieser Elektrizitätsmenge nicht genau proportional. Wollte man daher die Ausschläge als Maß der Elektrizitätsmengen betrachten, so mußte an denselben eine Korrektion angebracht werden. Um dieselbe zu bestimmen, las ich die beiden Ausschläge ab, welche zwei verschiedene Daniellsche Elemente hervorbrachten, dann den Ausschlag, welchen beide zusammen bewirkten. Da die Zuleitungsdrähte, bis auf eine durch eine Siegelackstütze getragene Stelle, durch die Luft gingen, und auch die Elemente gut voneinander isoliert waren, so war nirgends eine Nebenschließung; es war also die im letzten Falle dem Elektrometer mitgeteilte Elektrizitätsmenge die Summe der durch jedes einzelne Element mitgeteilten. Der Unterschied des letzteren Ausschlages von der Summe der beiden früheren lieferte also die am letzteren Ausschlage anzubringende Korrektion. Hierauf wurde ein

drittes Element, dann alle drei usw. mit dem Elektrometer verbunden, bis für hinlänglich viele Ausschläge die zugehörige Korrektion bestimmt war. Ich bemerke noch, daß die ganze Beobachtungsreihe dann in der umgekehrten Ordnung wiederholt wurde, so daß ich mit der Einschaltung desjenigen Elementes wieder aufhörte, mit dem ich begonnen hatte. Für jeden Ausschlag wurde dann das Mittel der in beiden Fällen beobachteten genommen. Eine derartige Umkehrung nahm ich fast bei jeder Beobachtungsreihe ohne Ausnahme vor, nicht bloß der Kontrolle halber, sondern auch damit sich kleine durch Abnahme der Elektrisierung des Elektrometers oder Schwankung der elektromotorischen Kraft der Elemente erzeugte Fehler tunlichst eliminieren. Die Resultate dreier derartiger Graduierungen des Elektrometers sind in folgender Tabelle zusammengestellt, welche unter a die Ausschläge, unter b die Korrektionen in Skalenteilen enthält, welche von den Ausschlägen subtrahiert werden müssen, damit dieselben der Elektrizitätsmenge proportional seien.

a	b	a	b	a	b
320	10	331	10	334	11
265	6	274	$6\frac{1}{2}$	276	7
212	4	218	$4\frac{1}{2}$	220	$4\frac{1}{4}$
104	1	100	1	109	1
208	$\frac{1}{2}$	214	$\frac{1}{2}$	217	1
261	$1\frac{1}{2}$	268	$1\frac{1}{2}$	273	2
316	$4\frac{1}{2}$	324	$4\frac{1}{4}$	329	5

Die vier ersten Ausschläge waren nach der Seite der kleineren Ziffern der Skala zu, die drei letzten nach der entgegengesetzten. Die Ruhelage war beim Teilstrich 360. Die drei Graduierungen zeigen eine so große Übereinstimmung und Regelmäßigkeit, daß ich die zu den übrigen Ausschlägen gehörigen Korrektionen durch Interpolation mit genügender Genauigkeit finden zu können glaubte. Dieselben sind in folgender Tabelle für denjenigen Teil der Skala zusammengestellt, dessen Ziffern kleiner als 360 sind, und den ich allein benutzte; unter a sind die Ausschläge, unter b sind zwischen je zweien die Korrektionen angegeben, welche ich

vom Ausschlage subtrahierte, wenn dieselbe zwischen jenen beiden Ausschlägen lag.

a		a	b	a	b	a	b	a	b
80	0	197	2	254	4	295	6	329	8
	$\frac{1}{4}$	206	$2\frac{1}{4}$	260	$4\frac{1}{4}$	300	$6\frac{1}{4}$	333	$8\frac{1}{4}$
110	$\frac{1}{2}$	214	$2\frac{1}{2}$	265	$4\frac{1}{2}$	305	$6\frac{1}{2}$	337	$8\frac{1}{2}$
130	$\frac{3}{4}$	222	$2\frac{3}{4}$	270	$4\frac{3}{4}$	309	$6\frac{3}{4}$	341	$8\frac{3}{4}$
145	1	229	3	275	5	313	7	346	9
160	$1\frac{1}{4}$	236	$3\frac{1}{4}$	280	$5\frac{1}{4}$	317	$7\frac{1}{4}$	349	$9\frac{1}{4}$
170	$1\frac{1}{2}$	242	$3\frac{1}{2}$	285	$5\frac{1}{2}$	321	$7\frac{1}{2}$	353	$9\frac{1}{2}$
179	$1\frac{3}{4}$	248	$3\frac{3}{4}$	285	$5\frac{3}{4}$	325	$7\frac{3}{4}$	356	$9\frac{3}{4}$
188	2	248	4	290	6	325	8	356	10

In dieser Tabelle ist zu jeder Korrektur ein dem Ausschlage proportionales Glied addiert worden, was, da es sich bloß um Verhältnisse handelt, nichts schadet. Dieselbe wurde gegen Schluß der Versuche noch einmal durchgeprüft und richtig befunden. Die erste Tabelle zeigt, daß die Korrektur nicht symmetrisch zu beiden Seiten der Ruhelage ist, was wohl von einer etwas unsymmetrischen Konstruktion des Elektrometers herrührt. Denn ich hatte nicht unterlassen, die Bifilaraufhängung so zu regulieren, daß der am Aluminiumstreifen befestigte Spiegel bei der Gleichgewichtslage desselben im unelektrisierten Zustande der äußeren Glasplatte des Instrumentes parallel war und nach der Elektrisierung die Quadranten so zu verschieben, daß die Ruhelage des Spiegels durch die Elektrisierung nicht verändert wurde. Es hätte diese Unsymmetrie vielleicht durch Verschiebung der Quadranten behoben werden können; es war aber einfacher, dieselbe durch die an den Ablesungen angebrachte Korrektur zu eliminieren. Sie hatte zur Folge, daß man etwas verschiedene Ausschläge erhielt, je nachdem man den einen oder anderen Pol einer Batterie mit dem Elektrometer verband, während der andere mit der Erde verbunden war. Prof. Quincke fand in diesem Falle manchemal an beiden Polen eine verschiedene Spannung. Ich konnte jedoch, abgesehen von dieser Unsymmetrie, welche zu allen Zeiten und für verschiedene Batterien durchaus unverändert blieb, nicht die mindeste Unregelmäßigkeit beobachten.

So fand ich, wenn ich einmal den einen, dann den anderen Pol der Batterie mit dem Elektrometer verband, während der andere mit der Erde verbunden war, zwischen den Ausschlägen folgende Differenzen:

$$\begin{array}{c} 5\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, 6, 6, 5\frac{1}{2}, \\ 5\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, \\ 6, 6, 5\frac{1}{2}, \\ 5\frac{3}{4}. \end{array}$$

Die Zahlen in einer Zeile wurden unmittelbar nacheinander, die in verschiedenen Zeilen aber an verschiedenen Tagen mit verschiedenen Batterien zu sechs Daniellschen Elementen gemessen.

Bei den Messungen mit dem Elektrometer ist noch zu beachten, daß die Aluminiumplatte eine bedeutende Elektrizitätsmenge in den Quadranten bindet, welche sich mit der Lage derselben verändert. Man bekommt daher einen verschiedenen Ausschlag, je nachdem man einen mit einer gegebenen Elektrizitätsmenge geladenen Körper dauernd oder nur kurze Zeit mit dem Elektrometer verbindet. Näheres darüber werde ich im § 4 angeben. Endlich will ich noch eine Vorsichtsmaßregel anführen, die gut ist, wenn man die Elektrisierung der Schwefelsäure und der damit verbundenen Aluminiumplatte möglichst konstant erhalten will. Man darf dieselbe dann nicht gerade vor Beginn der Versuche durch das Influenzmaschinchen verstärken. Denn gleich nach der Verstärkung nimmt dieselbe viel rascher ab, als lange danach. Es ist dies in Übereinstimmung mit der Beobachtung Warburgs, wonach isolierende Stützen einem Körper anfangs viel mehr Elektrizität als später entziehen. Es geht dies so weit, daß, wenn man durch verkehrtes Drehen der Influenzmaschine die Elektrisierung vermindert, dieselbe anfangs sogar durch Mitteilung der Isolatoren wieder ein wenig steigt.

§ 2.

Der Kondensator.

Der Kondensator war ein gewöhnlicher Kohlrauschscher. Fig. 3 stellt denselben schematisch dar. Die eine, *A*, der beiden vertikalen vergoldeten Kondensatorplatten von 150 mm

Durchmesser und 3,3 mm Dicke war von einem fixen, aber in bekannter Weise durch Schrauben regulierbaren Gestelle getragen. Die andere Kondensatorplatte *B* befand sich auf einem Schlitten *D*, an dem ein Messingzylinder *F* befestigt war, der auf einen Messingknopf *E* stieß. Der Knopf *E* konnte weiter in das Gestelle *C* hinein- und herausgeschraubt werden, wodurch die Kondensatorplatten in verschiedene Distanzen kamen. Bei meinen Versuchen handelte es sich namentlich darum, die

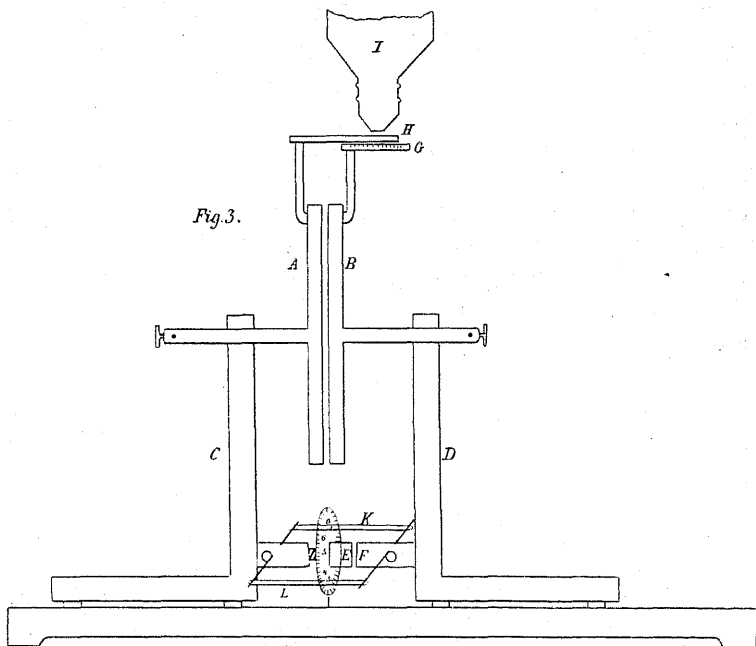


Fig. 3.

Verschiebung, welche der beweglichen Kondensatorplatte von einem Versuche zum anderen erteilt wurde, so genau als möglich zu messen. Zu diesem Zwecke hatte ich an den Knopf *F* eine Trommel befestigt, an der der Winkel, um den dieser Knopf gedreht worden war, abgelesen werden konnte. Da jedoch die Schraube an dem Knopfe nicht sehr fein gearbeitet war, so versah ich die beiden Kondensatorplatten noch mit einer anderen Vorrichtung, welche eine viel größere Ge-

nauigkeit zuließ. Ich befestigte nämlich an der einen Kondensatorplatte mittels eines Siegelackstäbchens ein Glasgitter G , das in Zehntelmillimeter geteilt war, an der anderen aber einen ihm parallelen Glasstreifen H , auf den ein feines Fadenkreuz gespannt war. Ein Mikroskop I mit 100facher Vergrößerung visierte auf das Fadenkreuz, welches durch eine entfernte leuchtende Spalte erhellt wurde. Jeder Strich des Gitters gab dabei eine schöne Beugungserscheinung. Verschoob man jetzt die bewegliche Kondensatorplatte so weit, daß das Fadenkreuz genau auf dieselbe Stelle der vom folgenden Teilstrich erzeugten Beugungserscheinung einspielte, so war man sicher, daß die Verschiebung genau $\frac{1}{10}$ mm betrug. Ich bemerke noch, daß die beiden Glasplättchen G und H bloß der bequemeren Zeichnung halber oberhalb der Kondensatorplatten gezeichnet sind. In der Tat befanden sie sich neben denselben, so daß die optische Achse des Mikroskopes I nicht vertikal, sondern horizontal war. Die unverrückte Lage der beiden Glasplättchen G und H diente auch zur Kontrolle, daß sich beim Einschieben der isolierenden Schichten die Distanz der Kondensatorplatten nicht geändert hatte.

Bei möglichst solider Stellung des Mikroskopes ändert ein in demselben angebrachtes Fadenkreuz seine Lage gegen das auf H befindliche durchaus nicht, weshalb später das letztere kassiert und durch das erstere ersetzt wurde, das, weil weniger vergrößert, viel deutlicher gesehen werden konnte. Damit die bewegliche Kondensatorplatte B bei ihrer Verschiebung möglichst parallel blieb, wurde der Messingzylinder E durch zwei Kautschukschnüre K und L auf den Knopf F gepreßt. Die Richtung der Resultierenden der Spannung der beiden Kautschukschnüre ging nahe durch den Berührungspunkt der Messingstücke E und F , und ihre Größe war nicht viel größer als die Reibung des Schlittens D . Die bewegliche Platte B wurde bei meinen Versuchen immer mit der Erde verbunden, die fixe Platte A aber geladen. Es zeigte sich, daß in der Nähe befindliche (halb isolierte) größere Metallmassen die Ablesung unsicher machten, wahrscheinlich indem sie sich allmählich luden, weshalb ich das Mikroskop und alle Metallbestandteile des Kondensatorgestelles sorgfältig mit der Erde leitend verband. Aus diesem Grund wäre es auch besser gewesen, wenn der Träger der

Kondensatorplatten nicht von Holz, sondern aus einer gut isolierenden Substanz gemacht gewesen wäre. Ein solcher Kondensator stand mir aber nicht zu Gebote.

§ 3.

Die isolierenden Platten.

Ich untersuchte vier gute Isolatoren, Hartgummi, Paraffin, Schwefel und Kolophonium, und dann drei unvollkommene Isolatoren, Stearin, Glas und Guttapercha. Um diese Substanzen im festen Zustande zwischen die Kondensatorplatten bringen zu können, mußte ich mir möglichst planparallele Platten aus denselben verschaffen. Glas kommt schon im Handel in genügend planparallelen Platten vor. Auch bei Hartgummi und Guttapercha benützte ich die im Handel vorkommenden Platten und begnügte mich, sie zwischen zwei Spiegelglasplatten zu pressen und dann bis zum Weichwerden zu erwärmen, um sie möglichst eben zu bekommen. Die übrigen Substanzen wurden zwischen Spiegelglasplatten gegossen. Und zwar fand ich für Paraffin und Stearin nach vielen vergeblichen Versuchen folgendes Verfahren am besten. Zwischen zwei rechteckige Spiegelglasplatten wurden an den Ecken vier aus demselben Stücke gebrochene Spiegelglasstücke gelegt. Drei Seiten des Randes wurden mit Papier verklebt, um das Ausfließen des flüssigen Paraffins zu verhindern. An der vierten Seite ragte die untere Glasplatte vor der oberen vor, um das Eingießen zu ermöglichen. Das Paraffin war etwas über seinen Schmelzpunkt erhitzt, und während seines Erstarrens wurden die Glasplatten sanft aneinander gedrückt. Damit das Paraffin nicht an den Glasplatten anhafte, bestrich ich dieselben mit feinem Öle, und zwar so wenig, daß das Öl selbst nicht mehr sichtbar war, sondern bloß das Glas eine gleichförmig fettige Oberfläche erhielt. Am besten ist es, wenn das Glas schon früher lang und innig mit Fett in Berührung war, damit sich nicht das Öl in Tröpfchen sammelt, welche stellenweise Vertiefungen in der Platte erzeugen, während dieselbe an anderen Stellen anhaftet.

Um das Anhaften des Paraffins an der Papierverklebung des Randes zu verhindern, lief demselben entlang eine öl-

getränkte Schnur, die gerade so dick war, daß sie den Raum zwischen den Platten ausfüllte. Da auch diese das Ausfließen hinderte, blieb die Papierverklebung manchmal ganz weg. Wenn diese Vorsichtsmaßregeln beobachtet wurden, schien die Kohäsion des Paraffin größer, als seine Adhäsion am Glase zu sein; denn es löste sich während des Erstarrens mit Leichtigkeit vom Rande und von den Platten ab, und eine Betrachtung der durchscheinenden Platten gegen das Licht, sowie deren Stücke nach dem Zerbrechen zeigten im Innern keine erheblichen Risse oder Hohlräume. Das Paraffin der einen Platte stammte von käuflichen Paraffinkerzen, das der anderen wurde als reines Paraffin in der Apotheke gekauft. Das Stearin stammte von käuflichen Stearinkerzen. Alle Versuche, nach dieser Methode auch den Schwefel zu gießen, mißlangen. Ich schlug da schließlich folgendes Verfahren ein. Ich versah eine Spiegelglasplatte rings mit einem nach aufwärts ragenden Papierrand. Darauf wurde der zuvor etwas über den Schmelzpunkt (bis er ein wenig dick wurde) erhitzte Schwefel ausgegossen.

Wegen des etwa ausfließenden Schwefels befand sich die Glasplatte in einer Pappendeckelschachtel. Der flüssige Schwefel wurde nun rasch, jedoch so, daß keine Luftbläschen dazwischen blieben, mit einer zweiten Spiegelglasplatte bedeckt, die von der ersten durch drei gleich dicke Drahtstücke getrennt war, die schon früher auf der zweiten Platte mit Schwefel aufgekittet waren. Glasstücke konnten hierzu nicht verwendet werden, weil sie sich zu rasch mit einer festen Schwefelschicht bedeckten, die ihre Dicke vergrößerte. Beide Glasplatten wurden bis nahe an den Schmelzpunkt des Schwefels vorgewärmt, um ihr Zerspringen und das zu rasche Erkalten des letzteren zu verhüten. Während des Erstarrens wurde die obere Glasplatte sanft gegen die untere gedrückt, und rasch der über die obere vorragende Schwefelrand entfernt, um ein Anhaften der Schwefelplatte am Rande zu verhüten, wodurch dann beim Erstarren Risse im Innern entstehen. Das Glas war wie beim Paraffin geölt. Hatten Schwefel und Glas nicht genau die richtige Temperatur, so erstarrte ersterer entweder zu früh und enthielt Blasen, oder er blieb zu lange flüssig und haftete dann an, oder bekam Risse, wenn er sich nicht

gar selbst entzündete. Diesen Schwierigkeiten ist es zuzuschreiben, daß kleine Hohlräume im Schwefel nicht ganz zu vermeiden waren, infolgedessen die von mir gefundene Dielektrizitätskonstante desselben um einen wahrscheinlich kaum erheblichen Betrag zu klein sein muß.

Noch schwieriger war das Gießen der Kolophoniumplatten. Öl verhinderte ihr Anhaften am Glase gar nicht. Ich bestrich daher letzteres mit Glyzerin. Allein auch da zerbrach das Kolophonium beim Erstarren oder Ablösen immer. Deshalb bedeckte ich beide Glasplatten mit dünnerem, mit Glyzerin getränktem sogenannten Seidenpapier, das sich durch Kapillarität vollkommen dicht auf dieselben auflegte, so daß die Harzplatten zwischen dem Seidenpapiere erstarrten; im übrigen geschah der Guß wie beim Schwefel. Das Ablösen geschah unter Wasser. Auf diese Weise erhielt ich sehr schöne Kolophoniumplatten; nur ihre Oberfläche war entsprechend dem Papiere rauh. Die Platten aller Substanzen waren Quadrate von etwa 200 mm Seitenlänge, so daß sie an allen Stellen wenigstens 20 mm über den Rand der Kondensatorplatten hinausragten. Während die isolierende Platte sich zwischen den Kondensatorplatten befand, war sie unten durch eine gabelartige Vorrichtung getragen, und lehnte sich, da sie vertikal stand, nur mit geringer Kraft an die Kondensatorplatten. Beim Hineinschieben wurde große Sorgfalt darauf verwendet, daß sie die beiden Kondensatorplatten möglichst wenig berührte, jedenfalls nicht drückte, weil die kleinste Veränderung in der Stellung der Kondensatorplatten schon erhebliche Fehler in der Bestimmung der Dielektrizitätskonstante nach sich zog. Überdiens diente die unveränderte Lage des Bildes des Gitters G im Mikroskope, sowie die Gleichheit der Kapazität des Kondensators vor dem Einschieben und nach dem Herausziehen der isolierenden Platte als Kontrolle, daß die Kondensatorplatten keine Deformation erfahren hatten.

§ 4.

Zusammenstellung der Apparate während der Versuche.

Um mit Hilfe dieser Apparate die Dielektrizitätskonstante jener Isolatoren zu bestimmen, verband ich zwei gegenüberstehende Quadranten des Elektrometers mit der Erde (der

Gasleitung), die beiden anderen dagegen mit einem fixen Kupferdrahte (CD , Fig. 4), der ganz durch die Luft geführt, nur an einer Stelle C mit Siegellack unterstützt war. Oberhalb dieses Drahtes befanden sich drei bewegliche Kupfer-

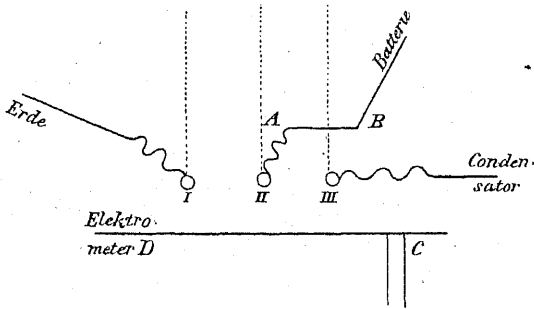


Fig. 4.

drähte (ich will sie die Drähte I, II und III nennen). Ihre Enden sind in Fig. 4 durch die kleinen mit I, II und III bezeichneten Kreise dargestellt.

Ein beweglicher Draht ist in der Fig. 4 durch eine Schlangenlinie, ein fixer durch eine gerade ausgedrückt. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß die Drähte nicht alle in einer Ebene lagen, sondern tunlichst zweckmäßig im Raume angeordnet waren. Die Drähte AB und CD waren parallel I, II und III aber ungefähr senkrecht darauf. Der Draht I war ebenfalls mit der Erde, der Draht II mit dem einen Pole der Batterie, der Draht III mit der einen Kondensatorplatte verbunden. Die beiden letzteren Drähte waren natürlich in ihrem übrigen Laufe ebenfalls isoliert. Der andere Pol der Batterie und die andere Kondensatorplatte waren mit der Erde in Verbindung. Sämtliche Drähte wurden nicht direkt mit den Händen berührt, um nicht durch die stets etwas elektrischen Rockärmel Störungen hervorzurufen; sondern die Enden der Drähte I, II und III hingen an langen Kokonfäden, die mittels einer passenden Hebelvorrichtung aus ziemlicher Entfernung gehoben und gesenkt werden konnten. Die Kokonfäden sind in der Figur punktiert. Die Senkung des Drahtes I entlud das Elektrometer. Wurde der Draht I gehoben und II gesenkt, so wurde dasselbe direkt durch die Batterie ge-

laden. Ich will den hierdurch hervorgebrachten Ausschlag kurz den Batterieausschlag nennen. Das fixe Ende des Drahtes III aber führte zum Kondensator, während sein bewegliches Ende, wenn es gesenkt wurde, den zum Elektrometer führenden Draht, wenn es aber gehoben wurde, einen anderen fixen, zum nicht abgeleiteten Pole der Batterie führenden Draht AB berührte. Wurde also der Draht III gehoben, so wurde der Kondensator durch die Batterie geladen, wurde er hierauf gesenkt, so teilte er einen Teil seiner Elektrizität dem Elektrometer mit. Den hierdurch bewirkten Ausschlag nenne ich kurz den Kondensatorausschlag. Aus ihm und dem Batterieausschlage kann, wie wir später sehen werden, die Kapazität des Kondensators bestimmt werden. Trotz aller Vorsicht waren hier und da Kokonfäden oder Hebelvorrichtungen etwas elektrisch, und verursachten bei ihrer Bewegung kleine Störungen, so daß ich nie beobachten konnte, ohne mich vorher überzeugt zu haben, daß, wenn man den sonst mit dem nicht abgeleiteten Pole der Batterie verbundenen Draht auch mit der Erde verbunden hatte, keine Bewegung der Drähte den mindesten Ausschlag hervorrief. Bei den meisten Versuchen blieb der Kondensator so lange mit dem Elektrometer verbunden, bis die Ablesung gemacht werden konnte. Dann wurden beide durch Senken des Drahtes I entladen. Um auch Versuche anstellen zu können, wobei der Kondensator nur sehr kurze Zeit geladen blieb, diente eine andere Vorrichtung, bei der das bewegliche Ende des Drahtes III sowohl in seiner höchsten als auch tiefsten Lage einen mit der Erde verbundenen Kupferdraht berührte. Auf seinem Wege aus der tiefsten in die höchste Lage aber schleifte es an zwei ebenfalls aus Kupferdraht gebogenen Federn, von denen die erste mit der Batterie, die zweite mit dem Elektrometer verbunden war, so daß mit einem raschen Schlage auf die betreffende Hebelvorrichtung der Kondensator geladen, mit dem Elektrometer verbunden und wieder entladen wurde. Dabei kam er natürlich schon wieder außer Kontakt mit dem Elektrometer, bevor noch die Aluminiumplatte ihre Lage merklich verändert hatte. Damit bei der raschen Bewegung nicht mangelhafter Kontakt eintrete, waren hierbei alle Kupferdrähte an den Berührungsstellen mit einer dicken Quecksilberhaut bedeckt.

§ 5.

Berechnung der Kapazität des Kondensators aus den Elektrometerablesungen.

Ich will nun zeigen, wie aus den oben als Batterie- und Kondensatorausschlag bezeichneten Ableseungen die Kapazität des Kondensators gefunden wird. Unter Kapazität eines Leiters verstehe ich dabei, wie bereits bemerkt, die Elektrizitätsmenge, welche er annimmt, wenn er mit einer Batterie vom Potentiale 1 geladen wird. Dieselbe hängt natürlich nicht bloß von der Gestalt des Leiters, sondern auch von der Position der in seiner Nähe befindlichen Leiter ab. Die Elektrizitätsmenge, welche derselbe Körper annimmt, wenn er mit einer Batterie vom Potentiale p geladen wird, ist also gleich seiner p fachen Kapazität.

Da, wie wir sahen, der beobachtete Ausschlag des Elektrometers dem Potentiale, mit welchem dasselbe geladen wird, nicht genau proportional ist, so wollen wir statt desselben immer den bereits nach der zweiten Tabelle im § 1 korrigierten in die Rechnung einführen. Sei nun φ der in dieser Weise korrigierte Ausschlag des Elektrometers. Es ist dann der beobachtete Ausschlag offenbar eine Funktion von φ , und zwar immer nahe gleich φ . Ferner sei P das Potential im Elektrometer (unter Elektrometer verstehe ich in diesem Paragraphen immer die beiden Quadranten, welche geladen werden, samt allen Drähten und sonstigen Leitern, welche mit denselben in Verbindung stehen), und i eine der Elektrisierung des Aluminiumplättchens proportionale Größe, so können wir setzen:

$$(1) \quad \varphi = A P i$$

Verbinden wir das Elektrometer direkt mit der Batterie, so wird P gleich dem Potentiale p am nicht abgeleiteten Pole der Batterie, φ gleich dem korrigierten Batterieausschlage, den wir mit b bezeichnen wollen. Es ist also

$$(2) \quad b = A p i.$$

Da wir die Korrektion so gewählt haben, daß der korrigierte Ausschlag b dem Potentiale p proportional ist, so folgt, daß A eine Konstante sein muß. Es werde nun der Kondensator

sator mit der Batterie geladen und dann dauernd mit dem Elektrometer verbunden, bis dieses den Kondensatorausschlag c gibt (c sei wieder der bereits nach der zweiten Tabelle in § 1 korrigierte Ausschlag; k sei die Kapazität des Kondensators); dann nimmt derselbe von der Batterie die Elektrizitätsmenge kp auf. Dieselbe verteilt sich dann auf Kondensator und Elektrometer. Allein, da das Aluminiumplättchen ebenfalls elektrisch ist, so wird es, wenn es sich von seiner Ruhelage zum Ausschlage c begibt, eine gewisse Elektrizitätsmenge binden. Die Elektrizitätsmenge, welche in die Erde abfließen würde, wenn das Elektrometer mit derselben verbunden wäre, und dann das Aluminiumplättchen von seiner Ruhelage durch irgendwelche mechanische Mittel bis in die dem Ausschlage c entsprechende Stellung gebracht würde, ist entgegengesetzt bezeichnet mit kp , proportional der Größe i , und wenigstens nahe proportional der Größe c . Wir wollen sie mit $-B_c c i$ bezeichnen. c ist zwar der korrigierte Ausschlag; da derselbe aber dem wirklichen nahe gleich ist, so ist jede dem letzteren nahe proportionale Größe auch dem ersteren nahe proportional. Der Größe B wurde der Index c gegeben, um anzuzeigen, daß sie nicht vollkommen konstant zu sein braucht, sondern noch von c abhängen kann.

Kehren wir zu dem eben früher betrachteten Vorgange zurück. Der Kondensator nahm die Elektrizitätsmenge kp auf; er würde sie also wieder abgeben, wenn er mit der Erde verbunden würde. Das Elektrometer würde, wenn es, ohne daß sich die Stellung des Aluminiumplättchens verändern könnte, mit der Erde verbunden würde, die Elektrizitätsmenge $-B_c c i$ abgeben. Würden wir also, nachdem der Ausschlag c erfolgt ist, das Aluminiumplättchen durch irgendwelche mechanische Mittel in seiner Lage festhalten, und dann Kondensator und Elektrometer mit der Erde verbinden, so würde in dieselbe die Elektrizitätsmenge $kp - B_c c i$ abfließen.

$kp - B_c c i$ ist also die sogenannte freie Elektrizität, und es fragt sich nur noch, welches Potential q im Elektrometer (und Kondensator, denn in beiden ist das Potential gleich) durch diese Elektrizitätsmenge erzeugt wird. Wir finden q , indem wir die Elektrizitätsmenge $kp - B_c c i$ durch die gesamte Kapazität des Kondensators und Elektrometers dividieren. Die

Kapazität des Elektrometers (d. h. also der beiden nicht zur Erde abgeleiteten Quadranten samt allen Drähten und Leitern, die damit dauernd verbunden sind) wird noch ein wenig von der Stellung des Aluminiumplättchens, also von c abhängen. Ich will sie daher mit e_c bezeichnen. Die Kapazität des Kondensators ist k . Es ist also

$$q = \frac{k p - B_c c i}{k + e_c}.$$

Würde das Elektrometer mit einer Batterie vom Potentiale q verbunden, so würde es genau auch den Ausschlag c geben. Wir können daher in Gleichung (1), die sich auf direkte Ladung des Elektrometers durch eine Batterie bezieht, $\varphi = c$, $P = q$ setzen, und erhalten

$$c = A q i = \frac{k p - B_c c i}{k + e_c} \cdot A i,$$

woraus folgt:

$$k = c \cdot \frac{e_c + A B_c i^2}{A p i - c},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (2)

$$(3) \quad k = (e_c + A B_c i^2) \frac{c}{b - c}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck wird wegen des Gliedes $A B_c i^2$ etwas mit der Ladung des Elektrometers wachsen. Um zu sehen, ob derselbe noch in erheblicher Weise von c abhängt, untersuchte ich die Kapazität des Kondensators bei unveränderlicher Stellung desselben und unveränderter Ladung des Elektrometers mit Batterien von verschiedener Elementenzahl, so daß also b und c variierten, k und i aber konstant waren. Die nachstehende Tabelle enthält in der ersten Kolumne die Werte von c in Skalenteilen. In der zweiten die dazu gehörigen Werte von $k(b-c)/c$, also von $e_c + A B_c i^2$ dividiert durch denjenigen Wert von $e_c + A B_c i^2$, welcher zu $c = 50$ Skalenteilen gehört.

c	$\frac{e_c + A B_c i^2}{e_{50} + A B_{50} i^2}$
110	1,015
160	1,018
220	1,025
270	1,027
333	1,033

Die Tabelle zeigt, daß die Werte von $e_c + AB_c i^2$ nur wenig mit dem Ausschlage c variieren; sie nehmen für 100 Skalenteile Ausschlag etwa um 1 Proz. zu.

Die Größe $e_c + AB_c i^2$ war klein gegen die Kapazitäten k , welche ich später zu messen wünschte. Es wäre also bei allen Versuchen b nahe gleich c geworden, was die Genauigkeit sehr beeinträchtigt hätte.

Um diesem Übelstande abzuhelfen, verband ich das Elektrometer dauernd mit der einen Platte eines anderen kleinen Kondensators, bei dem jedoch die Platten so nahe waren, daß seine Kapazität etwa viermal so groß als $e_c + AB_c i^2$ war. Die andere Kondensatorplatte war natürlich zur Erde abgeleitet. Hierdurch ändert sich in unseren Formeln gar nichts, als daß sich zu $e_c + AB_c i^2$ eine Konstante addiert, die etwa viermal so groß ist als diese Größe selbst. Dies hat noch den Vorteil, daß die Größe, welche in den Formeln an die Stelle von $e_c + AB_c i^2$ tritt, nur fünfmal so kleine relative Veränderungen erfährt, als diese Größe selbst. Wir können daher die Formel (3) noch anwenden, wenn wir jetzt unter e_c die gesamte Kapazität des Elektrometers samt der des damit verbundenen Kondensators verstehen. Nun wird alsdann der Wert von $e_c + AB_c i^2$ nur um $\frac{1}{5}$ Proz. zunehmen, wenn c um 100 Skalenteile wächst. Bezeichnen wir daher die Größe $e_0 + AB_0 i^2$ in dieser neuen Bedeutung mit E , so ist

$$e_c + AB_c i^2 = E \left(1 + \frac{c}{50000} \right)$$

und die Gleichung (3) geht über in

$$(4) \quad k = E \left(1 + \frac{c}{50000} \right) \frac{c}{b - c}.$$

Die Größe E ist noch von i abhängig; dies braucht jedoch nicht berücksichtigt zu werden, da i bei jeder Versuchsreihe fast konstant blieb und kleine Schwankungen desselben zudem durch die Umkehrung der Versuchsreihe, welche ich jedesmal vornahm, eliminiert wurden. Überdies konstatierte ich noch durch Versuche, daß E mit wachsendem i nur sehr wenig zunimmt. E ist also für jede Versuchsreihe als konstant anzusehen. (Ich bemerke noch, daß bei Berechnung der Dielektrizitätskonstante immer nur die relativen Werte der bei

einer und derselben Versuchsreihe bestimmten Kapazitäten benützt wurden.) Wird der Kondensator von der Kapazität k wieder mit einer Batterie vom Potentiale p geladen, aber jetzt nur einen Moment mit dem Elektrometer verbunden und dann sogleich wieder davon getrennt, so ändert während der Elektrizitätsmitteilung das Aluminiumplättchen seine Lage nicht merklich. Es wird daher dem Elektrometer die Elektrizitätsmenge $k p e_0 / (k + e_0)$ mitgeteilt. e_0 ist wieder die Kapazität des Elektrometers (d. h. also der zwei nicht abgeleiteten Quadranten samt den damit verbundenen Drähten und damit dauernd verbundenem kleinen Kondensator), wenn sich das Aluminiumplättchen in seiner Ruhelage befindet. Nun erst, nachdem der große Kondensator bereits wieder vom Elektrometer getrennt ist, erfolgt der Ausschlag. Wir wollen den wieder nach der zweiten Tabelle im § 1 korrigierten Ausschlag mit γ bezeichnen, so wird durch denselben die Elektrizitätsmenge $-B_\gamma i \gamma$ frei. Die gesamte freie Elektrizitätsmenge ist also

$$\frac{k p e_0}{k + e_0} - B_\gamma i \gamma.$$

Dieselbe verteilt sich auf dem Elektrometer, das jetzt die Kapazität e_γ hat. Sie erzeugt daher in demselben das Potential

$$\frac{k p e_0}{e_\gamma (k + e_0)} - \frac{B_\gamma i \gamma}{e_\gamma};$$

und folglich ist wieder nach Formel (1)

$$\gamma = \frac{A i}{e_\gamma} \left(\frac{k p e_0}{k + e_0} - B_\gamma i \gamma \right),$$

woraus folgt

$$\gamma = \frac{A i k p e_0}{(A + e_0)(e_\gamma + A B_\gamma i^2)}$$

$$k = \frac{e_0 \gamma}{\frac{A i p e_0}{e_\gamma + A B_\gamma i^2} - \gamma}$$

Der korrigierte Ausschlag β , den dieselbe Batterie erzeugen würde, wenn sie direkt, aber wieder nur momentan, mit dem Elektrometer verbunden würde, so daß die Elektrizitätsmitteilung schon wieder aufhörte, bevor das Aluminiumplättchen in erhebliche Bewegung kommen konnte, wird gefunden, indem man in den obigen Formeln $k = \infty$ setzt; derselbe ist also

$$\beta = \frac{A i p e_0}{e_\beta + A B_\beta i^2}.$$

Der Ausdruck für k geht also über in

$$k = \frac{e_0 \gamma}{\frac{e_\beta + A B_\beta i^2}{e_\gamma + A B_\gamma i^2} \beta - \gamma},$$

oder weil nach dem früheren

$$\frac{e_\beta + A B_\beta i^2}{e_\gamma + A B_\gamma i^2} = 1 + \frac{\beta - \gamma}{50000}$$

ist, so erhält man

$$k = \frac{e_0 \gamma}{\beta \left(1 + \frac{\beta - \gamma}{50000}\right) - \gamma} = \frac{e_0 \gamma}{\beta - \gamma} \left(1 - \frac{\beta}{50000}\right).$$

Um die Konstante e_0 mit der früher gebrauchten Konstante E vergleichen zu können, müssen wir den bei dauernder Verbindung von der Batterie erzeugten korrigierten Ausschlag b betrachten. Nach den Formeln, die wir für b und β hatten, ist

$$\frac{\beta}{b} = \frac{e_0}{E} \left(1 - \frac{\beta}{50000}\right),$$

daher

$$(5) \quad k = E \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{\beta - \gamma}.$$

Die beiden Formeln (3) und (5) werden wir zur Berechnung der Versuche anzuwenden haben. Die erste Formel wurde noch geprüft, indem ich dieselbe Kapazität mit verschiedener Elementzahl und bald mit momentaner, bald mit dauernder Verbindung maß. So ergab sich eine und dieselbe Kapazität mit 6, 12 und 18 Elementen bei dauernder Verbindung gemessen zu 0,5287, 0,5285, 0,5279. Eine andere in derselben Weise bestimmt, ergab sich zu 0,2281, 0,2277, 0,2279. Von der Prüfung der Formel (5) wird in § 10 die Rede sein, wo wir die Messung der Kapazität bei momentaner Ladung besprechen werden. Da es sich bei Berechnung der Dielektrizitätskonstante immer nur um die Verhältnisse zweier bei gleichem i gemessener Kapazitäten handeln wird, so brauchen wir uns um den absoluten Wert von E nicht zu kümmern; wir wollen später immer $E = 1$ setzen.

§ 6.

Theorie der Berechnung der Dielektrizitätskonstante aus der Kapazität des Kondensators.

Da sich bei meinen Versuchen die Kondensatorplatten durchweg sehr nahe standen, so war der weitaus größte Teil der Elektrizität an den einander vis-à-vis stehenden Flächen derselben angehäuft, die ich als die Flächen M und N bezeichnen will, und zwar sei M die mit der Erde verbundene. Die Theorie der Verteilung der Elektrizität auf zwei sehr nahestehenden leitenden Flächen wurde durch Green und Clausius (siehe des letzteren Abhandlung über mechanische Wärmetheorie, 2. Abt. S. 74) gegeben. Legen wir in die Fläche M des Kondensators den Koordinatenanfangspunkt und ziehen die z -Achse senkrecht darauf, so hat nach dieser Theorie das elektrische Potential zwischen beiden Flächen die Form $V = Az$. An der Fläche M ist es Null, weil selbe mit der Erde verbunden ist. Sei dasselbe an der Fläche N gleich V_1 und sei m die Distanz der beiden Flächen, so ist $A = V_1/m$. Die Dichtigkeit h der Elektrizität auf der Fläche N ist

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dz} = \frac{1}{4\pi} A = \frac{V_1}{4\pi m}.$$

Die gesamte Elektrizitätsmenge auf der Fläche N ist daher $Qh = V_1 Q/4\pi m$, wenn Q ihre Oberfläche ist. Dividieren wir dieselbe durch V_1 , so bekommen wir die Elektrizitätsmenge, mit der die Fläche N sich laden würde, wenn auf derselben das Potential 1 herrschte. Dieselbe ist also

$$(6) \quad \kappa = \frac{Q}{4\pi m}.$$

Wenn man von der jedenfalls nur kleinen Elektrizitätsmenge, die sich auf den Zuleitungsdrähten, der abgewandten Fläche der Kondensatorplatte und dem Rande derselben befindet, abstrahiert, so ist κ dieselbe Größe, welche wir als Kapazität des Kondensators bezeichnet haben. Letztere muß also angenähert dem Abstände der Kondensatorplatten verkehrt proportional sein. Dies zeigte sich auch wirklich. Es stellte sich aber heraus, daß die Proportionalität eine viel genauere, ja fast vollständig exakte wurde, wenn man von

sämtlichen Kapazitäten diejenige abzog, welche der Kondensatorplatte noch nach gänzlicher Entfernung der zweiten mit der Erde verbundenen zukam, und welche wir kürzshalber die Trennungskapazität nennen wollen. Es ist dies ein Beweis, daß die Trennungskapazität nahe gleich der Elektrizitätsmenge ist, die sich unter Einfluß des Potentials 1 auf den Zuleitungsdrähten, der Rückfläche und dem Rande der Kondensatorplatte aufhäuft, was auch a priori nicht unwahrscheinlich ist. Da die Trennungskapazität an sich klein ist, so ist eine große Übereinstimmung nicht notwendig. Auf die Bestimmung der Dielektrizitätskonstante wäre eine nicht vollständige Übereinstimmung um so weniger von Einfluß, da sich dieselbe ja ohne und mit dazwischen gebrachter Isolatorschicht in gleicher Weise äußern würde. Ich bemerke hier noch, daß sich die Trennungskapazität durch Verminderung der in der Nähe der Kondensatorplatten befindlichen Holz- und Metallbestandteile noch erheblich vermindern ließe. Die Größe κ bekommen wir also mit großer Annäherung, indem wir von der wirklichen Kapazität k des Kondensators die Trennungskapazität abziehen. Ganz ähnlich gestaltet sich die Theorie, wenn sich zwischen den Kondensatorplatten eine dielektrische Zwischenschicht befindet, welche ebenfalls von zwei parallelen Ebenen begrenzt ist, aber den Raum zwischen den Kondensatorplatten, wie es bei meinen Versuchen der Fall war, nicht vollständig ausfüllt. Legen wir das Koordinatensystem wie früher, so folgt aus dem Umstande, daß das Potential V sowohl in Luft als auch im Isolator der Gleichung

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

genügen muß, daß dV/dz in beiden Mitteln konstant sein muß.

Nach der eingangs erwähnten Maxwell-Helmholtzschen Theorie muß ferner dV/dz in Luft D mal so groß als im Isolator sein, wenn D die Dielektrizitätskonstante desselben ist. Ist also in Luft dV/dz gleich A , so ist es im Isolator A/D . Sei nun n die Dicke der isolierenden Schicht. Im Isolator ist $dV/dz = A/D$. Es wächst also V von der einen Begrenzungsfläche desselben bis zur anderen um An/D . Sei die Distanz der Platten wiederum gleich m , so bleibt für die Dicke der zwischen ihnen befindlichen Luftschicht der Wert $m - n$. In

dieser Luftschicht wächst also V um $A(m - n)$. Der ganze Zuwachs, den V von der Kondensatorfläche M bis zu N erleidet, ist also $(An/D) + A(m - n)$. Da V auf der Fläche M gleich Null, auf N aber gleich V_1 ist, so muß dieser Zuwachs gleich V_1 sein. Es ist also $(An/D) + A(m - n) = V_1$

$$A = \frac{V_1}{m - n + \frac{n}{D}}.$$

Die Dichte der Elektrizität auf der Fläche N ist wie früher $1/4\pi dV/dz$, also $(1/4\pi)A$, weil dV/dz dort wieder gleich A ist. Die gesamte auf der Oberfläche N befindliche Elektrizitätsmenge ist also

$$\frac{1}{4\pi} A Q = 4\pi \frac{Q V_1}{\left(m - n + \frac{n}{D}\right)}.$$

Dividieren wir sie durch V_1 , so bekommen wir die Elektrizitätsmenge, die sich unter dem Einflusse des Potentials 1 auf der Fläche N ansammeln würde, und die wir wieder mit κ bezeichnen wollen. Es ist also

$$(7) \quad \kappa = \frac{Q}{4\pi \left(m - n + \frac{n}{D}\right)}.$$

Die Größe κ ist wieder wahrscheinlich nahezu die Kapazität des Kondensators, und wird wahrscheinlich mit weit größerer Annäherung gefunden, wenn man von der wirklichen Kapazität desselben seine Trennungskapazität abzieht. Ich bemerke hier noch, daß die Trennungskapazität sich nicht merklich verändert, wenn man an die Kondensatorplatte die isolierende Platte anlehnt, sobald nur die zweite mit der Erde verbundene Platte entfernt ist, was sich übrigens auch aus der Theorie ergibt. (Vgl. § 11.) Die Trennungskapazität wurde durch Anlehen der Hartgummiplatte II etwa um 2 bis 5 Proz. größer, eine Zahl, die übrigens (wohl durch einen geringeren Elektrizitätsgehalt der Hartgummiplatte) etwas unsicher ist.

Die Formeln (6) und (7) setzen voraus, daß die Kapazität κ in absolutem Maße gemessen ist. Ich habe dies niemals getan, sondern die Kapazitäten in einem ganz willkürlichen, aber für jede Versuchsreihe konstanten Maße gemessen. Um daher Formeln zu erhalten, welche auf meine Versuche passen,

müssen wir die durch die Formeln (6) und (7) gegebenen Werte von κ noch mit einer gewissen Konstante F multiplizieren. Dadurch gehen diese Formeln über in

$$\kappa = \frac{Q F}{4 \pi m} \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{Q F}{4 \pi \left(m - n + \frac{n}{D} \right)}.$$

Wir wollen nun den reziproken Wert von κ mit λ bezeichnen, und außerdem $(4 \pi / Q F) = G$ setzen; dann erhalten wir

$$(8) \quad \lambda = G m,$$

und wenn die isolierende Schicht dazwischen ist

$$(9) \quad \lambda = G \left(m - n + \frac{n}{D} \right).$$

§ 7.

Prüfung der Formel (8).

Um zu konstatieren, daß die gemachten Vernachlässigungen in der Tat erlaubt sind, war es zunächst notwendig, die Formel (8) zu prüfen. Die Entfernung m der Kondensatorplatten ließ sich absolut nicht genau messen, wohl aber ließ sich die Verschiebung der Kondensatorplatten, also die Unterschiede des m bei verschiedenen Versuchen, genau bestimmen. Die Formel (8) zeigt, daß die Differenzen von λ den Differenzen der dazu gehörigen m proportional sein müssen. Um λ zu bestimmen, wurde zuerst die Kapazität des Kondensators bei den verschiedenen Plattendistanzen nach Formel (4) berechnet. Zog man davon die Trennungskapazität ab, so ergab sich κ , sein reziproker Wert ist λ . Um an einem Beispiel zu zeigen, wie die letztere Formel anzuwenden ist, sowie um einen Begriff von der Übereinstimmung der einzelnen von mir beobachteten Zahlen zu geben, lasse ich hier die vollen Details der betreffenden Beobachtungsreihe folgen, während ich bei allen folgenden Beobachtungsreihen bloß die gefundenen Werte von λ anführen werde, da die Mitteilung jeder einzelnen Ablesung zu viel Raum erfordern würde, und sich die Berechnung der übrigen λ ohnehin in ganz analoger Weise vollzog. Die Zahlen der ersten Rubrik numerieren bloß die betreffende Ab-

lesung und bezeichnen zugleich deren Reihenfolge. Die Zahlen der Rubrik *B* geben an, der wievielte Teilstrich des Gitters *G* (Fig. 3) mit dem Fadenkreuze des Mikroskops koinzidierte. Ihre Differenzen geben also die Differenzen der entsprechenden Plattendistanzen in Zehntelmillimetern. In Rubrik *C* ist die Zahl der Daniellschen Elemente eingetragen, mit denen der Kondensator geladen wurde. Die Zahl der Rubrik *D* gibt an, um den wievielten Skalenteil das Flammenbildchen während der Ladung des Elektrometers schwang, die der Rubrik *E* aber gibt immer die dazu gehörige Ruhelage, d. h. den Teilstrich, um den das Flammenbild $\frac{2}{3}$ Minuten nach der Entladung des Elektrometers schwang. In der Rubrik *F* sind die Differenzen der unter *D* und *E* angeführten Zahlen, also die unmittelbar abgelesenen Ausschläge des Elektrometers aufgeführt. In den beiden letzten Kolumnen stehen dieselben Ausschläge nach der Tabelle in § 1 korrigiert, also die den mitgeteilten Elektrizitätsmengen proportionalen Ausschläge, und zwar wurden die in der Kolumne *c* eingetragenen Ausschläge erzeugt, indem zuerst der Kondensator mit der Batterie geladen, dann von demselben getrennt und dauernd mit dem Elektrometer verbunden wurde; sie sind es also, die wir in § 5 Kondensatorausschläge nannten und mit *c* bezeichneten. Die in der Kolumne *c* eingetragenen Ausschläge dagegen wurden durch direkte dauernde Verbindung des Elektrometers mit der Batterie erzeugt; sie sind also die Batterieausschläge *b* des § 5, wobei noch zu bemerken ist, daß 17 Elemente das Flammenbild weit über die Grenzen der Skala hinaus abgelenkt hätten, weshalb zuerst der von sechs hervorgebrachte Ausschlag, dann der von den nächsten sechs und endlich der vom Reste bewirkte Ausschlag bestimmt wurde. Die Summe dieser drei Ausschläge ist dann derjenige, den alle 17 Elemente gegeben hätten, und der in der Rubrik *b* zwischen der 19. und 20. Beobachtung angeführt ist. Die beiden Beobachtungen 37 und 38 wurden nach Entfernung der anderen Kondensatorplatte gemacht; sie dienten also zur Bestimmung der Trennungskapazität.

Man sieht, daß jede Kapazität viermal beobachtet wurde, zweimal zu Anfang und zweimal zum Schlusse. Die vier Ablesungen 1, 3, 34, 36 beziehen sich auf ganz dieselbe Kapazität, ebenso die Ablesungen 4, 5, 32, 33 usw. Die große Über-

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
1	1	6	148	$359^{1/2}$	$211^{1/2}$	209	
2	—	6	$51^{3/4}$	359	$307^{1/4}$		$300^{1/2}$
3	1	6	$147^{3/4}$	359	$211^{1/4}$	$208^{3/4}$	
4	3	6	207	$359^{1/2}$	$152^{1/2}$	$151^{1/2}$	
5	3	6	207	$359^{1/2}$	$152^{1/2}$	$151^{1/2}$	
6	5	6	$238^{3/4}$	$359^{1/4}$	$120^{1/2}$	120	
7	5	6	$238^{1/4}$	$359^{1/4}$	121	$120^{1/2}$	
8	7	6	$258^{3/4}$	$359^{1/4}$	$100^{1/2}$	$100^{1/4}$	
9	7	6	$258^{3/4}$	$359^{3/4}$	$100^{1/2}$	$100^{1/4}$	
10	—	6	52	$358^{3/4}$	$306^{3/4}$		300
11	9	17	$111^{1/2}$	$359^{1/2}$	248	244	
12	9	17	$111^{1/2}$	$359^{3/4}$	$247^{3/4}$	$248^{1/4}$	
13	13	17	162	360	198	$195^{3/4}$	
14	13	17	162	$359^{3/4}$	$197^{3/4}$	$195^{1/2}$	
15	17	17	$193^{1/2}$	360	$166^{1/2}$	$165^{1/4}$	
16	17	17	$193^{1/4}$	360	$166^{3/4}$	$165^{1/2}$	
17	25	17	230	$360^{1/2}$	$130^{1/2}$	$129^{3/4}$	
18			$52^{3/4}$	$359^{1/2}$	$306^{3/4}$		300
19	—	17	$54^{1/2}$	$359^{1/4}$	$304^{3/4}$		
20			106	$359^{1/2}$	$253^{1/2}$		847
21	25	17	230	$360^{1/2}$	$130^{1/2}$	$129^{3/4}$	
22	17	17	194	360	166	$164^{3/4}$	
23	17	17	$193^{1/2}$	$359^{3/4}$	$166^{1/4}$	165	
24	13	17	$162^{1/4}$	360	$197^{3/4}$	$195^{1/2}$	
25	13	17	$162^{1/2}$	360	$197^{1/2}$	$195^{1/4}$	
26	9	17	$111^{3/4}$	$359^{3/4}$	248	244	
27	9	17	$110^{3/4}$	359	$248^{1/4}$	$244^{1/4}$	
28	7	6	$258^{1/2}$	$359^{1/4}$	$100^{3/4}$	$100^{1/2}$	
29	7	6	259	$359^{1/2}$	$100^{1/2}$	$100^{1/4}$	
30	5	6	239	$359^{1/2}$	$120^{1/2}$	120	
31	5	6	239	$359^{1/2}$	$120^{1/2}$	120	
32	3	6	$207^{1/4}$	$359^{1/4}$	152	151	
33	3	6	$207^{1/4}$	$359^{1/4}$	152	151	
34	1	6	$147^{1/4}$	$358^{3/4}$	$211^{1/2}$	209	
35	—	6	52	$358^{1/4}$	$306^{1/4}$		$299^{1/2}$
36	1	6	147	$358^{1/2}$	$211^{1/2}$	209	
37	∞	17	$321^{1/2}$	360	$38^{1/2}$	$38^{1/2}$	
38	∞	17	$321^{1/4}$	360	$38^{3/4}$	$38^{3/4}$	

einstimmung dieser Zahlen, sowie die Regelmäßigkeit, mit der sich der durch die Batterie erzeugte Ausschlag änderte (welche Veränderungen nicht in Beobachtungsfehlern, sondern sicher in Schwankungen der elektromotorischen Kraft begründet sind, man vergleiche die Ablesungen 2, 10, 18, 35), geben einen Begriff von der Genauigkeit, welche die Elektrometerablesungen zulassen.

Es handelt sich jetzt darum, diese Zahlen zur Berechnung der Größe λ nach Formel (4) zu verwenden. Da es sich immer nur um die Verhältnisse verschiedener Kapazitäten, niemals um deren absolute Werte handelt, so kann die in dieser Formel vorkommende Größe \mathcal{E} gleich Eins gesetzt werden. Dadurch erscheinen alle Kapazitäten durch \mathcal{E} dividiert; ihr Verhältnis bleibt also ungeändert. Die Größen b und c der Formel (4) sind die in den Kolumnen b und c angeführten. Da für jede untersuchte Kapazität vier Werte von c beobachtet wurden, so nahm ich immer das Mittel aller vier und substituierte es für c in die Formel; für b nahm ich die zwischen den Beobachtungen 19 und 20 stehende Zahl oder das Mittel der Beobachtungen 2, 10, 18, 35, je nachdem bei dem betreffenden Versuche 6 oder 17 Elemente angewendet wurden. Die in dieser Weise gefundenen Werte der Kapazität k des Kondensators sind in der zweiten Kolumne der folgenden Tabelle zusammengestellt, deren erste Kolumne die dazu gehörigen Distanzen der Kondensatorplatten in Millimetern enthält, wobei jedoch die Distanz der Kondensatorplatten beim ersten Versuche, weil sie unbekannt ist, mit x bezeichnet wurde.

	k	$\lambda = \frac{1}{\kappa}$	
x	2,3023	0,444	2,92
$x + 0,2$	1,0200	1,028	
$x + 0,4$	0,6693	1,609	2,91
$x + 0,6$	0,5033	2,195	2,93
$x + 0,8$	0,4066	2,786	2,96
$x + 1,2$	0,3013	3,944	2,90
$x + 1,6$	0,2428	5,126	2,95
$x + 2,4$	0,1814	7,479	2,94
∞	0,0477		

Die letzte Zahl der zweiten Kolumne ist die von uns als Trennungskapazität bezeichnete. Zieht man sie von den Werten für k ab, so erhält man die mit α bezeichnete Größe; deren reziproker Wert λ ist in der dritten Kolumne angegeben.

Die vierte Kolumne aber enthält die Differenz zweier sich folgender Werte von λ , dividiert durch die Differenz der dazu gehörigen Distanzen der Kondensatorplatten. Bedenkt man, daß diese Distanz von Versuch zu Versuch nur um wenige Zehntelmillimeter verändert wurde, daß also die geringsten Fehler in der Einstellung schon ganz bedeutend aliquote Teile der Gesamtveränderung der Distanz der Kondensatorplatten sind, so muß man die Übereinstimmung der Zahlen in der letzten Kolumne als eine sehr erfreuliche bezeichnen. Die im früheren auseinandergesetzte Theorie der Berechnung der Kapazität des Kondensators findet also durch das Experiment ihre vollste Bestätigung, ein Beweis, daß die bei derselben gemachten Vernachlässigungen in der Tat erlaubt waren.

§ 8.

Numerische Berechnung der Dielektrizitätskonstanten.

Nachdem dies konstatiert war, konnte ich zur Untersuchung des Verhaltens der isolierenden Zwischenschichten übergehen. Nach der auseinandergesetzten Theorie soll die Kapazität des Kondensators nicht von der Lage der isolierenden Schicht zwischen den Kondensatorplatten abhängen.

Ich prüfte dies mit einer dazwischen gebrachten Hartgummiplatte. Bei unveränderter Distanz der Kondensatorplatten bewirkte ich durch kleine lose dazwischen gesteckte Siegelackstückchen, daß die Hartgummiplatte bald an der einen, bald an der anderen Kondensatorplatte anlag, bald auch sich ungefähr in der Mitte zwischen beiden befand. Der Kondensator wurde bei jeder Stellung der Hartgummischicht genau mit derselben Batterie geladen und dann dauernd mit dem Elektrometer verbunden. Bei einer Versuchsreihe, wobei die Distanz der Kondensatorplatten etwa $1\frac{1}{2}$ mal so groß als die Dicke der isolierenden Schicht war, erhielt ich hierbei folgende Ausschläge:

Hartgummi in der Mitte	265,	$264\frac{1}{2}$,
„ an der Kondensatorplatte <i>M</i>	265,	264,
„ „ „ „ „	<i>N</i>	$264\frac{3}{4}$, $264\frac{1}{2}$.

Bei einer anderen Versuchsreihe, wobei die Distanz der Kondensatorplatten reichlich gleich der doppelten Dicke der Hartgummiplatte war, ergaben sich folgende Ausschläge:

Hartgummi in der Mitte	$202\frac{3}{4}$,	$202\frac{3}{4}$,
„ an der Platte <i>M</i>	$203\frac{1}{4}$,	$202\frac{3}{4}$,
„ „ „ „ „	<i>N</i>	$203\frac{1}{4}$, $202\frac{3}{4}$.

Der überall beigefügte zweite Ausschlag wurde bei der Wiederholung der Versuchsreihe in der entgegengesetzten Reihenfolge erhalten. Die Übereinstimmung aller dieser Ausschläge ist so groß, daß ich dadurch für bewiesen halte, daß die Stellung der isolierenden Platte keinen Einfluß auf die Kapazität hat, und dies auch in den übrigen Isolatoren nicht weiter prüfte. Um noch zu prüfen, ob der hervorragende Rand der Isolatorplatten keine Störung hervorruft, stellte ich die Hartgummiplatte so, daß auf der einen Seite der Rand fast gar nicht über den Rand der Kondensatorplatten hervorragt, was ich die Stellung *B* nennen will, während derselbe sonst immer auf beiden Seiten nahe gleich viel hervorragte (Stellung *A*). Ich erhielt, wenn die Distanz der Kondensatorplatten nicht viel größer war als die Dicke der Hartgummiplatte, folgende Ausschläge:

Stellung <i>A</i>	$334\frac{3}{4}$,	$334\frac{1}{4}$,
„ <i>B</i>	$334\frac{1}{4}$,	$334\frac{1}{4}$,
„ <i>C</i>	$332\frac{3}{4}$,	$332\frac{1}{2}$,

wenn sie etwa $1\frac{1}{2}$ mal so groß als die Dicke des Hartgummi war

Stellung <i>A</i>	$264\frac{1}{2}$,	$264\frac{1}{4}$,
„ <i>B</i>	$264\frac{1}{4}$,	264.

Bei Stellung *C* ragten die Kondensatorplatten auf einer Seite schon ein wenig über die Hartgummiplatte hervor; dann erst trat also eine Verminderung der Kapazität ein.

Um auch noch die Formel (9) zu prüfen, wurde die Kapazität des Kondensators bei verschiedenen Distanzen der Kondensatorplatten, teils wenn, teils ohne daß die isolierende Schicht dazwischen war, geprüft. Die Differenzen von λ müssen dann wieder den Differenzen der Entfernungen der Kondensatorplatten proportional sein. Da sich dies bei Hartgummi und Paraffin wirklich zeigte, so habe ich es bei den übrigen Substanzen nicht weiter geprüft. Ich untersuchte 3 Hartgummi-, 2 Paraffin-, 2 Schwefel- und 2 Kolophoniumplatten. Mit jeder Platte wurden zwei oder drei Beobachtungsreihen gemacht, deren Resultat in den folgenden Tabellen zusammengestellt ist. Jeder Platte ist auch ihre mittlere Dicke (n) in Millimetern beigefügt. Die Dicke der Paraffin-, Kolophonium- und Schwefelplatten maß ich mit dem Kondensator selbst; ich zerschnitt denjenigen Teil, der sich zwischen den Kondensatorplatten befunden hatte, in 32 gleich große Quadrate. Jedes derselben wurde zwischen die Knöpfe E und F des Kondensators (Fig. 3) gebracht, welche dann durch die Kautschukschnüre K und L sanft aneinandergedrückt wurden. Das zu messende Stück war dabei sehr leicht beweglich, damit es sich nicht schief zwischen die Messingknöpfe stelle.

Nun wurde der Teilstrich des Gitters G bestimmt, auf den das Mikroskop visierte; Bruchstücke von Teilstrichen wurden in bekannter Weise mit einer Trommel bestimmt. Hierauf wurde das Stück der isolierenden Substanz zwischen den Messingknöpfen herausgenommen und dieselben unmittelbar aneinandergedrückt. Die Differenz der Ablesungen im Mikroskope in beiden Fällen gab die Dicke des gemessenen Stückes, und zwar bei Anwendung einiger Vorsicht mit großer Genauigkeit. Es wäre auch ganz ohne schädlichen Einfluß gewesen, wenn die Striche des Gitters G (deren Äquidistanz geprüft wurde) sich nicht genau im Abstände von $\frac{1}{10}$ mm befunden hätten, da es ja bloß darauf ankam, die Verschiebung der Kondensatorplatten im selben Maße wie die Dicke der isolierenden Platten zu messen. Ich maß auf diese Weise die Dicke aller isolierenden Platten an 32 Stellen, und nahm aus allen diesen Messungen das Mittel. Die Dicke der Hartgummiplatten, die ich nicht zerschneiden wollte, maß ich später durch einen aufgestützten Hebel mit Spiegelablesung, und reduzierte sie hernach auf

dasselbe Maß, wobei jedoch vielleicht nicht ganz dieselbe Genauigkeit erzielt wurde. Ich lasse nun die Tabellen folgen. Die erste Kolumne derselben enthält wieder die Distanzen der Kondensatorplatten in Millimetern, wobei wieder die kleinste, die übrigens für die verschiedenen Versuchsreihen verschieden war, mit x bezeichnet wurde. Die mit λ überschriebene Kolumne enthält die dazu gehörigen Werte von $\lambda = (1/\epsilon)$, die Kolumne δ aber enthält die Differenzen zweier sich folgender Werte von λ gebrochen durch die Differenz der entsprechenden Distanzen der Kondensatorplatten.

Ein dem x beigefügter Stern zeigt an, daß bei dem Versuche die Isolatorplatte sich zwischen den Kondensatorplatten befand. Sonst war zwischen denselben nur Luft. Wie bei der im vorigen Paragraph mitgeteilten Versuchsreihe ward jede Kapazität zweimal zu Anfang und zweimal zum Schluß gemessen, und aus allen vier Messungen das Mittel genommen.

Hartgummiplatte I, $n = 1,0824$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2		Versuchsreihe 3	
	λ	δ	λ	δ	λ	δ
x	0,634		0,577		0,575	
$x + 0,7$	2,353	2,456	2,309	2,474	2,309	2,477
$x + 1,4$	4,067	2,449	4,056	2,496	4,066	2,510
* $x + 1,4$	2,259		2,207		2,208	
* $x + 2,1$	3,969	2,443	3,951	2,491	3,962	2,506
* $x + 2,8$	5,704	2,479	5,699	2,497	5,708	2,494
	$G = 2,455$		$G = 2,484$		$G = 2,491$	
	$D = \begin{cases} 3,14 \\ 3,17 \\ 3,12 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 3,19 \\ 3,17 \\ 3,14 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 3,20 \\ 3,16 \\ 3,15 \end{cases}$	
	D im Mittel gleich 3,17					

Hartgummiplatte II, $n = 1,5851$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2	
	λ	δ	λ	δ
x	0,855		1,183	
$x + 0,7$	2,590	2,479	2,944	2,516
$x + 1,4$	4,338	2,497	4,728	2,548
$*x + 1,4$	1,668		2,008	
$*x + 2,1$	3,390	2,460	3,760	2,503
$*x + 2,8$	5,110	2,457	5,528	2,526
	$G = 2,479$		$G = 2,524$	
	$D = \begin{cases} 3,09 \\ 3,12 \\ 3,16 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 3,10 \\ 3,13 \\ 3,13 \end{cases}$	
	D im Mittel gleich 3,11			

Hartgummiplatte III, $n = 3,6294$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2	
	λ	δ	λ	δ
x	1,451		1,439	
$x + 0,7$	3,508	2,939	3,494	2,936
$x + 2,1$	7,661	2,966	7,618	2,948
$x + 3,5$	11,932	3,051	11,901	3,057
$*x + 3,5$	4,428		4,389	
$*x + 4,9$	8,416	2,848	8,383	2,853
	$G = 2,955$		$G = 2,950$	
	$D = \begin{cases} 3,19 \\ 3,34 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 3,21 \\ 3,35 \end{cases}$	
	D im Mittel gleich 3,20			

Paraffinplatte I, $n = 1,6947$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2		Versuchsreihe 3	
	λ	δ	λ	δ	λ	δ
x	1,157		1,145		1,153	
$x + 0,9$	3,715	2,842	3,702	2,841	3,725	2,858
$x + 1,8$	6,268	2,837	6,282	2,866	6,309	2,871
* $x + 1,8$	3,575		3,560		3,581	
* $x + 2,7$	6,162	2,874	6,164	2,893	6,173	2,880
	$G = 2,845$		$G = 2,856$		$G = 2,865$	
	$D = \begin{cases} 2,28 \\ 2,25 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 2,59 \\ 2,25 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 2,28 \\ 2,27 \end{cases}$	
	D im Mittel gleich 2,28					

Paraffinplatte II, $n = 2,3276$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2	
	λ	δ	λ	δ
x	0,747		0,748	
$x + 0,8$	3,048	2,876	3,051	2,879
$x + 1,6$	5,312	2,830	5,324	2,841
$x + 2,4$	7,655	2,929	7,656	2,915
* $x + 2,4$	3,803		3,816	
* $x + 3,0$	5,519	2,860	5,502	2,810
	$G = 2,870$		$G = 2,869$	
	$D = \begin{cases} 2,34 \\ 2,35 \end{cases}$		$D = \begin{cases} 2,33 \\ 2,36 \end{cases}$	
	D im Mittel gleich 2,34			

Schwefelplatte I, $n = 1,4205$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2	
	λ	δ	λ	δ
x	0,867		0,598	
$+ 0,9$	3,480	3,459	3,750	3,506
$x + 1,8$	6,575	3,439	6,880	3,478
$*x + 1,8$	2,944		3,221	
	$G = 3,452$		$G = 3,497$	
	$D = 3,87$		$D = 3,83$	
	D im Mittel gleich 3,85			

Schwefelplatte II, $n = 2,5594$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2	
	λ	δ	λ	δ
x	1,073		1,023	
$x + 0,7$	3,485	3,446	3,447	3,463
$x + 2,1$	8,380	3,496	8,351	3,503
$*x + 3,0$	4,909		4,882	
	$G = 3,463$		$G = 3,476$	
	$D = 3,84$		$D = 3,82$	
	D im Mittel gleich 3,8			

Kolophoniumplatte I, $n = 1,5770$ mm.

	Versuchsreihe 1			Versuchsreihe 2	
	λ	δ		λ	δ
x	0,651	3,459	x	0,644	3,463
$x + 0,7$	3,072		$x + 0,7$	3,068	
$x + 2,1$	7,905	3,452	$x + 2,1$	7,895	3,448
$*x + 2,0$	4,226		$*x + 1,8$	3,545	
	$G = 3,457$			$G = 3,458$	
	$D = 2,58$			$D = 2,56$	

D im Mittel gleich 2,57

Kolophoniumplatte II, $n = 2,5466$ mm.

	Versuchsreihe 1		Versuchsreihe 2		Versuchsreihe 3	
	λ	δ	λ	δ	λ	δ
x	2,272	3,474	2,279	3,477	2,308	3,469
$x + 0,7$	3,704		4,713		4,731	
$x + 2,1$	9,626	3,516	9,625	3,508	9,614	3,487
$*x + 3,0$	7,372		7,357		7,358	
	$G = 3,488$		$G = 3,487$		$G = 3,475$	
	$D = 2,52$		$D = 2,54$		$D = 2,54$	

D im Mittel gleich 2,53

Die Konstanz der Zahlen in der Kolumne δ ist eine Bestätigung der Formel (9). (Diese Zahlen sollen nur für jede Versuchsreihe konstant sein; daß sie von einer Versuchsreihe zur anderen variieren, erklärt sich daraus, daß sich die Distanz der Platten des kleinen, dauernd mit dem Elektrometer verbundenen Kondensators und auch die Elektrisierung des letzteren von einer Versuchsreihe zur anderen etwas veränderte.) Nur bei der Hartgummiplatte III ist die Konstanz minder befriedigend, weil wegen der Dicke dieser Hartgummiplatte die Distanz der Kondensatorplatten so sehr vergrößert werden mußte, daß dieselbe nicht mehr als sehr klein angenommen werden kann, wie es unsere Formeln voraussetzen. Aber auch hier sind die Abweichungen nicht sehr groß. Aus den Zahlen der obigen Tabellen ist jetzt nach Formel (9) die Dielektrizitätskonstante zu berechnen. Zunächst brauchen wir da für jede Versuchsreihe die Kenntnis der Konstanten G . Sei λ_1 der reziproke Wert der Größe κ bei der Distanz m_1 der Kondensatorplatten, ebenso λ_2 derselbe bei der Distanz m_2 , ohne daß eine dielektrische Zwischenschicht sich zwischen denselben befindet, so folgt aus Formel (8):

$$G m_1 = \lambda_1, \quad G m_2 = \lambda_2,$$

daher

$$G = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{m_2 - m_1};$$

die in der Kolumne δ stehenden Zahlen sind also geradezu die Werte der Konstanten G . Ich nahm da für jede Versuchsreihe den Mittelwert aus allen Zahlen der Kolumne δ , wobei ich jedoch aus leicht begreiflichen Gründen den bei kleineren Distanzen gemessenen Werten ein größeres Gewicht beilegte. Jeder vorhergehenden Zahl gab ich das doppelte Gewicht wie der nachfolgenden. Bei jeder Versuchsreihe habe ich den Wert beigefügt, den ich für dieselbe dem G beilegte. Übrigens stimmen die Zahlen der Kolumnen δ ohnedies so gut untereinander überein, daß es auf das Resultat ohne wesentlichen Einfluß ist, auf welche Art man das Mittel nimmt. Ist einmal G bestimmt, so ergibt sich D aus Formel (9). Bezeichnen wir den reziproken Wert von κ , wenn die isolierende Schicht von der Dicke n dazwischen ist, mit λ_3 , die dazu gehörige

Distanz der Kondensatorplatten mit m_3 , so ist nach dieser Formel

$$\lambda_3 = G \left(m_3 - n + \frac{n}{D} \right).$$

Da der absolute Wert von m_3 nicht bekannt ist, so wollen wir davon die Gleichung $\lambda_1 = G m_1$ subtrahieren, wobei m_1 die kleinste Distanz sein soll, welche die Kondensatorplatten hatten, während bloß Luft dazwischen war. Wir erhalten

$$\lambda_3 - \lambda_1 = G \left(m_3 - m_1 - n + \frac{n}{D} \right),$$

und daraus

$$(10) \quad D = \frac{n}{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{G} - m_3 + m_1 + n}.$$

Nach dieser Formel wurden die Werte von D berechnet, welche in den vorhergehenden Tabellen jeder Beobachtungsreihe beigelegt sind. Wo bei dazwischen befindlicher Isolatorschicht die Kapazität des Kondensators bei mehreren Plattendistanzen gemessen wurde, sind auch mehrere Werte von D angegeben, und zwar bezieht sich der erste immer auf die kleinste, die folgenden auf die größeren Plattendistanzen. Der erste dürfte also der genaueste sein.

Bei der ersten Versuchsreihe, die mit der Hartgummiplatte I angestellt wurde, wurde z. B. die Kapazität des Kondensators mit dazwischen befindlicher Hartgummiplatte bei drei verschiedenen Plattendistanzen gemessen. Dabei ergaben sich für λ_3 die Werte 2,259, 3,969, 5,704. Die dazu gehörigen Plattendistanzen, also die Werte von m_3 sind $x + 1,4$, $x + 2,1$, $x + 2,8$. Nehmen wir den ersten Wert von λ_3 , so haben wir also

$$\lambda_3 = 2,259, \quad m_3 = x + 1,4.$$

Für dieselbe Versuchsreihe ist die kleinste Plattendistanz, also m_1 gleich x ; dazu gehört $\lambda_1 = 0,634$; G aber ist gleich 2,455; n gleich 1,0824. Diese Werte in die Formel (10) substituiert, geben:

$$D = \frac{1,0824}{\frac{2,259 - 0,634}{2,455} - 1,4 + 1,0824} = 3,14.$$

Ein Blick auf die jedesmal am Schlusse der vorhergehenden Tabellen angegebenen Werte der Dielektrizitätskonstanten D

zeigt, daß sowohl die aus den verschiedenen mit einer und derselben Platte angestellten Versuchsreihen, als auch die für die verschiedenen Platten aus derselben Substanz gefundenen Werte derselben in sehr erfreulicher Weise übereinstimmen. Nur für die letzten Werte des D bei der Hartgummiplatte III gilt dies weniger. Da der Grund hiervon ohne Zweifel in der zu großen Distanz der Kondensatorplatten zu suchen ist, so wurden diese Werte beim Nehmen des Mittels ganz verworfen. Bei den anderen Versuchsreihen, aus denen sich mehrere Werte von D ergaben, habe ich wieder dem vorhergehenden immer das doppelte Gewicht wie dem nachfolgenden beigelegt.

Ich erwähne hier noch eines Versuches, wobei ich gleichzeitig die Hartgummiplatte II und die Schwefelplatte I zwischen die Kondensatorplatten brachte. Bezeichnen wir die Distanz der letzten hierbei mit m_4 , den Wert von $1/\kappa$ mit λ_4 , Dicke und Dielektrizitätskonstante für die Hartgummiplatte mit n_1 und D_1 , für die Schwefelplatte mit n_2 und D_2 , so findet man leicht aus der früher auseinandergesetzten Theorie

$$\lambda_4 = G \left(m_4 - n_1 - n_2 + \frac{n_1}{D_1} + \frac{n_2}{D_2} \right).$$

Um G zu finden, wurde gleichzeitig, während bloß Luft zwischen den Kondensatorplatten war, die Kapazität bei den Distanzen x , $x + 0,7$, $x + 2,1$ gemessen, für welche sich ergab: λ gleich 1,980, 4,448, 9,483. Bestimmt man hieraus genau wie früher G , so erhält man

$$G = 3,549, \quad x = 0,5579 \text{ mm.}$$

Die Distanz m_4 der Kondensatorplatten, während sich beide Isolatorschichten dazwischen befanden, war $x + 3 = 3,5579$ mm. Ferner fanden wir früher für jene beiden Isolatorplatten

$$n_1 = 1,5851, \quad D_1 = 3,11, \quad n_2 = 1,4205, \quad D_2 = 3,85.$$

Die Substitution dieser Werte in die obige Formel liefert $\lambda_4 = 5,078$, während das Experiment ergab $\lambda_4 = 5,092$.

Die Übereinstimmung dieser beiden Werte zeigt, daß sich auch die Kapazität des Kondensators, wenn gleichzeitig mehrere isolierende Schichten eingeschoben sind, ganz so verhält, wie es die Theorie fordert.

Da das Paraffin, aus dem die Paraffinplatten I und II gegossen waren, aus verschiedener Quelle stammte (die Platte I

hatte einen merklichen Geruch), so glaube ich, daß die Verschiedenheit der für dieselben gefundenen Dielektrizitätskonstanten in einer Verschiedenheit des Materials ihren Grund hat. Um den Einfluß der Zusammensetzung aus flüchtigeren und weniger flüchtigen Bestandteilen zu prüfen, goß ich aus dem Materiale der Platte II eine dritte Platte, nachdem ich es zuvor während längerer Zeit so stark erhitzt hatte, daß seine Dämpfe Papier bräunten. Diese dritte Platte, welche überdies bis zu ihrer Untersuchung sorgfältig vor der Berührung mit Wasserdampf bewahrt wurde, zeigte die Dielektrizitätskonstante 2,31, verhält sich also durchaus nicht anders als die Platte II.

§ 9.

Versuche mit dem Quecksilberkondensator.

Bei allen bisher beschriebenen Versuchen befand sich zwischen den Kondensatorplatten außer der Schicht, deren Dielektrizitätskonstante bestimmt werden sollte, auch noch eine Luftschicht. Obwohl nun die große Übereinstimmung aller Versuchsergebnisse mit der Theorie kaum einen Zweifel über die Zulässigkeit der Voraussetzungen zuläßt, welche ich machte, um den schädlichen Einfluß dieser Luftschicht zu eliminieren, so wünschte ich doch auch Versuche zu machen, wobei die dielektrische Schicht ganz allein zwischen den Kondensatorplatten war. Ein Andrücken der vergoldeten Messingplatten an die dielektrische Schicht genügte da keineswegs, weil dadurch nicht alle Luft entfernt werden konnte, und auch die Distanz der Kondensatorplatten hierdurch unbestimmbar wurde.

Auch ein Einschmelzen der isolierenden Substanz zwischen die Kondensatorplatten schien mir keine genügende Garantie für die Unveränderlichkeit der Distanz der Kondensatorplatten vor und nach dem Einschmelzen zu geben. Ich ersann daher eine andere Methode. Ich verschaffte mir einen Papierstreifen, dessen Breite gleich der Dicke der vergoldeten Kondensatorplatten und dessen Länge (natürlich abgesehen von den übereinander geklebten Enden) genau gleich der Peripherie der Kondensatorplatten war. Die beiden Enden dieses Papierstreifens wurden aufeinander geklebt, so daß derselbe geo-

metrisch vollkommen kongruent mit der zylindrischen Mantelfläche der Kondensatorplatte war. Dieser Papierstreifen wurde auf eine Hartgummiplatte geklebt, welche bloß als Träger fungierte, und genau horizontal auf drei hohen Siegelackstangen stand. Der Raum innerhalb des Papierstreifens wurde nun ganz voll mit Quecksilber gegossen; die ganze Masse dieses Quecksilbers nahm also nahezu dieselbe Gestalt, wie die Kondensatorplatte an. Auf die zu untersuchende Isolatorplatte wurde nun ein vollkommen gleich beschaffener Papierring geklebt, und dieselbe wurde mit jener Seite, auf der sich der Papierring nicht befand, auf das Niveau des Quecksilbers so aufgelegt, daß keine Luftblasen zwischen ihr und dem Quecksilber blieben. Schließlich wurde in den auf die Isolatorplatte aufgeklebten Papierring, der sich also ganz oben befand, ebenfalls Quecksilber gegossen, so daß sich die Isolatorplatte zwischen zwei horizontalen Quecksilberplatten befand, welche möglichst die Gestalt der Platten des Kohlrauschschen Kondensators hatten. Die Beobachtung wurde etwas unsicher dadurch, daß sich das Quecksilber, wenn es rein war, durch Kapillarität am Rande nicht ganz an die Isolatorplatte anlegte; war es aber unrein, so blieb es stellenweise auch noch außerhalb des Papierrandes an der Isolatorplatte haften. Auch war es nicht ganz leicht, die Isolatorplatte so auf das Quecksilber aufzusetzen, daß sich die obere Quecksilberscheibe genau vertikal über der unteren befand. Doch konnten bei großer Sorgfalt die aus allen diesen Ursachen stammenden Fehler auf ein Minimum reduziert werden. Vielleicht gelänge dies noch besser, wenn man die isolierende Schicht zu beiden Seiten mit kreisförmigen Scheiben von Stanniol oder Platinfolie bekleiden würde und diese erst in das Quecksilber tauchen ließe. Übrigens wurden bei jeder Versuchsreihe die Isolatorscheiben etwas hin und her gerückt, und dann ihre Kapazität nochmals mehrere Male bestimmt, oder sie wurden ganz neu aufgesetzt und wieder auf ihre Kapazität untersucht.

Die Kapazität des Quecksilberkondensators wurde ganz so, wie die des Kohlrauschschen gemessen. Die eine Quecksilberplatte wurde dauernd mit der Erde verbunden, die andere aber zuerst mit der Batterie geladen, dann von derselben getrennt und mit dem Elektrometer verbunden. Aus dem Aus-

schlage desselben und dem Batterieausschlage wurde die Kapazität k des Quecksilberkondensators bestimmt. Um aus dieser Kapazität die Dielektrizitätskonstante berechnen zu können, müßte auch noch die Kapazität bei derselben Plattendistanz bekannt sein, wenn sich zwischen denselben nur Luft befindet. Diese Kapazität konnte natürlich an den Quecksilberplatten nicht direkt gemessen werden. Um sie zu berechnen, untersuchte ich vielmehr zuvor und danach die Kapazität k des Kohlrauschschen Kondensators bei mehreren Plattendistanzen, während bloß Luft zwischen den Platten war. Daraus konnte zunächst ganz wie früher die Konstante G und aus ihr die Kapazität k'' bestimmt werden, welche der Kohlrauschsche Kondensator gehabt hätte, wenn die Distanz der Kondensatorplatten genau gleich der Dicke der isolierenden Schicht gewesen wäre. In dieser Distanz befanden sich nämlich die beiden Quecksilberplatten, und da ihre Gestalt dieselbe, wie die der Kohlrauschschen Kondensatorplatte war, so kann man annehmen, daß ihre Kapazität ebenfalls gleich k'' gewesen wäre, wenn sich zwischen denselben ohne Veränderung ihrer Gestalt und Distanz Luft befunden hätte. Die von den Zuleitungsdrähten und dem Rande bewirkte Störung eliminierte ich ganz wie früher, indem ich von den Kapazitäten k , k' und k'' die Kapazität abzog, welche der einen Kondensatorplatte nach Entfernung der anderen mit der Erde verbundenen zukam. Die nach dieser Subtraktion sich ergebenden Werte κ , κ' und κ'' wurden als korrigierte Kapazitäten bei Berechnung der Dielektrizitätskonstante verwendet. Dabei zeigte es sich, daß nach Entfernung der mit der Erde verbundenen Platte die Quecksilberplatte eine bedeutend kleinere Kapazität hatte, als die Metallplatte des Kohlrauschschen Kondensators. Die Kapazität der ersteren war 0,036, die der letzteren 0,059. Es mußte da natürlich von den an jedem Kondensator beobachteten Kapazitäten die diesem Kondensator entsprechende Trennungskapazität abgezogen werden. Es wäre dies vermieden worden, wenn der Kohlrauschsche Kondensator weniger Holzbestandteile gehabt hätte; denn sie allein vermehrten seine Trennungskapazität so bedeutend. In der folgenden Tabelle sind immer die reziproken Werte von κ , κ' und κ'' angegeben, welche wir λ , λ' und λ'' nennen wollen.

Die Dielektrizitätskonstante D ist das Verhältnis der Kapazitäten des Kondensators, wenn sich einmal Luft, das andere Mal die isolierende Substanz zwischen den Platten desselben befindet. Es ist also

$$D = \frac{\kappa}{\kappa''} = \frac{\lambda''}{\lambda}.$$

Ich untersuchte zwischen den Quecksilberplatten nur zwei Substanzen, nämlich Hartgummi und Paraffin. Die befriedigende Übereinstimmung, die sich bei diesen beiden ergab, ließ mir eine Untersuchung der übrigen nicht notwendig erscheinen, die ich wegen ihrer großen Gebrechlichkeit nicht zu vielen Gefahren aussetzen wollte, damit sie nicht vor der Dickenbestimmung zerbrächen. Schwefel wäre zudem vom Quecksilber angegriffen worden. Die sechs letzten Kolumnen der folgenden Tabelle geben die Resultate der sechs mit Hartgummi und Paraffin angestellten Versuchsreihen.

Bei der ersten, zweiten und fünften Versuchsreihe wurde nur eine Isolatorplatte der Untersuchung unterzogen; bei den übrigen aber wurden mehrere Isolatorplatten nacheinander untersucht, und vor und nach ihrer Untersuchung für alle gemeinsam die Kapazität des Kohlrauschschen Kondensators für mehrere Plattendistanzen geprüft. Die drei ersten Zahlen der sechs letzten Kolumnen der folgenden Tabelle geben die reziproken Werte von κ für den Kohlrauschschen Kondensator, während sich zwischen den Platten desselben Luft befand. (In der ersten Kolumne sind die dazu gehörigen Distanzen der Kondensatorplatten angegeben.) Die vierte Zahl der sechs Kolumnen gibt die daraus berechneten Werte von G . Dann folgen die für den Quecksilberkondensator gefundenen Werte von λ und die daraus berechneten Werte der Dielektrizitätskonstante D . Unmittelbar über den betreffenden Werten von λ und D ist immer die Isolatorplatte angegeben, auf die sie sich beziehen, und zwar sind die drei Hartgummiplatten I, II und III durch die Symbole HI, HII und HIII, die beiden Paraffinplatten aber mit PI und PII bezeichnet. Wenn bei einer Versuchsreihe eine Isolatorplatte mehrere Male auf das Quecksilber aufgesetzt wurde, ist in der Tabelle der nach jedem Aufsetzen gefundene Wert von λ besonders angegeben. Bei der Berechnung von D wurde aus allen diesen Werten das Mittel genommen.

x	0,980	0,540	0,483	0,540	0,545	0,499
$x + 0,7$	2,729	2,254	2,136	2,264	3,304	2,157
$x + 1,4$	4,497	—	3,786	—	4,055	—
G	2,508	2,449	2,360	2,463	2,508	2,369
	H II	H III	H J	H I	P I	P I
λ	1,312	2,704	0,8535	0,8714	1,835	
	1,305	2,740	0,8293	0,8551	1,850	1,735
	1,318				1,844	
D	3,03	3,26	3,04	3,09	2,30	2,31
			H II	H II		P II
λ	—	—	1,196	1,243	—	2,359
D	—	—	3,13	3,14	—	2,33
			H III	H III		
λ	—	—	2,666	2,761	—	—
D	—	—	3,21	3,24	—	—

§ 10.

Versuche bei momentaner Ladung des Kondensators.

Bei den früheren Versuchen wurde der Kondensator während längerer Zeit mit der Batterie geladen, dann von derselben getrennt und dauernd mit dem Elektrometer verbunden. Der dadurch hervorgerufene Ausschlag hing nicht merklich von der Ladungsdauer ab und blieb auch (abgesehen von einer sehr kleinen Zunahme, von deren wahrscheinlichem Grunde früher die Rede war, und die ganz in derselben Weise eintrat, wenn Luft sich zwischen den Kondensatorplatten befand) konstant, wenn man den Kondensator beliebig lang mit dem Elektrometer in Verbindung ließ. Es ist dies ein Beweis, daß die dielektrische Polarisation durch längere Zeit hindurch unverändert bleibt. Um auch noch zu prüfen, ob nicht diese dielektrische Polarisation etwa eine meßbare Zeit braucht, um sich herzustellen, stellte ich auch Versuche an, bei denen der Kondensator mittels der am Schlusse des § 4 beschriebenen Vorrichtung nur sehr kurze Zeit geladen blieb. Ich stellte

nach dieser Methode keine vollständigen Versuchsreihen an, aus denen sich die Dielektrizitätskonstante direkt hätte berechnen lassen, sondern ich hielt es für zweckmäßiger, die Kapazität des Kondensators, während sich die isolierende Schicht dazwischen befand, ohne das mindeste daran zu verändern, bald bei dauernder, bald bei momentaner Ladung zu messen. Ergab sich seine Kapazität in beiden Fällen gleich, so konnte dies als Beweis angesehen werden, daß die dielektrische Polarisation in beiden Fällen dieselbe war, daß sie also nur verschwindende Zeit zu ihrer Herstellung braucht. Ich maß zur Kontrolle zuerst die Kapazität des Kondensators nach beiden Methoden einige Male, während sich Luft zwischen den Platten desselben befand. Dann erst brachte ich die isolierende Schicht zwischen die Kondensatorplatten und maß nun abermals die Kapazität nach beiden Methoden. Da hier die Methode der Beobachtung und Berechnung eine etwas andere als bei den früheren Versuchen ist, so will ich mich etwas weiter in die Beschreibung der Details einlassen. Die Versuche wurden sämtlich mit 18 Daniellschen Elementen gemacht. Der nach der zweiten Tabelle in § 1 korrigierte Ausschlag b , den alle 18 Elemente bei dauernder Verbindung mit dem Elektrometer hervorbrachten, war im Mittel 970,4 Skalenteile; der ebenso korrigierte Ausschlag β , den dieselben Elemente bei momentaner Verbindung hervorbrachten, aber war 836,5 Skalenteile. (Es wurde da wieder immer der von je sechs Elementen bewirkte Ausschlag einzeln bestimmt, und alle drei so erhaltenen Ausschläge addiert.) Es war also

$$\frac{\beta}{b} = 0,862.$$

Die Kapazität des Kondensators wurde zuerst, während sich bloß Luft zwischen den Kondensatorplatten befand, bei drei verschiedenen Distanzen derselben und dann noch dreimal gemessen, wobei sich das erstemal die Hartgummiplatte II, das zweitemal die Schwefelplatte I, das drittemal die Kolophoniumplatte I zwischen den Kondensatorplatten befand. Die beiden Paraffinplatten hatte ich leider, als ich diese Versuche machte, bereits zerschnitten, was ich nachträglich bedauerte, da sich bei Versuchen mit größeren Elektrizitätsmengen, welche ich in einer späteren Abhandlung beschreiben

werde, gerade bei Paraffin eine bedeutende Zunahme der dielektrischen Polarisation mit der Zeit der Einwirkung zeigte. Die in der folgenden Tabelle in einer Horizontalreihe stehenden Zahlen beziehen sich auf eine und dieselbe Distanz der Kondensatorplatten und Zwischenschicht, und zwar steht unter der Rubrik c der korrigierte Ausschlag, den das Elektrometer zeigte, nachdem der Kondensator zuerst dauernd mit der Batterie geladen, dann davon getrennt und dauernd mit dem Elektrometer verbunden wurde; in der Rubrik γ steht der bei momentaner Ladung und Entladung erfolgte korrigierte Ausschlag. In der Rubrik k steht die aus den Ausschlägen der Kolonne b in der bisher immer angewandten Weise berechnete Kapazität des Kondensators. Die in der Rubrik k' angeführten Kapazitäten aber sind nach Formel (5) aus den Batterieausschlägen b und β und dem Kondensatorausschlage γ berechnet; E ist dabei wieder gleich 1 gesetzt. In der ersten Rubrik ist die Substanz angegeben, die sich zwischen den Kondensatorplatten befand.

	c	γ	k	k'
Luft	335,0	317,0	0,5307	0,5260
Luft	274,8	262,2	0,3972	0,3942
Luft	198,3	191,8	0,2578	0,2565
Hartgummi	336,1	317,6	0,5330	0,5276
Schwefel	302,7	288,4	0,4548	0,4524
Kolophonium	246,0	236,9	0,3409	0,3402

In der Rubrik k steht die bei dauernder Ladung bestimmte Kapazität; die in der Rubrik k' jedesmal daneben stehende Kapazität hingegen wurde bei momentaner Ladung bestimmt, ohne daß sonst am Kondensator irgend etwas verändert wurde. Dieselbe weicht nie um mehr als 1 Proz. von der bei dauernder Ladung bestimmten ab. Auffallend ist dabei allerdings, daß die bei dauernder Ladung bestimmten Kapazitäten durchgehend ein wenig größer sind, als die bei momentaner Ladung gefundenen. Da dies jedoch auch bei den Versuchen, wo nur Luft zwischen den Kondensatorplatten war, ganz in derselben Weise eintrat, so kann die Ursache dieser kleinen Abweichung

nicht in einer Verschiedenheit der dielektrischen Polarisation bei momentaner und dauernder Ladung liegen. Ich glaube auch nicht, daß die kleinen Differenzen der Zahlen der beiden Kolumnen k und k' dem störenden Einflusse der ladenden und entladenden Zugvorrichtungen zuzuschreiben sind. Die Kapazität des zum Kondensator führenden Drahtes betrug 0,007; wenn die Kupferdrähte, welche gehoben und gesenkt wurden, mit 12 Daniellschen Elementen geladen wurden, so brachten sie bei ihrer Bewegung, bevor sie noch den zum Elektrometer führenden Draht berührten, durch Verteilung einen kleinen Ausschlag desselben hervor. Derselbe betrug für den einen Draht etwa $\frac{1}{4}$, für den anderen etwa $\frac{1}{2}$ Teilstriche in den extremsten Stellungen des Drahtes. Alle diese Größen sind außerordentlich klein und könnten, selbst wenn sie größer gewesen wären, keine Störung herbeigeführt haben, da sich die Kapazität des Zuleitungsdrahtes zu der des Elektrometers einfach addiert, das bewegliche Ende desselben aber in seinen beiden extremsten Lagen fast ganz dieselbe relative Position gegen den Kupferdraht hatte, den es dabei jedesmal berührte, so daß er also in beiden Stellungen fast dieselbe Kapazität haben mußte. Zur Kapazität des Elektrometers addiert sich auch die, welche seinem Zuleitungsdrahte zukommt, wenn der bewegliche auf ihm aufliegt.

Der Grund davon, daß die Kapazität bei dauernder Ladung immer etwas größer als bei momentaner erschien, liegt vielmehr offenbar darin, daß zur Elektrisierung der in der Nähe des Kondensators befindlichen Halbleiter, namentlich der Holzbestandteile, welche die Kondensatorplatten trugen, eine gewisse Zeit erforderlich ist. Dieselben elektrisierten sich daher bei momentaner Ladung nicht, oder doch nur wenig; bei dauernder Ladung aber elektrisierten sie sich vollständig mit der ungleichnamigen Elektrizität und banden einen Teil der Elektrizität des Kondensators, weshalb dessen Kapazität im zweiten Falle notwendig größer als im ersten erscheinen mußte.

§ 11.

Einige theoretische Bemerkungen.

Ich will hieran einige theoretische Bemerkungen knüpfen, welche mit den eben angeführten Beobachtungen im Zusammen-

hange stehen. Um die Übersicht über die Abhängigkeit der Kondensatorkapazität von der Plattendistanz und den dazwischen befindlichen Substanzen zu erleichtern, wollen wir das Problem der Elektrizitätsverteilung auf dem von mir gebrauchten Kondensator mit einem anderen Problem vergleichen, das in innigem Zusammenhange damit steht. Das letztere hat zum Gegenstande die Verteilung der Elektrizität auf einem Kondensator, dessen Form sich zwar experimentell nicht genau herstellen läßt, aber die Rechnung sehr einfach macht. Nehmen wir an, wir hätten vier konzentrische Kugelschalen I, II, III und IV mit den Radien a_1, a_2, a_3, a_4 (wobei $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ sei). Die Kugelschale I sei leitend und werde von einer Elektrizitätsquelle (Batterie) vom Potential p geladen. Die Kugelschale IV sei ebenfalls leitend, aber mit der Erde verbunden. Der Raum zwischen beiden isoliere, und zwar sei er mit Luft gefüllt bis auf den Raum zwischen den Kugelschalen II und III, der eine Substanz mit der Dielektrizitätskonstante D bezüglich Luft enthalten soll, die aber vor Ladung des Kondensators durchaus unelektrisch gewesen sein soll. Da das Potential V überall der Gleichung

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

genügen muß, und alles um das gemeinsame Zentrum O aller Kugeln symmetrisch ist, so muß

$$V = b + \frac{c}{r}$$

sein, wo b und c Konstanten, r die Entfernung des Aufpunktes vom Punkte O ist. a und b werden aber zwischen den verschiedenen Kugelschalen verschiedene Werte haben können. Sei zwischen den Kugelschalen

$$\text{I und II} \quad V = b_1 + \frac{c_1}{r},$$

$$\text{II und III} \quad V = b_2 + \frac{c_2}{r},$$

$$\text{III und IV} \quad V = b_3 + \frac{c_3}{r}.$$

Weil die Kugelschale I mit dem Potential p geladen ist, so muß auf ihr $V = p$ sein; man hat daher

$$p = b_1 + \frac{c_1}{a_1}.$$

Weil die Kugelschale IV leitend mit der Erde verbunden ist, so ist auf derselben $V = 0$, es ist also

$$0 = b_3 + \frac{c_3}{a_4};$$

und da endlich an den Kugelschalen II und III der Wert des Potentials selbst keinen Sprung machen darf, so ist

$$b_1 + \frac{c_1}{a_2} = b_2 + \frac{c_2}{a_2},$$

$$b_2 + \frac{c_2}{a_3} = b_3 + \frac{c_3}{a_3}.$$

Ferner ist der Differentialquotient von V nach der zu irgend einer Kugelfläche errichteten Normale

$$\frac{dV}{dN} = -\frac{c}{r^2}.$$

Dieser Differentialquotient springt beim Übergange von einem isolierenden Medium zu einem anderen zu einem Werte über, der zu seinem ursprünglichen Werte im umgekehrten Verhältnisse der Dielektrizitätskonstanten der beiden Medien steht. Daher ist, weil die Dielektrizitätskonstante zwischen den beiden Kugelschalen II und III D mal so groß ist als im übrigen Raume,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_3}{c_3} = D.$$

Aus allen diesen Gleichungen folgt zunächst

$$p = c_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 D} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3 D} - \frac{1}{a_4} \right).$$

Ist die elektrische Dichte auf der Kugelfläche I gleich h , so hat man

$$h = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dN} = \frac{1}{4\pi} \frac{c_1}{a_1^2}.$$

Die gesamte auf der Kugelfläche I befindliche Elektrizitätsmenge ist also

$$e = 4\pi a_1^2 h = c_1.$$

Den Quotienten von p in dieser Elektrizitätsmenge wollen wir mit κ bezeichnen und die Kapazität der ganzen Vorrichtung nennen. So ist also

$$(11) \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{p}{c_1} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 D} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3 D} - \frac{1}{a_4}.$$

Bezeichnen wir mit e_1 die Elektrizitätsmenge, die sich hierbei auf einem Stücke der Kugelfläche I befindet, dessen Flächeninhalt Q ist, und setzen

$$\frac{e_1}{p} = \kappa_1,$$

so ist

$$\kappa_1 = \frac{Q\kappa}{4\pi a_1^2},$$

und daher

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{4\pi a_1^2}{Q} \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 D} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3 D} - \frac{1}{a_4} \right].$$

Abgesehen von der störenden Wirkung des Randes wird κ_1 in die Kapazität eines ebenen Kondensators mit einer dielektrischen Zwischenschicht von der Dicke n übergehen, dessen Platten den Flächeninhalt Q und die Distanz m haben, wenn wir a_1 sehr groß annehmen, und

$$a_2 = a_1 + p, \quad a_3 = a_1 + p + n, \quad a_4 = a_1 + m$$

setzen. p, m, n sind klein. Dadurch geht die letzte Formel über in

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{4\pi}{Q} \left(m - n + \frac{n}{D} \right),$$

was mit der Formel (7) des § 6 übereinstimmt.

Setzt man in Formel (11)

$$a_4 = \infty, \quad a_3 = a_2 + q,$$

wobei q klein gegen a_2 angenommen wird, so ergibt sich

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{4\pi a_1^2}{Q} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{q}{a_2^2} + \frac{q}{a_2^2 D} \right).$$

Wenn also eine einzeln stehende Kugel von einer isolierenden konzentrischen Kugelschicht umgeben wird, deren Dicke q gegen ihren Radius a_2 verschwindet, so verändert diese Schicht die Kapazität der Kugel nur um Glieder, die bezüglich ihrer ursprünglichen Kapazität von der Ordnung q/a_2 sind. Konstruieren wir wieder auf der Kugel vom Radius a_1 ein Flächenstück vom Flächeninhalte Q , so wird natürlich auch die auf jenem Flächenstücke befindliche Elektrizitätsmenge durch die dielektrische Schicht nur unmerklich verändert. Daraus erklärt sich, daß die Kapazität der einzeln stehenden Scheibe durch eine angelehnte dünne dielektrische Schicht ebenfalls nur wenig verändert wurde.

Wir haben somit die Formel (7) aus den allgemeinen Grundgleichungen, wie sie von Maxwell und Helmholtz aufgestellt wurde, bewiesen. Es wird aber vielleicht die Anschauung fördern, wenn wir dieselbe Formel auch direkt aus jener Vorstellung von dem Wesen der Dielektrizität ableiten, aus welcher jene Grundgleichungen gewonnen wurden. Diese Vorstellung besteht darin, daß in einem dielektrischen Körper die beiden Elektrizitäten nicht vollständig voneinander getrennt werden, sondern daß nur in jedem Volumelemente desselben die positive etwas mehr nach der einen, die negative etwas nach der anderen Seite verschoben wird, gerade so wie man sich vorstellt, daß in weichem Eisen die magnetischen Fluida getrennt werden.

Die Vorstellung, daß die Moleküle des Dielektrikums schon ursprünglich elektrisch sind, und durch die äußeren Kräfte bloß gedreht werden, läßt sich bekanntlich hierauf zurückführen (vgl. die eingangs zitierte Abhandlung Clausius', wo derselbe die den nachfolgenden Rechnungen zugrunde gelegte Hypothese ausführlich bespricht). Durch diese Elektrisierung oder Drehung der Moleküle erhält jedes Volumelement ein „elektrisches Moment“, gradeso, wie die Volumelemente des weichen Eisens ein magnetisches Moment erhalten. (Bezeichnen wir mit e eine elektrische Masse des Volumelementes, so soll

$$\sqrt{(\sum x e)^2 + (\sum y e)^2 + (\sum z e)^2}$$

das gesamte elektrische Moment desselben sein.) Wir wollen die Volumelemente so konstruieren, daß sie lauter kleine Zylinder sind, deren Mantelflächen den Richtungen parallel sind, nach denen die gesamten von der außer und im Dielektrikum vorhandenen Elektrizität stammenden Kräfte wirken, deren Grundflächen aber auf jenen Richtungen senkrecht stehen. Dann werden in allen jenen Zylindern die beiden Elektrizitäten nach den beiden Endflächen zu getrieben, und es läßt sich beweisen, daß die Wirkung jedes Volumelementes nach außen nur um unendlich kleine Glieder höherer Ordnung (die auch bei der Integration über alle Volumelemente verschwinden) verändert wird, wenn man sich die erregten Elektrizitäten an beiden Endflächen der Zylinder gleichförmig angesammelt denkt. Nur muß das elektrische Moment jedes Elementes un-

verändert bleiben. Die zwei entgegengesetzten Elektrizitäten treten natürlich an den beiden Endflächen jedes Elementes in gleicher Menge auf. Das elektrische Moment desselben ist das Produkt aus der an einer Endfläche angesammelten Elektrizität in die Länge des betreffenden zylindrischen Elementes. Bezeichnen wir das elektrische Moment mit α , so wollen wir voraussetzen, daß die Größe α der Intensität P der auf das Element wirkenden elektrischen Trennungskraft, sowie dem Volumen v desselben proportional ist. Wir wollen also setzen

$$(12) \quad \alpha = \varepsilon P v,$$

wobei ε eine Konstante sein soll. P soll die Gesamtkraft sein, welche auf die Elektrizitätsmenge 1 wirken würde, wenn sich dieselbe im Volumelemente v befände. Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu den vier konzentrischen Kugeln I, II, III und IV zurück. Den mit der dielektrischen Substanz erfüllten Raum zwischen den Kugeln II und III denken wir uns in unendlich viele konzentrische, unendlich dünne Kugelschalen zerlegt.

Wir werden sehen, daß sich an der Innenfläche jeder dieser Kugelschalen dieselbe Elektrizitätsmenge $-q$ und an der Außenfläche dieselbe, aber entgegengesetzt bezeichnete Elektrizitätsmenge $+q$ ansammelt. (Vgl. Helmholtz, Borch. Journ. 72. S. 116.) Infolgedessen neutralisiert sich die an der Außenfläche irgend einer der Kugelschalen angesammelte Elektrizitätsmenge $+q$ mit der an der Innenfläche der nächstfolgenden angesammelten $-q$, und es bleibt nur die an der Fläche II angesammelte Elektrizitätsmenge $-q$, sowie die an der Fläche III angesammelte $+q$ übrig. Diese beiden Elektrizitäten $-q$ und $+q$ ersetzen also die gesamte Wirkung der dielektrischen Schicht vollkommen. Auf der Kugelfläche I soll sich durch ihre Ladung mit dem Potentiale p die Elektrizitätsmenge e ansammeln, auf der Fläche IV durch Influenz die Elektrizitätsmenge $-e'$. Da die Punkte der Kugelfläche IV bezüglich aller Kugelflächen als äußere betrachtet werden können, und da das Potential einer Kugel auf einen äußeren Punkt e/r ist (wenn sich die Elektrizitätsmenge e darauf befindet, und r die Entfernung ihres Zentrums vom Aufpunkte ist), so ist das gesamte Potential der vier Elektrizitätsmengen $e, -q, +q,$

— e' auf einen Punkt der Kugelfläche IV gleich $e/a_4 - e'/a_4$; dasselbe muß den Wert Null haben, weil die Kugelfläche IV mit der Erde verbunden ist. Daher muß $e' = e$ sein. Ein Punkt der Kugelfläche I gilt bezüglich aller Kugelflächen als innerer. Das Potential der vier Elektrizitätsmengen $e, -q, +q, -e$ auf einen solchen ist also

$$\frac{e}{a_1} - \frac{q}{a_2} + \frac{q}{a_3} - \frac{e}{a_4}.$$

Da dasselbe gleich p sein muß, so hat man

$$(13) \quad p = \frac{e}{a_1} - \frac{q}{a_2} + \frac{q}{a_3} - \frac{e}{a_4}.$$

Wir müssen noch q bestimmen, und uns überzeugen, daß unsere Annahme über die Art der Elektrisierung des Dielektrikums richtig war.

Zu diesem Zwecke konstruieren wir in demselben eine unendlich dünne Kugelschale, deren innerer Radius r , deren äußerer $r + dr$ sei, und auf der Innenfläche derselben ein unendlich kleines Flächenelement vom Flächeninhalte $d\omega$. Sämtliche durch dessen Peripherie gehende Kugelradien schneiden aus der unendlich dünnen Kugelschale einen unendlich kleinen Zylinder vom Volumen $v = d\omega \cdot dr$ heraus. Da sich durch die Influenz unserer Annahme gemäß an der Innenfläche der unendlich dünnen Kugelschale die Elektrizitätsmenge $-q$, an der Außenfläche die Elektrizitätsmenge $+q$ angesammelt hat, so befindet sich an der inneren Endfläche des Zylinders vom Volumen v die Elektrizitätsmenge $-q d\omega/4\pi r^2$, an seiner äußeren Endfläche aber die Elektrizitätsmenge $+q d\omega/4\pi r^2$. Sein elektrisches Moment ist also $\alpha = q d\omega dr/4\pi r^2$. Berechnen wir andererseits die Gesamtkraft P , welche alle vorhandene Elektrizität (die vier Elektrizitätsmengen $e, -q, +q, e'$) auf eine in dem unendlich kleinen Zylinder vom Volumen v vorhandene elektrische Masse $+1$ ausüben würden, so finden wir dafür den Wert $P = (e - q)/r^2$.

Es ist also nach Gleichung (12)

$$\frac{q dr d\omega}{4\pi r^2} = \varepsilon \frac{e - q}{r^2} v = \varepsilon \frac{e - q}{r^2} dr d\omega,$$

woraus sich ergibt

$$q = \frac{4\pi \varepsilon}{1 + 4\pi \varepsilon} e = \left(1 - \frac{1}{D}\right) e,$$

wenn wir wie früher $D = 1 + 4\pi\epsilon$ setzen. Erteilt man dem q diesen Wert, so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die von uns vorausgesetzte Art der Elektrisierung der Volumelemente des Dielektrikums war also die richtige. Substituiert man diesen Wert für q in die Formel (13), und berücksichtigt, daß die Kapazität κ wieder gleich e/p ist, so gelangt man wieder zur Formel (7). Man kann sich auch leicht überzeugen, daß dV/dN beim Übergang ins Dielektrikum in der Tat plötzlich zu einem $D = 1 + 4\pi\epsilon$ mal so kleinen Werte überspringt.

Ich will noch auf folgendes aufmerksam machen.

Statt der gänzlich unbekanntem Art der Elektrisierung eines Volumelementes der dielektrischen Substanz haben wir eine solche substituiert, bei der die beiden Elektrizitäten an den Endflächen desselben gleichförmig angehäuft sind. Diese Substitution ist nur erlaubt, wenn es sich um die Wirkung auf einen endlich entfernten Punkt handelt. Die Kraft, welche auf eine im Innern des Dielektrikums befindliche elektrische Masse wirkt, wird daher im allgemeinen auch von der Art der Elektrisierung jener Volumelemente abhängen, welche sich in der unmittelbaren Umgebung jener elektrischen Masse befinden. In der Gleichung (12) bedeutet P die elektrische Kraft, welche auf eine elektrische Masse 1 wirkt, die sich an irgend einem Punkte A im Innern des Volumelementes v befindet. Diese Kraft ist daher für verschiedene Elektrisierungsarten der Moleküle im allgemeinen abhängig von der Lage des Punktes A im Volumelemente v . Um uns hiervon unabhängig zu machen, wollen wir das Volumelement v zwar sehr klein, aber doch groß gegen die einzelnen elektrisierten Moleküle voraussetzen, und jetzt die durch die Gleichung (12) dargestellte Hypothese so aussprechen:

Das dielektrische Moment α des Volumelementes v ist proportional: 1. dem Volumen desselben, und 2. der Kraft P , welche im Mittel auf sehr viele elektrische Massen 1 wirken würde, welche gleichförmig im ganzen Volumelemente verteilt wären. (P kann auch definiert werden als die Kraft, welche auf die Elektrizitätseinheit wirken würde, wenn dieselbe gleichförmig im Volumelemente verteilt wäre.) Von der so definierten Kraft P läßt sich beweisen, daß sie nicht mehr von der Art der Elektrisierung der Moleküle, sondern bloß vom elektrischen

Momente der Volumelemente abhängt. Dieser Beweis kann geführt werden, indem man den Zuwachs sucht, den das Potential aller im Dielektrikum vorhandenen elektrischen Massen auf eine elektrische Masse 1 erfährt, wenn dieselbe einen unendlich kleinen, aber gegen die Distanz zweier Moleküle großen Weg zurücklegt. Gemäß der letzten Voraussetzung kann dieser Weg immer so gewählt werden, daß die elektrische Masse am Ende desselben gegen die umgebenden Moleküle ganz dieselbe relative Lage hat, die sie zu Anfang gegen die Moleküle hatte, die sie damals umgaben. Dann ist nur die Position gegen die entfernten Moleküle eine andere geworden, deren Potential bloß von ihrem elektrischen Momente abhängt. Der Zuwachs des Potentials ist also unabhängig von der Art der Elektrisierung, und daher auch die Kraft, welche im Mittel auf alle elektrischen Massen 1 wirkt. Es ist klar, daß diese Auseinandersetzungen nicht bloß auf unser spezielles Problem, sondern auch auf das ganz allgemeine der Magnetisierung weichen Eisens oder Elektrisierung dielektrischer Substanzen anwendbar sind. Sie können also auch zur Deduktion der Prinzipien dieser Theorien verwendet werden. Natürlich gilt dasselbe, was von den Endflächen unserer zylindrischen Elemente gesagt wurde, auch von den sechs Seitenflächen rechtwinkliger Parallelepipede, wo dann an die Stelle des dielektrischen Moments die Momente bezüglich der Koordinatenachsen treten.

Ich will hier noch zeigen, welche Formel man für die Kapazität des von mir verwendeten Kohlrauschschen Kondensators erhält, wenn man auf die Veränderlichkeit der Dicke der isolierenden Zwischenschicht Rücksicht nimmt. Zerlegen wir die ganze Fläche Q der Kondensatorplatte, welche mit dem Potentiale p geladen wird, während die andere leitend mit der Erde verbunden ist, in unendlich viele Flächenelemente $d\omega$. Die Dicke der dielektrischen Schicht sei an der Stelle, die an dem Elemente $d\omega$ anliegt, gleich n , die Distanz der Kondensatorplatten an derselben Stelle sei m . Dann ist die Dichte der Elektrizität, die sich auf dem Elemente $d\omega$ ansammelt, nach den schon im § 6 entwickelten Prinzipien

$$h = \frac{p}{4\pi \left(m - n + \frac{n}{D} \right)}.$$

Die ganze auf dem Elemente $d\omega$ aufgehäufte Elektrizitätsmenge ist also

$$\frac{p d\omega}{4\pi \left(m - n + \frac{n}{D}\right)}$$

Integrieren wir diesen Ausdruck über die ganze Oberfläche Q der Kondensatorplatte, und dividieren durch p , so erhalten wir für die Kapazität des Kondensators den Wert

$$\kappa = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\omega}{m - n + \frac{n}{D}}$$

Hier können wir m als konstant betrachten, da die Distanz der Kondensatorplatten in der Tat mit großer Genauigkeit an allen Stellen konstant erhalten werden kann; n aber ist Funktion von ω . Die Integration kann ohne Kenntnis der Größe D , welche gesucht wird, nicht ausgeführt werden. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als für D einen angenäherten Wert D_0 einzuführen, und dann

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_0} + \delta$$

zu setzen und das Integral nach Potenzen von δ zu entwickeln. Ist die Dicke wie bei meinen Versuchen nur an einer begrenzten Zahl von nahe gleichförmig auf der Platte verteilten Stelle gemessen, so verwandelt sich das Integral (14) in eine Summe, und man erhält, wenn man die Anzahl der Stellen, für welche die Dicke bestimmt wurde, mit a bezeichnet und bloß die Glieder beibehält, welche bezüglich δ von der ersten Ordnung sind:

$$\kappa = \frac{Q}{4\pi a} \sum \frac{1}{m - n + \frac{n}{D_0}} - \frac{Q\delta}{4\pi a} \sum \frac{n}{\left(m - n + \frac{n}{D_0}\right)^2}$$

Sei κ_1 die Kapazität des Kondensators, wenn sich seine Platten in der Distanz m_1 befinden und nur Luft zwischen denselben vorhanden ist, so ist $\kappa_1 = (Q/4\pi m_1)$, daher

$$(15) \quad \left\{ \frac{a\kappa}{m_1\kappa_1} = \sum \frac{1}{m - n + \frac{n}{D_0}} - \delta \sum \frac{n}{\left(m - n + \frac{n}{D_0}\right)^2} \right.$$

Aus dieser Formel könnte δ ohne Schwierigkeit berechnet und so ein verbesserter Wert von D gefunden werden, den

man dann, wenn man eine noch größere Genauigkeit wünschte, wieder wie den Wert D_0 behandeln könnte. Ich habe jedoch bei Berechnung der Dielektrizitätskonstante niemals von dieser komplizierten Formel Gebrauch gemacht, sondern immer die Formel (7) verwendet, in der ich für n die mittlere Dicke einsetzte, da die Korrektion, welche der Wert von D durch Anwendung der Formel (15) erfahren würde, jedenfalls innerhalb der Grenzen der anderweitigen Beobachtungsfehler liegt. Wenn sich nämlich selbst die größte und kleinste Dicke der isolierenden Schicht wie 10:9 verhielten, und wenn alle möglichen dazwischen liegenden Dicken gleich wahrscheinlich wären (an gleichviel Stellen der Platte vorkämen), so würde sich aus der Formel (7), welche ich zur Berechnung verwendete, die Dielektrizitätskonstante gleich 3,037 ergeben, wenn dieselbe in Wahrheit gleich 3 wäre, eine Differenz, die kaum die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreitet.

§ 12.

Übersichtliche Zusammenstellung der Resultate.

Ich stelle zum Schlusse sämtliche von mir für die Dielektrizitätskonstante der verschiedenen Substanzen gefundenen Werte übersichtlich zusammen, wobei ich zugleich, soweit sie mir bekannt sind, die Werte beifüge, welche vor mir von anderen Beobachtern gefunden wurden. Aus den verschiedenen von mir angestellten Beobachtungen ergaben sich für die Dielektrizitätskonstante D die in den folgenden Tabellen zusammengestellten Zahlen:

Für Hartgummi.

a) Mit dem Kohlrauschschen Kondensator:

Platte I			Platte II		Platte III	
3,14	3,19	3,20	3,09	3,10	3,19	3,21
3,17	3,17	3,16	3,12	3,13	3,34	3,35
3,12	3,14	3,15	3,16	3,13		
Mittel 3,17			Mittel 3,11		Mittel d. ob. 3,20.	

b) Mit dem Quecksilberkondensator:

Platte I	Platte II	Platte III
3,04	3,03	3,26
3,09	3,13	3,21
	3,14	3,24

Als wahrscheinlichsten Wert der Dielektrizitätskonstante des Hartgummi glaube ich 3,15 bezeichnen zu sollen.

Für Paraffin.

a) Mit dem Kohlrauschschen Kondensator:

Platte I			Platte II		Platte III
2,28	2,29	2,28	2,34	2,33	2,31
2,25	2,25	2,27	2,35	2,36	
Mittel 2,28			Mittel 2,34.		

b) Mit dem Quecksilberkondensator:

Platte I		Platte II
2,30	2,31	2,33

Da die Platten II und III reineres Paraffin enthielten, scheint mir der wahrscheinlichste Wert für reines Paraffin 2,32 zu sein. Gibson und Barclay fanden für Paraffin $D = 1,976$. Siemens gibt für Stearin $D = 0,78$ an, was aber wohl ein Druckfehler sein dürfte. Faraday fand für Walrat die Dielektrizitätskonstante zwischen 1,6 und 2,2.

Für Schwefel.

Platte I		Platte II	
3,87	3,83	3,84	3,82.

Wahrscheinlichster Wert 3,84. Siemens fand 2,9. Faraday fand für die Dielektrizitätskonstante des Schwefels Zahlen, die zwischen 2,16 und 2,32 liegen.

Für Kolophonium.

Platte I		Platte II	
2,58	2,56	2,52	2,54 2,54.

Wahrscheinlichster Wert 2,55. Faraday erhielt für Schellack Werte, die zwischen 1,9 und 2,1 liegen. Außerdem fand Faraday für die Dielektrizitätskonstante des Glases Werte, welche zwischen 1,44 und 1,92 liegen.

Die Abweichungen der von den anderen Beobachtern erhaltenen Zahlen von den meinigen sind so groß, daß sie sich jedenfalls nicht aus etwaigen zufälligen Verschiedenheiten des der Beobachtung unterzogenen Materials erklären lassen. Auch eine Erklärung aus einer Verschiedenheit der Beobachtungs-

temperatur ist unmöglich, da schon Gibson nachwies, daß sich die Dielektrizitätskonstante des Paraffins nicht merklich mit seiner Temperatur verändert. Auch ich konnte innerhalb des allerdings kleinen Temperaturintervalls, innerhalb dessen meine Beobachtungen vorgenommen wurden (etwa 16 bis 23° Cels.), keinen Unterschied der Dielektrizitätskonstante bei verschiedenen Temperaturen wahrnehmen. Ich glaube daher, diese Nichtübereinstimmung, abgesehen davon, daß einige meiner Vorgänger keine so feinen Meßapparate der Elektrizitätsmenge hatten, wohl hauptsächlich daher rühren dürfte, daß dieselben den Raum zwischen den Kondensatorplatten als ganz von der isolierenden Substanz erfüllt voraussetzten, was nie vollkommen realisiert werden kann. Zudem werden die Kondensatorplatten, wenn man den Raum zwischen denselben allzu dicht auszufüllen sucht, leicht etwas auseinander gedrängt. Beide Umstände, sowie die Nichtberücksichtigung des Einflusses des Randes bewirken, daß der berechnete Wert der Dielektrizitätskonstante zu klein ausfällt. In der Tat sind auch die von mir gefundenen Werte durchaus die größten.

Um schließlich den Vergleich zwischen meinen Beobachtungen und der Theorie Maxwells zu erleichtern, nach welcher der Brechungsexponent i einer Substanz die Quadratwurzel aus ihrer Dielektrizitätskonstante sein soll, stelle ich in der folgenden Tabelle die Brechungsexponenten mit den Quadratwurzeln aus jenen Werten von D zusammen, welche ich als die wahrscheinlichsten bezeichnet habe:

	\sqrt{D}	i
Für Schwefel	1,960.	2,040
„ Kolophonium	1,597	1,543
„ Paraffin	1,523	1,536, 1,516
„ Hartgummi	1,775.	

Die beiden Brechungsquotienten des Paraffin wurden von mir selbst nach Wollastons Methode bestimmt.

Experimentaluntersuchung über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper.¹⁾

(Wien. Ber. 68. S. 81—155. 1873.)

Faraday entdeckte bekanntlich, daß ein Kondensator, wenn man zwischen die beiden Platten desselben, ohne deren Gestalt und Distanz zu verändern, statt der Luft eine andere isolierende Zwischenschicht dazwischenbringt, bedeutend mehr Elektrizität aufnimmt, wenn in beiden Fällen die eine Platte mit Elektrizität von derselben Spannung (demselben Potentiale) geladen wird, während die andere zur Erde abgeleitet ist. Den Quotienten der Elektrizitätsmenge, welche die nicht abgeleitete Platte aufnahm, als Luft dazwischen war, in die, welche sie jetzt aufnimmt, nennt man die spezifische induktive Kapazität oder kürzer „die Dielektrizitätskonstante“ des Isolators.²⁾ Dieses von Faraday entdeckte Phänomen erklärt man sich zumeist dadurch, daß man annimmt, in einem vollkommenen Isolator können die elektrischen Fluida keine endlichen Wege zurücklegen, wohl aber wird durch die elektrischen Kräfte innerhalb jedes kleinsten Teiles (Moleküls) desselben die positive Elektrizität nach der einen, die negative nach der anderen Seite getrieben, gerade so, wie man sich vorstellt, daß in den Molekülen des weichen Eisens durch magnetische Kräfte die magnetischen Fluida getrennt werden. Man nennt den Zustand, in den der Isolator hierdurch versetzt wird, die „dielektrische

¹⁾ Eine vorläufige Anzeige zu dieser Arbeit Wien. Anz. 10. S. 56. 3. April und S. 129. 24. Juli 1873.

²⁾ Vorausgesetzt ist hierbei, daß der Raum zwischen den Kondensatorplatten ganz mit jener isolierenden Substanz erfüllt wurde und daß die Distanz der Kondensatorplatten so klein ist, daß die an den Zuleitungsdrähten, am Rande der Kondensatorplatten usw. angehäuften Elektrizität gegen die an den vis-à-vis stehenden Flächen befindliche verschwindet.

Polarisation“ desselben. Die durch die dielektrische Polarisation erzeugten Phänomene unterscheiden sich total von den durch Spuren von Leitung hervorgerufenen. Denn erstens kann die dielektrische Polarisation nie einen elektrischen Strom durch oder über den Körper hervorrufen, sondern sobald die Moleküle vollständig dielektrisch polarisiert sind, hört jede Elektrizitätsbewegung auf. Zweitens tritt die dielektrische Polarisation (wenigstens beim Schwefel) unmeßbare Zeit nach dem Beginne der Wirksamkeit der elektrischen Kräfte auf und ändert dann ihre Intensität, wenn die Kräfte konstant bleiben, nicht weiter, während die durch unvollkommene Leitung bewirkten Phänomene erst einige Zeit nach dem Beginne der Wirksamkeit der Kräfte auftreten und mit wachsender Zeit an Intensität zunehmen.¹⁾ Wenn nun diese Hypothese richtig ist, daß in den Molekülen der Isolatoren durch elektrische Kräfte die positive Elektrizität nach der einen, die negative nach der anderen Seite verschoben wird (welche übrigens genau dieselben Resultate liefert, wie die Hypothese, daß die Moleküle der Isolatoren schon ursprünglich polarelektrisch sind und durch die elektrischen Kräfte nur gerichtet werden), so muß ein ursprünglich unelektrischer isolierender Körper, den man in die Nähe eines mit Elektrizität geladenen Körpers bringt, von dem letzteren angezogen werden und zwar bloß vermöge dieser dielektrischen Polarisation der Moleküle, ganz ohne daß sich durch Leitung die Elektrizitäten auf dem Isolator fortbewegen, geradeso wie ein Stück weichen Eisens durch einen Magneten angezogen wird. Ich will dieses Phänomen kurz die „dielektrische Fernwirkung“ nennen.²⁾

¹⁾ Bei anderen Isolatoren nimmt auch die dielektrische Polarisation mit der Zeit der Einwirkung zu, was Faraday „elektrische Absorption“ nennt; ich möchte es lieber „dielektrische Nachwirkung“ nennen wegen der Ähnlichkeit mit der elastischen Nachwirkung. Obwohl bei unvollkommener Leitung das Gesetz der Veränderlichkeit der Elektrisierung mit der Zeit ein ganz anderes ist, so ist dann doch die dielektrische Polarisation schwerer von unvollkommener Leitung zu unterscheiden, nur durch die erste im Texte genannte Eigentümlichkeit ist die dielektrische Polarisation charakterisiert, daß nach einiger, wenn auch längerer Zeit die Moleküle vollständig dielektrisch polarisiert sind und dann jede Elektrizitätsbewegung aufhört, wenn auch der Isolator mit zwei Leitern von verschiedenem elektrischen Potentiale in Verbindung steht.

²⁾ Daß diese dielektrische Fernwirkung stattfinden muß, läßt sich

Die in dieser Abhandlung zu beschreibenden Versuche hatten nun den Zweck, den experimentellen Nachweis zu liefern, daß dieses als dielektrische Fernwirkung bezeichnete Phänomen in der Tat stattfindet, sowie dasselbe quantitativ zu bestimmen. Ich befestigte zu diesem Zwecke Kugeln aus verschiedenen isolierenden Substanzen an den einen Hebelarm einer sehr empfindlichen Drehwaage und maß die Anziehung, welche sie durch eine in die Nähe gebrachte elektrische Metallkugel erfuhren (die ich immer die „wirkende Metallkugel“ nennen werde). Am schlagendsten waren die mit Schwefelkugeln angestellten Versuche.

Ob nämlich die wirkende Metallkugel während des ganzen über eine Minute dauernden Versuches immer positiv oder immer negativ oder abwechselnd $\frac{1}{200}$ Sekunde positiv, das nächste $\frac{1}{200}$ Sekunde negativ, dann wieder $\frac{1}{200}$ Sekunde positiv geladen wurde usw., sobald nur die Mengen der positiven und negativen Elektrizität bei der dauernden und bei der alternierenden Ladung jedesmal dieselben waren, wurde die Schwefelkugel jedesmal genau gleich stark angezogen, was ein deutlicher Beweis war, daß die Anziehung nur von einer momentan sich herstellenden dielektrischen Polarisierung der Moleküle, nicht aber daher rühren konnte, daß sich die Kugeln, weil sie Spuren von Leitungsvermögen besaßen, durch Influenz luden, denn im letzteren Falle hätte die Anziehung bei der alternierenden Ladung vielmal kleiner als bei der dauernden sein müssen. Um die Intensität der Kraft, mit welcher die Schwefelkugel angezogen wurde, in absolutem Maße zu bestimmen, wäre es ein wenig empfehlenswerter Weg gewesen, diese Kraft direkt durch lauter absolute Einheiten zu bestimmen. Weit besser war da folgender Weg. Ich wählte die Schwefelkugel so klein, daß man annehmen konnte, sie befinde sich in einem homogenen elektrischen Felde; und nun hing ich an ihre Stelle eine genau gleich große und gleich schwere mit Stanniol überzogene Schwefelkugel, die ich kurz die „Stanniolkugel“ nennen will. Dieselbe war ursprünglich unelektrisch. Wurde sie in die Nähe der elektrischen Kugel gebracht, welche ich die wirkende nannte, so

übrigens auch ohne jede Hypothese über das Wesen der Dielektrizität aus den Faradayschen Entdeckungen über die spezifische induktive Kapazität mittels des Prinzips der Erhaltung der Kraft nachweisen.

wurde sie durch Influenz elektrisch und daher ebenfalls von der wirkenden Kugel angezogen. Ich bestimmte nun bloß das Verhältnis der Anziehung der Schwefelkugel zu der, welche die Stanniolkugel unter genau denselben Umständen erfuhr. Da die letztere Anziehung ohne Schwierigkeit theoretisch bestimmt werden kann, so war damit auch die Anziehung der Schwefelkugel in einem von den speziellen Dimensionen des Apparates völlig unabhängigen Maße bestimmt. Es zeigte sich, daß die Anziehung der Schwefelkugel zu der einer gleich großen leitenden isolierten, ursprünglich unelektrischen, die sich unter denselben Umständen befand und also bloß durch Influenz elektrisiert wurde, nahezu wie 1 zu 2 verhält. Es läßt sich aus diesem Verhältnisse, wie ich später zeigen werde, ebenfalls die Dielektrizitätskonstante des Schwefels bestimmen (geradeso wie aus der Anziehung einer Eisenkugel deren Magnetisierungskonstante), und zwar steht die hieraus erhaltene in guter Übereinstimmung mit der von mir aus Kondensatorversuchen erhaltenen Dielektrizitätskonstante des Schwefels. Bei allen anderen von mir untersuchten Isolatoren gestalten sich die Verhältnisse wegen der bereits erwähnten dielektrischen Nachwirkung etwas komplizierter. Ich schreite nun zur detaillierten Beschreibung meiner Versuche.

§ 1. Vorversuche.

Der erste von mir zu diesem Zwecke zusammengestellte Apparat ist in Fig. 1 dargestellt. An zwei etwa 2 m langen Kokonfäden hingen zwei Kugeln von etwa 7 mm Durchmesser, die eine aus reinem Schwefel, die andere gleich groß und gleich schwer, aber mit Stanniol überzogen. Die Distanz der Centra beider Kugeln betrug etwa 90 mm. Möglichst genau in der Mitte zwischen beiden befand sich eine fixe Metallkugel (die wirkende Metallkugel) von 26 mm Durchmesser, von der ein isolierter Draht wegführte, der bald mit einer geladenen Leydnerflasche, bald mit der Erde leitend verbunden werden konnte, wodurch die wirkende Kugel geladen und wieder

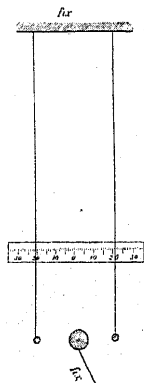


Fig. 1.

entladen wurde. Wurde die wirkende Kugel geladen, so zog sie beide pendelnden Kugeln etwas näher heran, wurde sie wieder entladen, so entfernten sich wieder beide. Um wieviel sich beide Kugeln herabewegt hatten, wurde dadurch gemessen, daß hinter beiden Kokonfäden etwas oberhalb der Kugeln eine Millimeterskala aufgestellt war. Durch zwei Fernrohre, welche auf beide Kokonfäden visierten, sah man dieselben vor der Skala auf und abpendeln; und es wurden immer, sowohl wenn die wirkende Kugel geladen, als auch wenn sie ungeladen war, die Teilstriche abgelesen, bei denen die Kokonfäden rechts und links umkehrten (ich will dieselben im folgenden kurz die Umkehrpunkte nennen). Zehntel von Teilstrichen wurden geschätzt. Hierdurch konnte bestimmt werden, um wieviel die beiden pendelnden Kugeln herangezogen wurden, wenn man die wirkende Kugel lud; und zwar verfuhr ich da folgendermaßen:

Es wurde zuerst, während die wirkende Kugel unelektrisch war, in beiden Fernrohren aufs genaueste bestimmt, mit welchem Teilstriche die Kokonfäden koinzidierten. Dieser Teilstrich soll Ruhelage heißen; er ist in der folgenden Tabelle immer in der ersten Zeile angeführt und ist ihm links das Zeichen *R* beigefügt. Dann wurde der zur wirkenden Kugel führende Draht mit der inneren Belegung einer geladenen, auf einem Isolierschemel stehenden Leydnerflasche verbunden, deren äußere Belegung gleichzeitig mit der Erde verbunden wurde. Dadurch wurde die wirkende Kugel geladen und beide beweglichen Kugeln gerieten in Schwingungen. Es wurden jetzt zwei sich folgende Umkehrpunkte abgelesen, welche in den folgenden Tabellen in der zweiten und dritten Zeile stehen; links ist ihnen das Zeichen der wirkenden Elektrizität beigefügt. Da die Dämpfung der Pendelbewegung klein war, so ist das arithmetische Mittel beider der Teilstrich, welchen der Kokonfaden decken würde, wenn die daran befestigte Kugel unter dem Einflusse der Elektrizität der wirkenden Kugel in Ruhe wäre. Möglichst rasch nach dem Momente, wo die pendelnden Kugeln das zweitemal umkehrten, wurde die wirkende Kugel mit der äußeren Belegung der Flasche verbunden und jetzt die innere zur Erde abgeleitet, so daß also jetzt die wirkende Kugel nahe gleich stark, aber mit der entgegengesetzten Elektrizität geladen war. Jetzt wurden vier sich folgende Umkehr-

punkte abgelesen. Aus dem ersten und zweiten, sowie aus dem dritten und vierten dieser vier Umkehrpunkte wurde wieder der Teilstrich berechnet, um welchen der Faden während der Einwirkung der Elektrizität schwang. Dann wurde die Ladung der wirkenden Kugel in derselben Weise wieder in die entgegengesetzte verwandelt und wieder vier sich folgende Umkehrpunkte notiert usw. Subtrahiert man von dem Teilstriche, um die der Kokonfaden schwang, während die wirkende Kugel elektrisch war, denjenigen, den er vor Beginn der Versuche gedeckt hatte, so erhält man die Anzahl der Teilstriche, um welche der Kokonfaden durch die Einwirkung der Elektrizität verschoben wurde und welche ich die Ablenkung der betreffenden Kugel nennen will. Die aus je zwei Umkehrpunkten berechneten Ablenkungen sind in den folgenden Tabellen immer zwischen den beiden Umkehrpunkten, aus denen sie berechnet wurden, angemerkt. Da die Ladung der Flasche immer abnahm, so mußten natürlich auch die Ablenkungen bei jeder Versuchsreihe immer abnehmen. Da die Ablenkungen sehr klein waren, so mußte die Kraft, mit welcher irgend eine der pendelnden Kugeln angezogen wurde, der Ablenkung derselben proportional sein. Zum Schlusse überzeugte man sich, so gut es ging, daß, wenn die wirkende Kugel wieder zur Erde abgeleitet wurde, die Kokonfäden in die alte Ruhelage einspielten. Versuchsreihen, wo dies nicht der Fall war, wurden verworfen. Es zeigte sich jedoch bald, daß mittels dieses Apparates keine große Genauigkeit zu erzielen war; denn erstens waren die Ablenkungen meist nicht viel größer als ein Teilstrich und ist die genaue Bestimmung einer so kleinen Größe schwierig. Zweitens war es sehr schwierig, die wirkende Kugel absolut in die Mitte zwischen die beiden pendelnden zu bringen, und modifiziert ein kleiner Fehler hierin, wie wir sehen werden, schon das Verhältnis der beiden Anziehungen bedeutend. Drittens störten Luftströmungen die Bewegungen der Kugeln. Viertens isolierten die Kokonfäden nicht hinreichend. Fünftens wichen die hierbei angewandten Kugeln, da ich sie in einer ganz rohen Kugelform gegossen hatte, erheblich von der Kugelgestalt ab. Die folgenden Tabellen geben als Muster vier mit zwei verschiedenen Schwefelkugeln angestellte Beobachtungsreihen. Die wirkende Kugel wurde zu Beginn jeder Beob-

achtungsreihe neu in die Mitte gestellt. Zum Schlusse ist immer das Verhältnis der mittleren Ablenkungen der Schwefelkugel und Stanniolkugel beigefügt, was also zugleich das Verhältnis der Anziehungen darstellt, welche beide Kugeln erfuhren.

Erste Schwefelkugel.

Schwefelkugel		Stanniolkugel		Schwefelkugel		Stanniolkugel	
<i>R</i> 58		<i>R</i> 36		<i>R</i> 58		<i>R</i> 36	
+ 56		+ 32,5		+ 57		+ 33,5	
+ 57,8	1,1	+ 36	1,75	+ 58	0,5	+ 36	1,25
- 57		- 32,2		- 57		- 33,2	
57,4	0,8	- 35,8	2,0	58	0,5	36,1	1,35
56,6		- 32,2		57		34,4	
- 58	0,7	- 36,2	1,8	58	0,5	- 35,6	1,0
+ 56,2		+ 34		+ 57,1		+ 34,1	
57,8	1,0	35	1,5	57,9	0,5	35,9	1,0
56,8		33,9		57,2		34,1	
+ 57,5	0,85	+ 35,2	1,45	+ 58	0,4	+ 35,8	1,05
- 57		- 33		- 57		- 34	
58	0,5	36	1,5	- 58	0,5	36	1,0
57		33		- 57,1		34,8	
- 57,8	0,6	- 36	1,5	- 57,9	0,5	- 35,6	0,8
+ 56,8		+ 34		+ 57,2		+ 34	
57,4	0,9	36	1,0	58	0,4	36,1	0,95
56,8		33,2		57,2		34,6	
+ 57,8	0,7	+ 36,6	1,1	+ 58	0,4	+ 35,8	0,8
Mittl. Ablenk.		Mittl. Ablenk.		Mittl. Ablenk.		Mittl. Ablenk.	
0,794		1,51		0,467		1,02	
<u>Anzieh. der Stanniolk.</u>				<u>Anzieh. der Stanniolk.</u>			
Anzieh. der Schwefelk. = 1,90				Anzieh. der Schwefelk. = 2,19.			

Zweite Schwefelkugel.

Schwefelkugel		Stanniolkugel		Schwefelkugel		Stanniolkugel	
<i>R</i> 46		<i>R</i> 47		<i>R</i> 46		<i>R</i> 47	
+ 44,5		+ 44		+ 44,2		+ 41	
+ 45,9	0,8	+ 46,8	1,6	+ 46,8	1,5	+ 46	2,5
- 44,8		- 44		46,5		- 41,8	
46	0,6	46,8	1,6	46,8	0,35	48	1,1

Schwefelkugel		Stanniolkugel		Schwefelkugel		Stanniolkugel	
<i>R</i> 46		<i>R</i> 47		<i>R</i> 46		<i>R</i> 47	
44,8		44,5		45,9		43	
- 46,2	0,5	- 47,4	1,05	- 47	0,55	- 46,8	1,1
+ 44,2		+ 44		+ 44,9		+ 41	
46	0,9	47	1,5	47	1,05	46	2,6
41,5		43,8		45,2		42	
+ 45,8	0,85	+ 47,6	1,3	+ 46,6	1,1	+ 45,2	2,4
- 45,3		- 44,2		- 45,9		- 43,8	
45,7	0,5	47,5	1,15	47,2	0,45	46,5	0,85
45,3		45,2		45,8		45	
- 45,7	0,5	- 47	0,9	- 47,2	0,5	- 46	0,5
+ 44,8		+ 44,4		+ 45		+ 43	
45,7	0,75	47	1,3	47	1,0	45	2,0
44,8		44,5		44,8		41,5	
+ 46	0,6	+ 47	1,25	+ 47,2	1,0	+ 46,5	2,0
Mittl. Ablenk.		Mittl. Ablenk.		Mittl. Ablenk.		Mittl. Ablenk.	
0,667		1,32		0,833		1,67	
$\frac{\text{Anzieh. der Stanniolk.}}{\text{Anzieh. der Schwefelk.}} = 1,98$				$\frac{\text{Anzieh. der Stanniolk.}}{\text{Anzieh. der Schwefelk.}} = 2,00.$			

Daß die wirkende Kugel abwechselnd positiv und negativ geladen wurde, geschah, damit durch eine etwa auf den pendelnden Kugeln vorhandene Ladung kein Fehler im Resultat herbeigeführt werde. Meist wurden die pendelnden Kugeln bei positiver und negativer Ladung gleich stark angezogen, was also ein Beweis ist, daß sie ursprünglich nicht elektrisch waren. Ein Beispiel des Gegenteils ist die letzte mit der zweiten Schwefelkugel angestellte Beobachtungsreihe, welche angestellt wurde, nachdem soeben lange mit den beiden Kugeln experimentiert worden war. Bei dieser Versuchsreihe wurden beide Kugeln von der positiven Elektrizität viel stärker angezogen als von der negativen; beide waren also negativ geladen. Da ich jedoch abwechselnd bald positive, bald negative Elektrizität wirken ließ, so mußte das Mittel aller Anziehungen, welche jede der pendelnden Kugeln erfuhr, geradeso groß ausfallen, als ob dieselbe unelektrisch gewesen wäre, da sich die Wirkung auf die in der pendelnden Kugel vorhandene Ladung offenbar zu der, welche infolge der Influenz stattfindet, einfach addiert.

Ich machte außer den oben mitgetheilten Beobachtungsreihen noch zahlreiche andere, welche in ganz ähnlicher Weise verliefen. Aus denselben ergaben sich für die durch die Anziehung der Schwefelkugel dividierte Anziehung der Stanniolkugel folgende Werte: 2,19, 2,03, 2,28, 3,20, 2,72, 1,74, 3,40, 1,80, 1,90, 2,07, 1,70, 1,50, 1,72, 1,91. Es zeigt sich zwar schon aus diesen Zahlen, daß die Schwefelkugel etwa $\frac{1}{2}$ mal so stark als eine gleich große und gleich schwere, unter denselben Verhältnissen befindliche mit Stanniol überzogene Kugel angezogen wird; doch stimmen die verschiedenen Versuche so wenig untereinander überein, daß ein sicherer Schluß aus denselben nicht gezogen werden kann. Einige Versuche mit Paraffinkugeln zeigten noch weniger Übereinstimmung. Obwohl nun auch dieser Apparat wohl noch einiger Verbesserungen fähig gewesen wäre, so beschloß ich doch, ihn ganz zu verlassen und konstruierte einen ganz anderen, zu viel genaueren Messungen geeigneten, in welchem die zu untersuchende Kugel an einer Drehwage befestigt war und zu dessen Beschreibung ich jetzt schreiten will. Mit diesem zweiten Apparate stellte ich zwei Reihen von Versuchen an. Bei der ersten in den Herbstferien 1872 angestellten wurde die wirkende Kugel dauernd (immer durch mehrere Sekunden mit der gleichnamigen Elektrizität) geladen. Bei der zweiten, im Winter 1873 ausgeführten dagegen wurde die wirkende Kugel rasch alternierend bald positiv bald negativ geladen. Die erste Anregung zur Idee, alternierende Ladungen anzuwenden, die sich später als so fruchtbar erwies, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Geheimrates Helmholtz, dem ich vorher die im Herbste 1872 angestellten Versuche und deren Resultat in einem Briefe beschrieben hatte.

Definitive Versuche.

§ 2. Beschreibung der ersten Drehwage.

Die Drehwage, welche die zu untersuchende isolierende Kugel trug, ist in Fig. 2 in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Größe abgebildet. Nur sind die Drähte deuthlichkeitshalber dicker gezeichnet. In Natur war der Draht CD etwa $\frac{1}{4}$ mm, der Draht $EFGH$ etwa 1 mm dick. Ein Kokonfaden, an dessen

beiden Enden *A* und *B* sich Schlingen befanden, mittels deren er an einem von einem Träger getragenen Kupferdrahte herabhang, war um einen Kupferdrahthaken *CD* geschlungen, der einen geradlinigen horizontalen Hebel *EF* aus Kupferdraht trug. Damit letzterer nicht gleite, war auf die Berührungspunkte des Hakens mit dem Hebel ein wenig Wachs geträufelt. An dem einen Ende *E* des Hebels war mit Siegelack ein ebener Spiegel *S* ange kittet, der zur Spiegelablesung und gleichzeitig zur Äquilibrierung des Hebels diente. Das andere Ende *F* des Hebels endete in ein Stück *F'GH*, das ebenfalls horizontal aber senkrecht auf *EF* stand. An den beiden Enden *G* und *H* dieses Stückes waren die zwei Enden eines Kokonfadens *GKH* befestigt, in welchen bei *K* die zu untersuchende Kugel *L*, die zu diesem Zwecke mit einem dünnen Schellackhäkchen versehen war, eingehängt wurde. Der ganze Hebel war natürlich so äquilibrirt, daß er, wenn

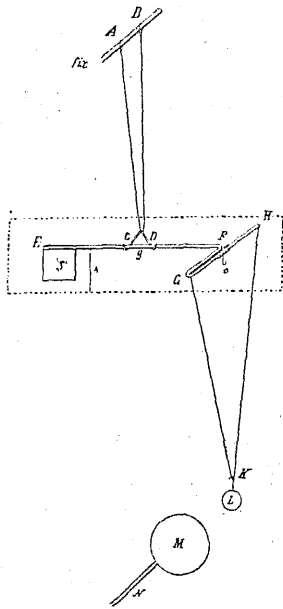


Fig. 2.

die Schwefelkugel eingehängt war, in der gewünschten Lage freischwebte. Nahe der Kugel *L* war die wirkende Kugel *M* fix aufgestellt und zwar so, daß die Centrilinie der beiden Kugeln *L* und *M* horizontal in der Ebene des Kokonfadens *GKH* lag. Der zur wirkenden Kugel führende Zuleitungsdraht *N* hatte ebenfalls diese Richtung. Wiewohl bei meinen in Berlin angestellten Kondensatorversuchen die Kokonfäden sich als vortreffliche Isolatoren erwiesen hatten, so zeigte sich doch, daß hier der Kokonfaden *GKH* nicht genügend isolierte, sei es, daß er von minder guter Beschaffenheit als der Berliner Faden war oder daß er im Sommer Feuchtigkeit anzog. Ich ersetzte ihn daher durch einen gleichgestalteten bei *K*, gebogenen $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ mm dicken Schellackfaden. Dies hatte noch den Vorteil, daß sich die Kugel *L* immer an dieselbe Stelle, nämlich in den Bug

des Schellackfadens, hängen mußte. Damit die der wirkenden Kugel mitgeteilte Elektrizität nur auf die Kugel L , nicht auch auf die übrigen Bestandteile der Drehwage wirke, befanden sich die in der Figur mit dem punktierten Rechtecke umschlossenen Teile der Drehwage in einer mit den nötigen Ausschnitten versehenen Schachtel aus Goldpapier. Bei den im Sommer 1872 angestellten Versuchen war der Spiegel noch in einer zweiten enganschließenden Schachtel eingeschlossen, die sich in der Goldpapierschachtel befand und die ebenfalls vorn eine Glaswand und passende Ausschnitte hatte. Dieselbe sollte mittelst der Luftreibung die Dämpfung der Schwingungen vergrößern und den Spiegel gegen Luftströmungen schützen; doch wurde sie später ganz weggelassen, da eine so große Dämpfung eher schädlich als nützlich war. Um bei K auch leichtere Kugeln (Paraffin-, Kolophoniumkugeln) einhängen zu können, war der Draht GH mit dem Haken O versehen, in den dann ein entsprechendes Gegengewicht kam, das, weil es sich in der Goldpapierschachtel befand, keine Einwirkung erfuhr. Der Gang der Versuche war nun folgender: Es wurde bei K eine unelektrische Schwefelkugel eingehängt und der Stand der Drehwage durch Spiegelablesung bestimmt, während die wirkende Kugel unelektrisch war. Dann wurde der wirkenden Kugel Elektrizität mitgeteilt und wieder durch Spiegelablesung bestimmt, um welchen Winkel dabei der Hebelarm der Drehwage gedreht wurde. Dann wurde an die Stelle der Schwefelkugel die gleich große und gleich schwere Stanniolkugel gehangen und jetzt wieder gemessen, um welchen Winkel die Drehwage sich drehte, wenn der wirkenden Kugel genau dieselbe Elektrizitätsmenge mitgeteilt wurde. Damit das Ersetzen der Kugel L durch eine gleich schwere möglichst leicht geschehen könne, befand sich in der Goldpapierschachtel eine durch die punktierte Linie λ angedeutete Pappdeckelwand, auf die sich der Hebelarm JE allsogleich aufstützte, wenn die Kugel L entfernt wurde. Damit sich durch Vertauschung der Stanniolkugel und Schwefelkugel, selbst wenn beide nicht absolut gleich schwer waren, die Stellung der Drehwage möglichst wenig ändere, war darauf gesehen, daß die Kokonfäden, an denen sie hing, keine merkliche Torsion hatten, sowie daß sowohl der Schwerpunkt des Balkens $ESGFH$ als auch der Haken O in

der Ebene EFK lagen. Übrigens wurde immer mit besonderer Sorgfalt die Metallkugel genau so schwer, wie die isolierende gemacht, mit der sie verglichen wurde. Um die bei den verschiedenen Versuchen der wirkenden Kugel mitgeteilten Elektrizitätsmengen untereinander vergleichen zu können, diente eine zweite ähnliche Drehwage, bei der aber die Kugel L aus Metall war und einer zweiten wirkenden Kugel gegenüber stand, die leitend mit der Kugel M verbunden war. Dank dieser zweiten Drehwage war es nicht notwendig, wenn die Stanniolkugel eingehängt worden war, der Kugel M wieder genau dieselbe Elektrizitätsmenge als wenn die Schwefelkugel eingehängt war, mitzuteilen, sondern es genügte, mittels der zweiten Drehwage die in beiden Fällen mitgeteilten Elektrizitätsmengen zu vergleichen.

§ 3. Beschreibung der zweiten Drehwage.

Die zweite Drehwage ist in Fig. 3 in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Größe dargestellt. Sie bestand aus einem langen Kupferdraht,

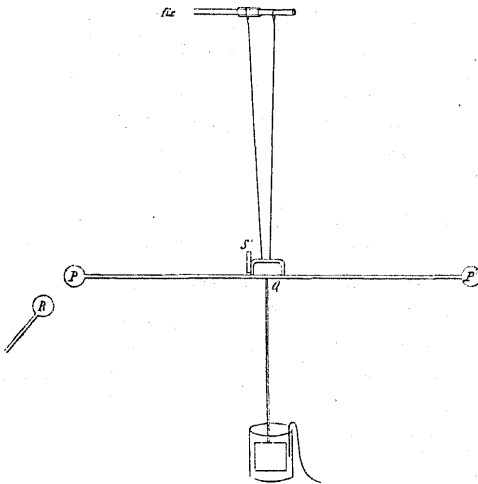


Fig. 3.

welcher an seinen beiden Enden zwei hohle Messingkugeln P und P' trug. Er war an zwei Kokonfäden bifilar aufgehängt und trug einen Spiegel S'' zur Spiegelablesung. Der eine der

beiden Kokonfäden war direkt um einen fixen Kupferdraht, der andere aber um eine Papierrolle geschlungen, die den fixen Kupferdraht umgab. Durch Verschiebung dieser Papierrolle konnte die Distanz der oberen Enden der Kokonfäden und dadurch die Schwingungsdauer der zweiten Drehwage reguliert werden. Sie wurde immer gleich der der ersten Drehwage gemacht. An dem Drehungspunkte Q des Wagbalkens PP' war ein Platindraht angelötet, der vertikal nach abwärts ging und unten ein in verdünnte Schwefelsäure tauchendes Platinblech trug. Die Schwefelsäure war durch einen eintauchenden Platindraht leitend mit der Erde verbunden. Der Kugel P stand wieder eine fest aufgestellte Metallkugel R gegenüber, so daß die Centrilinie PR horizontal und senkrecht auf PP' war. Die Kugel P war also leitend mit der Erde verbunden. Wurde der Kugel R Elektrizität mitgeteilt, so lud sich die Kugel P durch Influenz und wurde von der Kugel R angezogen und zwar ist ihre Anziehung dem Quadrate der der Kugel R mitgeteilten Elektrizitätsmenge proportional. Man hat also so ein Maß der Elektrizitätsmenge, welche der Kugel R , also auch derjenigen, die der Kugel M mitgeteilt wurde, da M leitend mit R verbunden war und daher die Elektrizitätsmenge, die sich auf M ansammelte, derjenigen proportional sein mußte, die sich auf R ansammelte. Es war nicht notwendig, den Wagbalken der zweiten Drehwage in eine leitende Schachtel einzuschließen. Es erfuhr dann zwar auch der Wagbalken eine kleine Einwirkung, allein da die Ausschläge der Drehwage immer sehr klein waren, so mußten sie doch nahe den wirkenden Kräften proportional sein; letztere müssen aber, wie man sich leicht überzeugt, den Quadraten der wirkenden Elektrizitätsmengen proportional sein.

Ich bemerke noch, daß ich bei den späteren Versuchen mit alternierender Ladung die zweite Drehwage durch eine andere ganz gleich eingerichtete ersetzte, bei der jedoch die Kugel P größer, der Hebelarm PQ kürzer war; die Kugel P' fehlte ganz; vielmehr war das Gleichgewicht durch die größere Länge des Hebelarmes QP' hergestellt. Ich tat dies, weil bei der letzteren Drehwage der Ausschlag noch genauer dem Quadrate der wirkenden Elektrizitätsmenge proportional ist, wie aus der später zu gebenden Theorie hervorgehen wird.

Beide Drehwagen waren auf einem Tische in einer Weise aufgestellt, welche durch Fig. 4 veranschaulicht ist. Die beiden wirkenden Kugeln M und R waren durch einen dicken Kupferdraht verbunden, der an zwei Stellen von isolierenden Stützen getragen wurde, und zwar verwendete ich bei den im Winter angestellten Versuchen mit alternierender Ladung Siegellackstützen, bei den anderen aber Stützen aus gut isolierendem

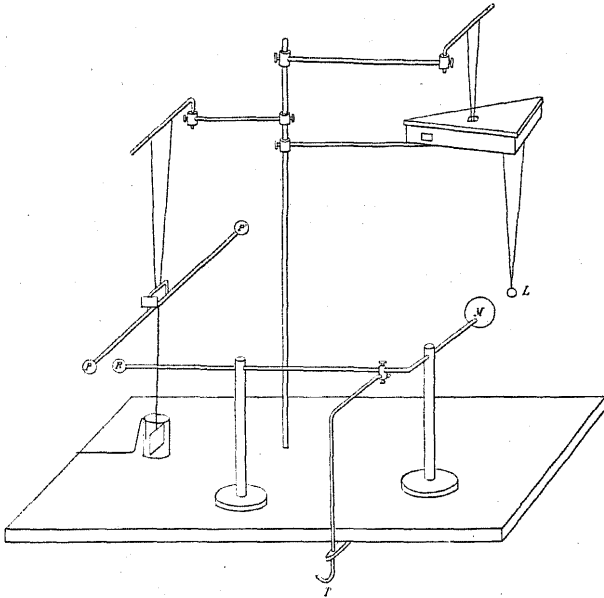
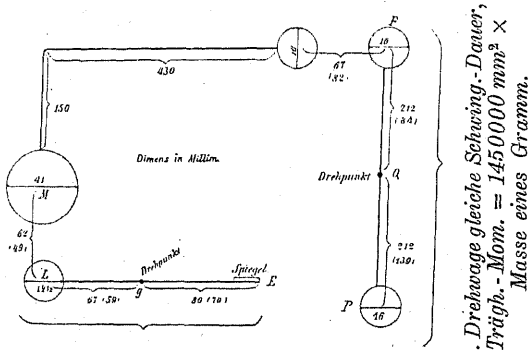


Fig. 4.

gefirnißten Glase, weil sich im Sommer das Siegellack bog. Um Luftströmungen zu vermeiden, befand sich das Ganze in einem großen Glaskasten, der nach vorne wegen der Spiegelablesung eine Wand aus gutem Spiegelglase, nach rechts aber wegen des Einhängens der Kugeln eine Tür hatte. Die Spalten zwischen Kasten und Tisch waren mit Sägespänen bedeckt. Nach vorn stand der Kasten etwas über den Tisch vor und war der Zwischenraum mit Papier, an der Stelle aber, wo der zu den wirkenden Kugeln führende Draht durchging, damit derselbe wohl isoliert sei, mit einigen Stücken Siegellack verklebt. Um die Luft im Kasten trocken zu erhalten, versuchte

ich in denselben eine flache Schüssel mit konzentrierter Schwefelsäure zu stellen, doch zeigte sich bald, daß dieselbe im Kasten permanente, im höchsten Grade störende Luftströmungen hervorrief. Die Längen der verschiedenen Bestandteile sind in Fig. 5 in einem besonderen Schema, in dem der Apparat aus der Vogelperspektive betrachtet erscheint, dargestellt. Die beigegebenen Zahlen drücken die Längen in Millimetern aus. Wo zwei Zahlen beigegeben sind, hatte der betreffende Teil bei den späteren mit alternierender Ladung angestellten Versuchen eine andere Länge als bei den früheren, und bezieht sich die zweite eingeklammerte Zahl auf die Versuche mit alternierender



1. Drehwage, macht eine ganze Schwingung in $22\frac{1}{2}$ Sek., Träg.-Mom. = $44900 \text{ mm}^2 \times$ Masse eines Gramm (das hei d. Versuchen i. Winter unbek.) Distanz d. Fernrohre v. d. Spiegeln 2,2 m (2,35 m).

2. Drehwage gleiche Schw.-Dauer, Träg.-Mom. = $145000 \text{ mm}^2 \times$ Masse eines Gramm.

Fig. 5.

Ladung. Den beiden Drehwagen sind auch die nach der gewöhnlichen Gauss'schen Methode bestimmten Trägheitsmomente beigegeben. In Fig. 5 sind die Apparate bequemlichkeitshalber nicht in einer ihrer wirklichen proportionalen Größe dargestellt. Ein und derselbe Teil ist der leichteren Orientierung wegen in allen Figuren mit demselben Buchstaben bezeichnet. Der Draht GH der ersten Drehwage hatte eine Länge von etwa 100 mm. Die beiden Fernrohre befanden sich von dem Spiegel, auf den sie visierten, in einer Distanz von 2,2 m und visierten beide auf eine über dem einen angebrachte Skala, deren Teilstriche sich in einer Distanz von 1 mm befanden.

§ 4. Vorrichtung zur Ladung der wirkenden Kugeln.

Um die wirkenden Kugeln mit Elektrizität laden zu können, endete der Draht, welcher zu denselben führte, in einen Haken *T*, Fig. 4, welcher sich außerhalb des Glaskastens befand und der natürlich durch Siegellack vom Tische isoliert war. Derselbe stand bei den im Sommer 1872 mit dauernder Ladung angestellten Versuchen mit einer Vorrichtung in Verbindung, die in Fig. 6 schematisch dargestellt ist. In den Haken *T* konnte das eine Ende eines Drahtes eingehängt werden, der in Fig. 6 mit dem Buchstaben *W* bezeichnet ist und dessen anderes Ende zu dem verstellbaren Knopfe *U* eines Funkenmikrometers führte.

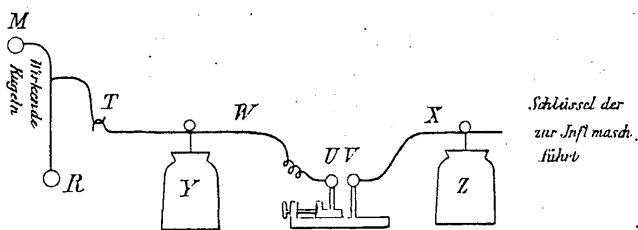


Fig. 6.

Der Draht *W*, welcher in Natur selbstverständlich eine bedeutende Länge (etwa $2\frac{1}{2}$ m) besaß, war an zwei Stellen durch Siegellackstützen getragen, an einer dritten Stelle war er mit der inneren Belegung einer Leydener Flasche *Y* verbunden, deren äußere Belegung zur Erde abgeleitet war. Die andere Kugel *V* des Funkenmikrometers war mit einem zweiten Kupferdrahte *X* verbunden, der wieder mit der inneren Belegung einer zweiten Leydener Flasche *Z* verbunden war, deren äußere Belegung ebenfalls zur Erde abgeleitet war. Das Ende des Drahtes *X* führte zu einem mit der Influenzmaschine verbundenen Schlüssel, vermittelst dessen man in bequemer Weise dem Drahte *X* entweder die positive Elektrizität mitteilen konnte, während der negative Pol der Maschine zur Erde abgeleitet war oder umgekehrt. Ich bediente mich immer einer Influenzmaschine Töplerscher Konstruktion. Dieselbe hat den Vorteil, daß sie sich ohne alle Anregung von selbst ladet, und wenn nur darauf gesehen wurde, daß die Drahtspindel immer gut auf den Kontaktstellen schleiften, und wenn

von Zeit zu Zeit der auf den Glasscheiben sich ansammelnde Staub zuerst mit einem in destilliertes Wasser getauchten, dann mit einem trockenen Tuche abgewischt wurde, so versagte sie selbst bei der angestregten monatelangen Tätigkeit (manchmal durch mehrere Tage hindurch 8—10 Stunden) den Dienst niemals. Dadurch, daß man die Maschine drehte, während der Draht *W* nicht in den Haken *T* eingehängt war, wurde konstatiert, daß die auf den Scheiben der Maschine befindliche Elektrizität nicht auf die zu untersuchenden Kugeln wirkte. Solange man wünschte, daß die wirkenden Kugeln unelektrisch seien, lag sowohl auf dem Drahte *U* als auch auf dem Drahte *W* ein mit der Erde verbundener Draht auf. Man hob zuerst den auf dem Drahte *W* liegenden und dann auch den zweiten auf. Es lud sich also jetzt zuerst die Flasche *Z*. Sobald ein Funke zwischen den Kugeln *U* und *V* übergesprungen war, wurde der Draht *X* sogleich wieder mit der Erde verbunden. Die Flasche *Y* und mit ihr auch die wirkenden Kugeln waren also jetzt geladen. Wollte man sie wieder entladen, so berührte man den Draht *W* wieder mit dem abgeleiteten. Durch Veränderung der Distanz der Kugeln *U* und *V* (der Schlagweite) konnte man die Elektrizitätsmenge variieren, mit der die wirkenden Kugeln geladen wurden. Bei einigen Versuchen wünschte ich die wirkenden Kugeln nur eine kurze, aber genau gegebene Zeit zu laden. Dies erreichte ich in folgender Weise. Der Draht *W* war zwischen der Kugel *U* und der Flasche *Y* unterbrochen. Doch standen sich die beiden, durch die Unterbrechung gebildeten Enden *a* und *b* sehr nahe und jedes derselben trug ein durch Siegellack isoliert an einen

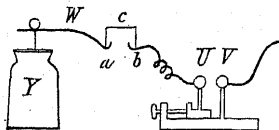


Fig. 7.

höher und tiefer stellbaren Träger festgekittetes Quecksilbernäpfchen, wie es die Fig. 8 zeigt. Ein hakenförmig gebogener Draht *c* war an das Pendel eines Metronoms mit Schellack isoliert festgekittet und zwar so, daß er, wenn das Metronom

ging, in der Sekunde z. B. 10mal für einen Moment die beiden Näpfchen überbrückte, während in der übrigen Zeit die Näpfchen nicht in metallischer Verbindung waren. Man leitete nun sehr bald nachdem zwischen den Kugeln *U* und *V* der Funke

übergesprungen war, denjenigen Teil des Drahtes W , der mit der Kugel U in Verbindung war, zur Erde ab; die Flasche Y konnte sich jedoch, da der Draht W unterbrochen war, erst entladen, nachdem der Haken c wieder in seine frühere Lage zurückgekehrt war, was genau nach $\frac{1}{10}$ Sekunde geschah, so daß also die wirkenden Kugeln in der Tat gerade durch $\frac{1}{10}$ Sekunde geladen waren. Bei den im Winter 1873 mit alternierender Ladung angestellten Versuchen benutzte ich die in Fig. 7 dargestellte Zusammenstellung. An die eine Zinke einer elektromagnetischen Stimmgabel d , welche in der Sekunde 180 ganze Schwingungen machte, war mit Siegelack ein Glasstreifen und an diesen ein kleines rechteckiges Kupferblech e befestigt. An das Kupferblech war zunächst ein spiralgewundener dünner Eisendraht f angelötet, dessen anderes Ende

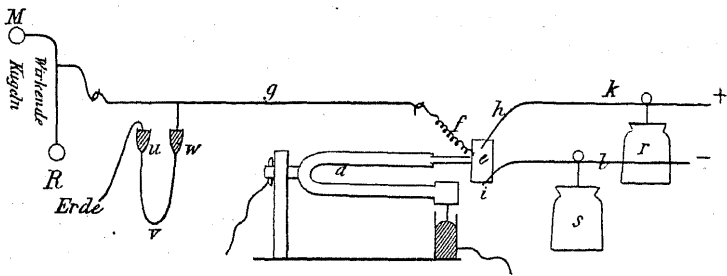


Fig. 8.

an einen Kupferdraht g gelötet wurde, der zu den wirkenden Kugeln führte. Diese an der einen Zinke befestigte Vorrichtung hemmte die Schwingungen der Stimmgabel gar nicht, sobald nur an die andere Zinke ein entsprechendes Gegengewicht befestigt wurde. Etwa $1\frac{1}{2}$ mm oberhalb des Kupferplättchens befand sich ein etwa $\frac{1}{4}$ mm dicker Kupferdraht h , dessen Ende senkrecht zur Ebene des Kupferplättchens stand. Ein gleichbeschaffener Kupferdraht i befand sich unterhalb des Kupferplättchens in derselben Distanz, so daß das Kupferplättchen, wenn die Stimmgabel schwang, abwechselnd an den oberen und unteren Kupferdraht stieß, die wirkenden Kugeln also abwechselnd mit dem oberen oder unteren Kupferdraht leitend verbunden wurden. Die Art und Weise, wie die Kupferdrähte h und i befestigt waren, damit sie durch die Stöße des

Kupferplättchens nicht verbogen würden, ist in Fig. 9 versinnlicht. Die Ebene dieser Figur ist die Ebene der beiden Drähte h und i , so daß die Ebene des Plättchens e senkrecht auf der Zeichnungsebene steht. m und n sind zwei an verstellbaren Trägern befestigte Hartgummiplättchen, auf denen die Drähte h und i auflagen, und zwar waren die beiden Enden p und q dieser Drähte mit Siegellack festgekittet, die beiden anderen Enden dagegen wurden bloß durch die Elastizität der Drähte gegen das Hartgummi leicht angedrückt.

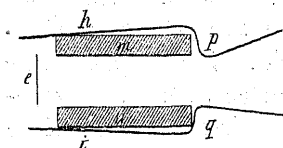


Fig. 9

Kehren wir zur Fig. 8 zurück. Dieselbe zeigt, daß die beiden dünneren Drähte h und i an zwei dickere k und l angelötet waren. Von den letzteren stand jeder mit der inneren Belegung einer Leydener Flasche in Verbindung (die äußere Belegung war wieder zur

Erde abgeleitet) und ihre Enden führten zu den beiden Elektroden der Influenzmaschine, und zwar konnte mit Leichtigkeit entweder der Draht k mit der positiven und l mit der negativen Elektrode oder auch umgekehrt verbunden werden. Sei, wie es die Fig. 8 darstellt, k mit der positiven, l mit der negativen Elektrode verbunden und die Stimmgabel in Gang. Vor Beginn des Versuches war über die beiden Drähte k und l ein dritter Draht gelegt, welcher beide berührte und mit einem Ende in ein zur Erde abgeleitetes Quecksilbernäpfchen tauchte. Man entfernte nun plötzlich diesen dritten Draht. Jetzt lud sich die Flasche r positiv, die Flasche s ebenso stark negativ. Wenn also das Plättchen e an den Draht h stieß, wurden die wirkenden Kugeln positiv, nach einer halben Schwingung der Stimmgabel wurden sie gleich stark negativ, dann wieder positiv usw. geladen. Dadurch wurde die alternierende Ladung der wirkenden Kugeln erzielt. Wenn man den Versuch beenden wollte, so berührte man zuerst den Draht q mit einem zur Erde abgeleiteten; dann erst legte man über die Drähte k und l den zur Erde abgeleiteten Draht, damit nicht durch kurze Zeit nur eine einzige Elektrizität den wirkenden Kugeln zuströme und die Drehwagen in Unordnung bringe. Obwohl die Influenzmaschine gleichviel positive als negative Elektrizität entwickelt, so bildete sich doch mit der Zeit in dem ganzen

Systeme, daher auch auf den wirkenden Kugeln ein kleiner Überschuß der einen oder anderen Elektrizität, vermutlich weil sich die eine rascher als die andere zerstreute. Um diesem Übelstande möglichst zu steuern, zog ich ein kurzes Stück Glasröhre in der Mitte in einen dünnen Faden aus, den ich hufeisenförmig krümmte, so daß er die in Fig. 8 mit uvw bezeichnete Gestalt annahm.

Von den beiden Stücken u und w der Glasröhre wurde das eine mit destilliertem Wasser gefüllt, welches durch den Glasfaden allmählich in das andere Stück drang. Waren beide Stücke u und w voll Wasser, so wurde das eine durch einen Draht mit der Erde, das andere mit dem Drahte g verbunden. Durch das im Glasfaden enthaltene Wasser floß nun die überschüssige Elektrizität zur Erde ab, derselbe bot aber der Elektrizität einen so bedeutenden Widerstand, daß die alternierenden Ladungen nicht Zeit hatten abzufließen; dieselben wurden vielmehr durch den Wasserfaden nur unbedeutend geschwächt. Um die Influenzmaschine in möglichst gleichförmigem Gange erhalten zu können, war um die Achse derselben ein dicker Kupferdraht gewunden, der in einem Haken endete. Dieser Haken stieß bei jeder Umdrehung einmal gegen einen zweiten Kupferdraht, der dann durch sein Zurückschnellen in die alte Lage ein Geräusch verursachte. Die Maschine wurde gerade so schnell gedreht, daß diese Geräusche immer mit den Schlägen eines Metronoms koinzidierten.

§ 5. Verfertigung der Kugeln.

Die Hartgummikugel ließ ich von einem Mechaniker aus einem Stabe drehen. Die übrigen Kugeln wurden in einer Kugelform, wie man sie zum Gießen kleiner Revolverkugeln hat, gegossen. Damit die Kugel nicht in der Form haften bleibt, wurde letztere vor dem Gusse mit ein wenig Öl, beim Gießen der Kolophoniumkugeln mit etwas destilliertem Wasser ausgeschmiert. Da sich die Substanz beim Erkalten zusammenzieht, muß, solange das Erkalten währt, nachgegossen werden, damit in der Mitte der Kugel kein Loch entsteht. Geschah dies, so waren im Innern der Kugeln nach dem Zerbrechen keine Hohlräume mehr sichtbar, auch zeigten die Kugeln das

richtige spezifische Gewicht. Der Stiel, welcher sich im Gußloche bildet, wurde nachher so abgeschnitten, daß die Kugelgestalt möglichst ergänzt wurde, was bei den Schwefelkugeln am besten bald nach dem Gusse geschieht. Die Beobachtungen wurden erst angestellt, wenn die Substanz wieder in α -Schwefel übergegangen war. Bei Paraffin und Kolophonium hat man zu achten, daß sich die Kugeln nicht, solange sie weich sind, deformieren. Das Öl wurde von den Kugeln durch Abwaschen und Abreiben mit einem trockenen Tuche entfernt. Nachher wurden die Kugeln meist über einer Spirituslampe ihrer Elektrizität beraubt. Einige derselben ließ ich unter einer Glasglocke so lange hängen, bis sie unelektrisch geworden waren. Die Kolophoniumkugeln wurden nicht abgewischt, damit keine Fädchen hängen blieben; das Wasser verdunstete von selbst.

Bei den im Sommer 1872 angestellten Versuchen wurde die gleich schwere leitende Kugel (die ich kürzshalber immer als „die Metallkugel“ bezeichnen will) dadurch erhalten, daß ich eine vollkommen gleichbeschaffene, aus demselben Materiale, in derselben Form gegossene Kugel mit Blattgold oder Blattaluminium überzog. Da dadurch das Volum der Kugel fast gar nicht, ihr Gewicht nur sehr wenig verändert wurde, so war es leicht, durch Anbringen eines etwas leichteren Schellackhäkchens, Bohren eines kleinen, mit Blattgold überzogenen Loches die Gewichte vollkommen gleich zu machen. Nur bei einem Versuche verwendete ich eine mit Stanniol überzogene Kugel, ohne aber ein anderes Resultat zu erhalten. Bei den im Winter 1873 angestellten Versuchen jedoch zog ich wegen der sicheren Leitung einen Stanniolüberzug dem aus Blattgold vor. Es wurde die zu überziehende Kugel aus demselben Materiale, in derselben Form, jedoch ein wenig hohl gegossen und dann durch in die Höhlung gestopfte Körperchen auf dasselbe Gewicht gebracht. Die feinste Regulierung des Gewichtes geschah erst, nachdem die Kugel fertig war, durch Ankleben kaum sichtbarer Wachsmengen oder Entfernung von Stanniol. Es zeigte sich, daß man auch den Stanniolüberzug sehr glatt bekommen kann, wenn man alles Stanniol, das Falten zu bilden sucht, entfernt, die Ränder durch minimale Quantitäten von Klebwachs anklebt und alles mit dem Nagel glättet.

Doch wurde immer darauf gesehen, daß der ganze Stanniolüberzug aus einem zusammenhängenden Stanniolstück bestand. Das Volum der mit Stanniol überzogenen Kugeln war immer ein wenig größer als das der anderen, was jedoch durch Rechnung eliminiert werden kann. Die Schellackhäkchen, an denen die Kugeln hingen, wurden aus einem etwa $\frac{1}{4}$ mm dicken Schellackfaden durch gelindes Erwärmen gebogen. Befestigt wurden sie, indem man die entsprechende Stelle der Kugel ein wenig über die Schmelztemperatur des Schellacks erwärmte und dann das womöglich unten ebenfalls erwärmte Häkchen aufsetzte. Bei Paraffin wurde das Häkchen in die Kugelsubstanz eingeschmolzen. Die Kugeln wurden immer unter einer Glasglocke verwahrt und beim Einhängen, damit sie sich nicht elektrisierten, auf Löffeln von derselben Substanz getragen, eine Vorsicht, die übrigens wohl kaum nötig gewesen wäre.

§ 6. Beschreibung der Versuche, bei denen die wirkenden Kugeln während 22 bis 90 Sekunden gleichnamig geladen waren.

Bei diesen Versuchen wurden die wirkenden Kugeln mit der in Fig. 6 dargestellten Vorrichtung geladen. Es wurden zuerst auf die beiden Drähte *W* und *X* zwei zur Erde abgeleitete Drähte aufgelegt und von zwei Beobachtern gleichzeitig der Teilstrich bestimmt, um welchen das Fadenkreuz jedes der beiden Fernröhre zu schwingen schien. Derselbe soll immer *die Ruhelage* heißen. Dann wurde die Influenzmaschine gedreht und die beiden zur Erde abgeleiteten Drähte abgehoben. Es lud sich jetzt zunächst die Flasche *Z*, dann sprang ein Funke zwischen der Kugel *U* und *V* über, worauf sofort der Draht *X* wieder abgeleitet wurde. Die Flasche *Y* und mit ihr die beiden wirkenden Kugeln waren also jetzt mit Elektrizität geladen, und es wurden jetzt von beiden Beobachtern vier (hie und da auch zwei, sechs oder acht) sich folgende Umkehrpunkte beobachtet, d. h. die im Fernrohre sichtbaren Zahlen, die das Fadenkreuz im Momente, wo es gerade umzukehren schien, deckte. Das arithmetische Mittel der beiden ersten Umkehrpunkte gab den Teilstrich, um den das Fadenkreuz anfangs, das Mittel der beiden letzten den-

jenigen um den es später zu schwingen schien. Ich nenne diese Teilstriche immer die *abgelenkten Lagen*.

Zieht man von der *abgelenkten Lage* die *Ruhelage* ab, so erhält man die Anzahl der Teilstriche, um welche das Spiegelbild der Skala durch die Einwirkung der Elektrizität abgelenkt wurde. Ich will die Anzahl dieser Teilstriche immer die *Ablenkung* der betreffenden Kugel nennen. (Beim Fernrohre, welches auf die zweite Drehwage visierte, mußte, um die Ablenkung zu erhalten, umgekehrt von der Ruhelage die abgelenkte Lage subtrahiert werden, weil diese Drehwage in der entgegengesetzten Richtung abgelenkt wurde.) Man sieht, daß hier bei Berechnung der Ablenkungen auf die Dämpfung der Schwingungen keine Rücksicht genommen wurde. Es war dies erlaubt, erstens weil die Dämpfung in der Tat nicht sehr groß war, hauptsächlich aber, weil dadurch an jeder Ablenkung nur ein Fehler hervorgerufen werden konnte, der der Größe der betreffenden Ablenkung proportional war, und da es sich bei diesen Versuchen immer nur um die Verhältnisse mehrerer Ausschläge handelt, so war ein solcher auf das Resultat ohne allen Einfluß. Bei den Versuchen mit alternierender Ladung wurde übrigens die Dämpfung durch Kombination von drei Umkehrpunkten eliminiert. Möglichst rasch nach der Beobachtung des vierten Umkehrpunktes wurde der Draht *W* wieder zur Erde abgeleitet. Da die beiden Kugeln jetzt nahe ohne Geschwindigkeit in ihren Ruhelagen standen, so schwangen sie nach geschehener Entladung nur sehr wenig. Es diente also diese Methode des Ladens und Entladens, um möglichst rasch nacheinander viele Beobachtungen machen zu können, ohne daß die Kugeln in allzu heftige Schwingungen gerieten. Auch der Moment der Ladung wurde nach Möglichkeit so gewählt, wie es zu diesem Zwecke am günstigsten war. Damit dies bei beiden Kugeln gleichzeitig möglich sei, wurden die Schwingungsdauern beider möglichst gleich gemacht. Den Inbegriff der bisher geschilderten Manipulationen will ich kurz *eine Beobachtung* nennen. Nach Beendigung der *Beobachtung* wurde wieder aus zwei, oder wenn die Schwingungen besonders heftig waren, aus drei sich folgenden Umkehrpunkten die Ruhelage bestimmt. Bei jeder Beobachtung wurde das Mittel der vorhergehenden und nachfolgenden Ruhelage zugrunde gelegt. Da

in dem Fernrohre, das auf die zweite Drehwage visierte, sich die Ruhelage fast gar nicht veränderte, so zog es Herr Dr. Albert von Ettingshausen, welcher durch dieses Fernrohr ablas, vor, dieselbe ein für allemal auf den Teilstrich 500 zu stellen und kleine Veränderungen, die sie etwa erfuhr, durch Drehung des Fernrohres vermittelst einer Schraube zu korrigieren). Nach Vollendung der ersten Beobachtung wurden zwei andere genau gleichbeschaffene Beobachtungen gemacht, bei denen nur die wirkenden Kugeln mit der entgegengesetzten Elektrizität geladen wurden. Dann wurden wieder zwei Beobachtungen mit der ursprünglichen Elektrizität gemacht usw. Dieses Abwechseln mit den Zeichen der wirkenden Elektrizität hatte zur Folge, erstens zu verhindern, daß die untersuchte Kugel durch beständige Einwirkung ein und derselben Elektrizität allmählich geladen wurden; zweitens den Fehler zu eliminieren, der sonst durch eine auf der untersuchten Kugel etwa schon ursprünglich vorhandene Elektrizität erzeugt worden wäre. Eine solche auf der untersuchten Kugel etwa schon ursprünglich vorhandene Elektrizität bewirkte, daß die eine, den wirkenden Kugeln mitgeteilte Elektrizität eine größere, die andere aber eine um ebensoviel kleinere Ablenkung erzeugte. Das Mittel beider Ablenkungen war also gleich der Ablenkung, die jede Elektrizität hervorgebracht hätte, wenn die eingehängte Kugel ursprünglich unelektrisch gewesen wäre.

Die Menge der Elektrizität, welche den wirkenden Kugeln bei jeder Beobachtung mitgeteilt wurde, konnte durch Abänderung der Schlagweite zwischen den Kugeln U und V reguliert werden. Doch blieb diese Schlagweite bei jeder Versuchsreihe dieselbe, so daß also während der ganzen Versuchsreihe die wirkenden Kugeln wenigstens nahe mit derselben Elektrizitätsmenge geladen wurden. Ich lasse nun als Muster sämtliche Zahlen einer Beobachtungsreihe folgen, und zwar wähle ich hierzu die Beobachtungsreihe, deren Resultate in Tabelle II zusammengestellt ist, da die vorhergehenden Beobachtungsreihen mehr den Charakter von Vorversuchen hatten und daher ihre detaillierte Mitteilung von weniger Interesse zu sein scheint. Wo zwischen zwei horizontalen Strichen bloß zwei Zahlen stehen, sind dies immer Umkehrpunkte, die beobachtet wurden, während die wirkenden Kugeln

unelektrisch waren, die also zur Berechnung der Ruhelagen dienten.¹⁾ Rechts neben je zwei derartigen Umkehrpunkten ist immer ihre Summe, also die doppelte Ruhelage angemerkt. Die Reihe der letzterwähnten Zahlen zeigt also, wie sich die Ruhelage mit der Zeit veränderte. Die entsprechenden Rubriken für die zweite Drehwage sind leer, weil dort die doppelte Ruhelage immer 1000 betrug. Hier und da, wenn die Ruhelage besonders konstant blieb, wurde dieselbe auch bei der ersten Drehwage zwischen zwei Beobachtungen nicht abgelesen. Dann ist auch die entsprechende Rubrik für die erste Drehwage leer. Zwischen zwei Ruhelagenbestimmungen stehen immer vier Umkehrpunkte, welche zwischen denselben beobachtet wurden, während die wirkenden Kugeln elektrisch waren. Rechts ist sowohl den beiden ersten als auch den beiden letzten die aus ihnen berechnete doppelte Ablenkung der betreffenden Kugel beigesetzt.²⁾ Die zweite Ablenkung ist immer ein wenig kleiner als die erste, was sich daraus erklärt, daß ein Teil der der Flasche *Y* (Fig. 6) mitgetheilten Elektrizität sich allmählich zerstreute.

Die ausführliche Mitteilung aller dieser Zahlen bei allen Beobachtungsreihen wäre zu weitläufig und erschien mir um so weniger notwendig, als sämtliche übrigen Beobachtungen ganz in derselben Weise verliefen. Bei allen übrigen Beobachtungen werde ich daher nur die Quotienten der Ausschläge der zweiten Drehwage in die der ersten mitteilen. Die später anzustellenden theoretischen Betrachtungen werden zeigen (dasselbe lehrt übrigens auch schon eine einfache Überlegung), daß die auf beide Kugeln ausgeübten Kräfte dem Quadrate der den wirkenden Kugeln mitgetheilten Elektrizitätsmenge proportional sind (wenn sich außer dieser Elektrizitätsmenge nichts verändert).

¹⁾ Wenn der erste und dritte Umkehrpunkt nicht identisch waren, so ist die erste der angeführten Zahlen immer das Mittel des ersten und dritten Umkehrpunktes, welches, da beide fast identisch waren, im Kopfe berechnet wurde, ohne den ersten und dritten Umkehrpunkt separat zu notieren.

²⁾ Es wurde immer die doppelte Ablenkung angegeben, um die Division durch 2 zu ersparen. Für die späteren Rechnungen ist dies natürlich gleichgültig, da in denselben ohnedies nur das Verhältnis je zweier Ablenkungen vorkommt.

Versuche mit der Schwefelkugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		Erste Drehwage		Zweite Drehwage	
Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung	Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung	Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung	Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung
573 558	1131		1000	585 547,5	1132,5		
623,5 560,5 619 563	53 51	418 503 422 503	79 75	616 569,5 611,5 569	52,5 47,5	434 488 436 489	78 75
552 579	1131			549 584,5	1133,5		
622 564,5 620 567,5	55 56	425 495 429 495	80 76	622 559 618 560	48,2 45,2	415 514 419 514	71 67
580 552	1132			551 581	1132		
619,5 574 617 576,5	61,5 61,5	417 501 421 501	82 78	609 571 606,5 573,5	48 48	426,5 503 430 503	70,5 67
545 587	1132			580 552	1132		
597 578 593,5 577,5	43 39	420 506,5 424 506	73,5 70	605,5 572 602 573,5	45,5 43,5	404 518 410 518	78 72
576 556	1132						
607 574,5 603 573,5	49,2 44,2	429 496 432 496	75 72	621 561,5 618 563,5	50,5 49,5	424 499 427 499	77 74
				577 555	1132		

Versuche mit der Metallkugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		Erste Drehwage		Zweite Drehwage	
Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung	Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung	Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung	Umkehrpunkte	Doppelte Ruhelage oder doppelte Ablenkung
	1137		1000	585 553	1138		1000
679 586 676 589	128 128	402 506 406 506	92 88	662 581 656 583	105 101	432 491 435 492	77 73
550 587	1137						
684 579 680 577	125,5 119,5	417 497 421 497	86 82	678 558 670 565	98 97	426 499 430 499	75 71
585 553	1138			555 582	1137		
678 576 669 568,5	116 99,5	424 502 428 502	74 70	682 563 673 568	105 103	423 502 427 502	75 71
557 581	1138			583 556	1139		
650 573 648 579	85 89	420 508 425 508	72 67	681 569 672 571	111,3 104,3	421 498 425 498	81 77
561 577	1138			555 583,5	1138,5		
667 567 660 572	96 94	433 494 436 495	73 69	685,5 566,5 678 578	114 113	414 505 418 504	81 78
				576 562	1138		

Da ferner die Ablenkungen beider Drehwagen immer sehr klein waren, so sind sie nahe den wirkenden Kräften proportional. Der Quotient der Ablenkung der zweiten Drehwage in den der ersten ist also die Ablenkung, die die erste Drehwage gezeigt hätte, wenn den wirkenden Kugeln gerade so viel Elektrizität mitgeteilt worden wäre, daß die zweite den Ausschlag eins gezeigt hätte. Ich will diesen Quotienten kurz „die reduzierte Anziehung“ der in der ersten Drehwage hängenden Kugel nennen.

Bei meinen Versuchen wurde immer zuerst die isolierende Kugel in die erste Drehwage eingehängt und die Größe bestimmt, welche ich eben deren *reduzierte Anziehung* genannt habe. Dadurch, daß die wirkenden Kugeln bald positiv, bald negativ geladen wurden und aus allen hierbei beobachteten reduzierten Anziehungen das Mittel genommen wurde, ward in der bereits besprochenen Weise der Einfluß einer etwa schon ursprünglich auf der Kugel vorhandenen Elektrizität eliminiert. Dann wurde, ohne daß sonst etwas verändert wurde, die Metallkugel an die Stelle der isolierenden gehängt und wieder deren reduzierte Anziehung bestimmt. Dividieren wir jetzt die reduzierte Anziehung der Metallkugel durch die der isolierenden, so erhalten wir also die Zahl, welche angibt, wievielmals eine isolierte, leitende, ursprünglich unelektrische Kugel stärker angezogen wird, als eine gleich große, ursprünglich ebenfalls unelektrische isolierende Kugel, also die Zahl, welche wir uns zu bestimmen vornahmen und die ich künftig immer mit E bezeichnen will.

In den folgenden Tabellen werde ich nun bei jeder Beobachtungsreihe sowohl für die Metallkugel, als auch für die isolierende unter steter Angabe des Zeichens der wirkenden Elektrizität die verschiedenen reduzierten Anziehungen mitteilen, von denen sich je zwei aus dem, was ich in diesem Paragraph eine Beobachtung genannt habe, ergaben. Dann teile ich für jede Kugel das Mittel M aller reduzierten Anziehungen mit. Hierauf folgt in der Tabelle der Quotient der reduzierten Anziehung der isolierenden Kugel in die der Metallkugel, also die Größe, welche ich schon oben mit E bezeichnete. Zu Anfang jeder Tabelle bemerke ich noch:

Die Grenzen, zwischen denen die Ablenkung $2A$ der

zweiten Drehwage lag und die Schlagweite S zwischen den Kugeln U und V in Millimetern, welche jedoch nur ganz beiläufig geschätzt wurde.

Damit um so anschaulicher werde, wie die in den folgenden Tabellen zusammengestellten Zahlen aus den unmittelbar beobachteten berechnet wurden, lasse ich hier eine Tabelle folgen, welche genau so wie alle späteren aus den in diesem Paragraph ausführlich mitgeteilten Beobachtungen berechnet wurde.

Schwefelkugel	Stanniolkugel
$S = 2 \text{ mm}$	$S = 2 \text{ mm}$
2A zwischen	2A zwischen
67 und 82	67 und 92
+	+
0,67	1,39
0,68	1,46
0,69	1,45
0,74	1,46
0,75	1,57
0,78	1,42
—	—
0,58	1,98
0,56	1,33
0,66	1,31
0,61	1,36
0,67	1,37
0,63	1,18
+	+
0,68	1,31
0,68	1,37
0,68	1,40
0,72	1,45
—	—
0,58	1,37
0,60	1,35
0,66	1,41
0,67	1,45
<hr/>	<hr/>
$M = 0,6645$	$M = 1,3895$
$E = 2,091.$	

Man sieht, daß die reduzierte Anziehung durchschnittlich dieselbe war, es mochte positive oder negative Elektrizität wirken, womit bewiesen ist, daß beide Kugeln ursprünglich unelektrisch waren und nur die Stanniolkugel durch Influenz, die Schwefelkugel durch dielektrische Polarisierung elektrisiert wurde. Doch zeigt sich auffallend, daß die reduzierte An-

ziehung beständig wuchs, solange man mit der gleichnamigen Elektrizität arbeitete, und plötzlich zu einem viel kleineren Wert übersprang, sobald man die wirkende Elektrizität wechselte. Es kam dies offenbar daher, daß, solange eine und dieselbe Elektrizität wirkte, die Kugel durch Zerstreung an die Luft (oder Ableitung durch die Schellackfäden?) allmählich sich mit der entgegengesetzten Elektrizität lud, was aber, weil ich die wirkende Elektrizität beständig umtauschte, auf unsere Berechnungen keinen schädlichen Einfluß übte.

§ 7. Die bei sämtlichen, im vorigen Paragraph beschriebenen Versuchen erhaltenen Zahlen.

Der Faden *GKH* (Fig. 2) der ersten Drehwage war, wie bereits bemerkt, zuerst ein Kokonfaden. Indem in denselben erst eine Schwefelkugel, dann eine versilberte, dann eine mit Stanniol bekleidete eingehängt wurde, erhielt ich folgende reduzierte Anziehungen:

Tabelle 1.

Schwefelkugel

$S = 2$ 2A 73-94	$S = 1,3$ 2A 31-45	$S = 0,8$ 2A 17-23
+	+	+
0,76	0,70	0,77
0,88	0,84	0,89
-	-	-
0,46	0,52	0,48
0,52	0,65	0,69
0,62	0,72	0,68
0,72	0,84	0,77
+	+	+
0,58	0,55	0,51
0,69	0,62	0,62
0,75	0,80	0,72
0,86	0,88	0,84
-	-	-
0,41	0,50	0,60
0,53	0,61	0,76
0,61	0,70	0,75
0,72	0,81	0,88
$M = 0,651$	$M = 0,696$	$M = 0,707$

Vergoldete Kugel		Stanniolkugel	
$S = 1,3$	$S = 2$	$S = 1,3$	$S = 2$
2A 25—43	2A 63—80	2A 30—54	2A 70—85
+	-	+	+
1,37	1,62	1,59	1,39
1,44	1,76	—	1,59
-	+	-	-
1,51	1,01	1,24	1,29
1,64	1,12	1,37	1,42
1,72	1,27	1,45	1,50
1,88	1,41	1,56	1,53
+	-	+	+
1,05	1,26	1,16	1,26
1,19	1,41	1,27	1,42
1,29	1,56	1,34	1,52
1,43	1,67	1,48	1,64
-	+	-	-
1,32	1,18	1,22	1,03
1,44	1,33	1,37	1,18
1,58	1,36	1,45	1,33
1,69	1,64	1,57	1,45
$M = 1,467$	$M = 1,400$	$M = 1,390$	$M = 1,390$
$E = 2,108$	$E = 2,150$	$E = 2,000$	$E = 2,150.$

Bei diesen Versuchen nimmt die reduzierte Anziehung, solange gleichnamige Elektrizität wirkte, sehr bedeutend zu. Die Ursache lag darin, daß die Kokonfäden nicht gut isolierten. Denn als ich statt der Schwefelkugel bloß einen zweiten Kokonfaden einhing, der erst ganz unten fast ganz außerhalb des Bereiches der Wirksamkeit der wirkenden Kugel mit einer Schwefelkugel belastet war, die sich noch dazu in einer aufgeschlitzten Goldpapierschachtel befand, so zeigte sich ebenfalls eine Ableitung der Drehwage. Die in der vorigen Tabelle gefundenen Werte von E verdienen daher nur wenig Vertrauen.

Wenn sie trotzdem nicht schlecht mit den späteren stimmen, so ist dies ein Beweis für die Güte der Eliminationsmethode der allmählich sich bildenden Ladung, welche, selbst wenn sie einen weit größeren Betrag hat, als sie bei den späteren Versuchen haben wird, sich noch hinlänglich eliminiert.

Ich vertauschte jetzt die Kokonfäden mit den Schellackfäden. Daß die letzteren keine bemerkbare Einwirkung erfuhren, konstatierte ich in folgender Weise. Ich hing an die Schellackfäden wieder statt der Schwefelkugel einen langen Schellackfaden, an dem erst ganz unten außerhalb des Wirkungsbereiches der Elektrizität, und noch dazu in der aufgeschlitzten Goldpapierschachtel, die Schwefelkugel hing. Nun ließ ich die wirkenden Kugeln durch 10 Minuten positiv geladen, entlud sie dann und lud sie hernach negativ. Es zeigten sich folgende Ablenkungen:

Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage		Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage
	gleich nach der positiven Ladung	
0		191
0		186
	nach 2 $\frac{1}{2}$ Minuten	
$\frac{3}{4}$		165
$\frac{3}{4}$		164
	nach 5 Minuten	
1 $\frac{3}{4}$		152
	nach 10 Minuten	
2 $\frac{1}{2}$		136
	nach der Ladung mit negativer Elektrizität	
-2		182

Das negative Zeichen der letzten Ablenkung der ersten Drehwage bedeutet, daß er nach der entgegengesetzten Seite erfolgte, die Schellackfäden also abgestoßen wurden. Obwohl somit bei diesem Versuche die wirkenden Kugeln bedeutend stärker als bei allen anderen geladen wurden, hatten sich doch die Schellackfäden bei den beiden ersten Schwingungen nicht bemerkbar geladen. Nun erneuerte ich die Versuche und erhielt die in den folgenden Tabellen zusammengestellten Resultate:



Tabelle 2.

Schwefelkugel.		Metallkugel.	
$S = 2$	$S = 1,3$	$S = 2$	$S = 1,3$
2A 67-82	2A 26-34	2A 70-92	2A 32-42
+	+	+	+
0,67	0,80	1,39	1,31
0,68	0,72	1,46	1,39
0,69	0,87	1,45	1,50
0,74	0,90	1,46	1,59
0,75	0,80	1,57	—
0,78	1,02	1,42	1,54
—	—	—	1,67
0,58	0,50	1,18	1,59
0,56	0,48	1,33	1,56
0,66	0,62	1,31	1,71
0,61	0,61	1,36	1,47
0,67	0,55	1,37	+
0,63	0,53	1,38	1,14
+	+	+	1,12
0,68	0,73	1,31	1,20
0,68	0,71	1,37	1,34
0,68	0,67	1,40	1,05
0,72	0,71	1,45	1,30
—	—	—	1,405
0,58	0,46	1,37	
0,60	0,47	1,35	
0,66	0,52	1,41	
0,67	0,57	1,45	
$M = 0,6645$	$0,662$	$1,389$	
$E = 2,091$	$E = 2,122$		

Tabelle 3.

Paraffinkugel.		Metallkugel.	
$S = 2,8$	$S = 1,3$	$S = 2$	$S = 1,3$
2A 80-108	2A 28-35	2A 66-90	2A 30-38
+	+	+	+
0,64	0,63	1,07	0,81
0,74	0,75	1,10	0,97
0,74	0,76	1,12	1,21
0,83	0,91	1,17	1,19
—	—	—	—
0,62	0,68	0,95	0,83
0,74	0,83	0,97	0,87
0,75	0,77	1,06	0,97
0,86	0,90	1,03	1,04
+	+	+	+
0,71	0,64	1,04	1,13
0,80	0,79	1,07	1,17
0,74	0,70	1,10	1,06
0,86	0,89	1,13	1,09
—	—	—	—
0,52	0,74	0,94	0,91
0,69	0,86	0,97	0,90
0,74	0,84	0,99	0,97
0,81	0,97	1,00	1,01
$M = 0,737$	+	$M = 1,044$	$M = 1,008$
$E = 1,42$	0,58		
	0,72		
	0,72		
	0,74		
	$M = 0,775$		
	$E = 1,30$		

Tabelle 4.

Erste Versuchsreihe mit der vorigen Paraffinkugel.			Zweite Versuchsreihe mit einer anderen Paraffinkugel.		
$S = 0,8$	$S = 1,3$	$S = 2$	$S = 0,8$	$S = 1,3$	$S = 2$
2 A 25—30	2 A 35—42	2 A 75—84	2 A 22—33	2 A 35—46	2 A 72—97
+	+	+	—	+	+
0,61	0,63	0,64	0,09	0,88	0,79
0,75	0,73	0,75	0,20	1,02	0,90
0,73	0,76	0,72	0,30	0,88	0,82
0,84	0,88	0,82	0,56	1,07	0,92
—	—	—	+	—	—
0,62	0,53	0,57	0,91	0,31	0,42
0,74	0,66	0,70	1,06	0,45	0,57
0,70	0,69	0,71	1,02	0,41	0,69
0,83	0,79	0,79	1,14	0,51	0,74
+	+	+	—	+	+
0,58	0,62	0,62	0,29	0,85	0,70
0,73	0,77	0,72	0,40	0,99	0,84
0,71	0,75	0,79	0,27	0,88	0,80
0,82	0,86	0,87	0,45	1,02	0,91
—	+	—	+	—	—
0,55	0,58	0,45	1,25	0,38	0,53
0,72	0,64	0,60	1,24	0,53	0,66
0,75	0,69	0,64	1,39	0,62	0,66
0,84	0,79	0,77	1,42	0,72	0,77
$M = 0,720$	$0,711$	$0,698$	$M = 0,749$	$0,720$	$0,728$
$E = 1,51$	$E = 1,40$	$E = 1,44$	$E = 1,46$	$E = 1,38$	$E = 1,39$

(Fortsetzung der Tabelle 4.)

Metallkugel zu den beiden vorhergehenden Beobachtungen.

$S = 0,8$	$S = 1,3$	$S = 2$
2A 15—20	2A 31—26	2A 60—77
+	+	+
1,23	1,03	1,04
1,30	1,05	1,07
1,27	1,11	1,09
1,34	1,16	1,12
—	—	—
0,83	0,86	0,90
0,85	0,88	0,90
0,93	0,94	0,95
1,00	0,97	0,97
+	+	+
1,17	1,06	1,02
1,23	1,10	1,05
1,29	1,08	1,06
1,38	1,13	1,11
—	—	—
0,80	0,84	0,91
0,84	0,89	0,93
0,97	0,88	1,01
1,03	0,94	1,02
$M = 1,091$	$M = 0,995$	$M = 1,009$

Tabelle 5.

Hartgummikugel.

Metallkugel.

$S = 2$

$S = 2$

2A 62—90

2A 70—95

+
0,56
0,61
0,61
0,61
—
0,63
0,69
+
0,58
0,61
0,62
0,66
—
0,60
0,62
0,63
0,67
+
0,60
0,62
0,63
0,65
—
0,61
0,64
0,65
0,67

+
1,32
1,36
1,38
1,40
—
1,19
1,28
1,30
1,32
+
1,28
1,30
1,34
1,36
—
1,28
1,29
1,29
1,31

$M = 1,312$

$M = 0,626$

$E = 2,096$

506 25. Experimentaluntersuchung üb. d. dielekt. Fernwirkung usw.

Tabelle 6.

Kolophoniumkugel.			Metall- kugel.
Während einer ganzen Schwingung geladen.	Während zwei Schwingungen geladen.	Während vier Schwingungen geladen.	
$S = 2,8$	$S = 2$	$S = 2,8$	$S = 2$
2 A 90—103	2 A 65—82	2 A 85—110	2 A 57—81
+	+	+	+
0,76	0,79	0,77	1,29
0,81	0,85	0,82	1,32
—	0,87	0,85	1,34
0,63	0,92	0,87	1,35
0,68	—	0,83	—
+	0,54	0,89	1,13
0,82	0,57	0,93	1,16
0,84	0,62	0,95	1,19
—	0,66	—	1,22
0,60	+	0,59	+
0,64	0,80	0,62	1,22
$M = 0,722$	0,87	0,64	1,27
$E = 1,726$	0,85	0,66	1,28
	0,90	0,64	1,34
	—	0,69	—
	0,56	0,70	1,19
	0,61	0,72	1,20
	0,63	+	1,23
	0,67	0,74	1,24
	+	0,78	+
	0,79	0,80	1,26
	0,86	0,84	1,26
	0,85	0,83	1,29
	0,90	0,87	1,31
	—	0,90	—
	0,59	0,92	1,15
	0,63	—	1,18
	0,64	0,57	1,23
	0,68	0,61	1,25
	$M = 0,735$	0,64	
	$E = 1,695$	0,66	$M = 1,246$
		0,65	
		0,69	
		0,74	
		0,74	
		$M = 0,755$	
		$E = 1,650$	

Bei Berechnung der Größen E wurde immer die Anziehung der Metallkugel durch diejenige Anziehung der isolierenden Kugel dividiert, welche bei derselben Schlagweite gemessen worden war, da bei diesen beiden die Ablenkung der zweiten Drehwage nahe dieselbe war; nur bei der mit der Kolophoniumkugel angestellten Beobachtungsreihe hatte ich die Metallkugel nur bei einer Schlagweite untersucht. Es wurden daher die hierbei erhaltenen reduzierenden Anziehungen bei Berechnung aller E' zugrunde gelegt.

Der für die Schwefelkugel gefundene Wert von E stimmt ganz gut mit dem aus der Dielektrizitätskonstante des Schwefels berechneten. Die Paraffinkugel dagegen und alle anderen erfuhren eine größere Anziehung als die theoretisch berechnete. Es ist dies der Grund, weshalb ich mit Paraffin noch eine zweite in Tabelle 4 zusammengestellte Beobachtungsreihe machte, bei der sowohl die frühere als auch noch eine zweite besonders sorgfältig gereinigte Paraffinkugel jede bei drei verschiedenen Schlagweiten beobachtet wurde. Die vollkommene Übereinstimmung aller dabei erhaltenen Zahlen zeigte, daß kein Beobachtungsfehler dabei im Spiele war. Ich prüfte beide Kugeln mit dem Elektroskope und fand, daß sie ausgezeichnet isolierten. Die Ursache der stärkeren Anziehung der Paraffinkugel liegt vielmehr, wie die späteren Untersuchungen unwiderleglich beweisen, in dem, was ich als „dielektrische Nachwirkung“ und Faraday als elektrische Absorption bezeichnete. Es ist dieselbe schon in den in Tabelle 6 zusammengestellten Zahlen ersichtlich. Die in dieser Tabelle mit „während einer ganzen Schwingung geladen“ überschriebenen Versuche unterschieden sich nämlich darin von den übrigen, daß zwischen je zwei Ruhelagebestimmungen nur zwei Umkehrpunkte abgewartet wurden, aus denen natürlich nur eine Ablenkung berechnet werden konnte. Nachdem der zweite Umkehrpunkt eingetreten war, wurden die wirkenden Kugeln schon wieder entladen, so daß also die Elektrizität immer nur während einer ganzen Schwingung ($22\frac{1}{2}$ Sekunden) auf das Kolophonium wirkte. Bei den mit „während vier Schwingungen geladen“ überschriebenen Versuchen dagegen wurden acht Umkehrpunkte zwischen je zwei Ruhelagebestimmungen beobachtet.

Aus dem ersten und zweiten wurde die erste in der Tabelle

angegebene reduzierte Anziehung, aus dem dritten und vierten die nächstfolgende usw. bestimmt. Da wirkte also die Elektrizität durch vier volle ganze Schwingungen. Die in der Tabelle 6 angeführten Werte von E zeigen in der Tat, daß im letzten Falle E am kleinsten, also die Anziehung der Kolophoniumkugel am größten ist. Wenn dagegen die Elektrizität nur während einer Schwingung wirkte, wurde die Kolophoniumkugel am schwächsten angezogen, weil die dielektrische Nachwirkung am wenigsten Zeit hatte, sich zu entwickeln. Freilich wären die in der Tabelle 6 angeführten Versuche für sich allein noch nicht beweisend, besonders da gleichzeitig die Metallkugel nur bei einer Schlagweite beobachtet wurde.

Ich würde hier und in einigen anderen Dingen sicher eine größere Allseitigkeit angestrebt haben, wenn ich nicht wegen der beschränkten Räumlichkeiten des gegenwärtigen Grazer physikalischen Kabinetts meine Versuche mit Ende der Sommerferien hätte abbrechen müssen, und als ich mir ein neues Beobachtungszimmer errungen hatte, gab es so viel Neues zu untersuchen, daß ich an eine Wiederholung der alten Versuche vorläufig nicht denken konnte. Auch hatte ich zu Beginn meiner Versuche weniger die Absicht, die dielektrische Fernwirkung zu einer genauen quantitativen Bestimmung der Dielektrizitätskonstante zu benutzen, als vielmehr nur überhaupt ihre Existenz und Übereinstimmung mit der Theorie nachzuweisen. Eine kleine Ungenauigkeit haftet den eben mitgeteilten Zahlen auch an, weil an denselben die beiden Korrekturen nicht angebracht wurden, von denen in § 12 die Rede sein wird. Die erste Korrektur wegen der ungleichen Größe der beiden Kugeln würde hier wohl nur einen ganz verschwindend kleinen Betrag geliefert haben, weil ich hier mit Blattgold überzogene Kugeln verwendete, deren Größe sich nicht merklich von der der unüberzogenen unterscheidet. Die zweite Korrektur, welche deshalb anzubringen ist, weil sich die Metallkugel, während auf sie gewirkt wird, nicht ganz an derselben Stelle wie die isolierende befand, konnte ich deshalb nicht anbringen, weil ich nicht immer darauf geachtet hatte, daß das Fernrohr nach dem Vertauschen der Kugeln vollkommen unverrückt blieb.

In § 10, wo diese Korrektur ebenfalls angebracht wurde, wird sich zeigen, daß sie sehr klein ist und die Werte von E

durch Anbringen derselben etwas kleiner werden. Aus diesem Grunde dürften auch die in diesem Paragraph angegebenen Werte von E ein wenig zu groß sein.

§ 8. Versuche, bei denen die wirkenden Kugeln 5 bis 10 Minuten hindurch gleichnamig geladen war.

Um eine gewisse Übersicht über das Gesetz zu gewinnen, wie die dielektrische Nachwirkung mit der Zeitdauer der Einwirkung der Elektrizität wächst, stellte ich einige Versuchsreihen an, wobei die wirkenden Kugeln sehr lange Zeit hindurch geladen blieben und eine lange Reihe von sich folgenden Umkehrpunkten abgelesen wurde. Sehr störend war hierbei, daß sich allmählich alle Bestandteile des Apparates elektrisierten, und wäre es weit besser, die Elektrizität während kürzerer Zeiträume, die aber in stetiger Reihenfolge von wenigen Hundertstelsekunden bis mehreren Minuten variiert werden könnten, wirken zu lassen, wozu mir aber ein passender Apparat fehlte. Doch geht wohl aus meinen Versuchen hervor, daß nach etwa 10 Minuten eine Paraffinkugel fast so stark wie eine isolierte leitende angezogen wird; daß dagegen die dielektrische Polarisierung der Schwefelkugel mit wachsender Zeit nicht bedeutend zunimmt.

Von den in den folgenden Tabellen mitgeteilten Ablenkungen ist die erste aus dem ersten, zweiten und dritten, die zweite aus dem dritten, vierten und fünften Umkehrpunkte usw. unter Elimination der Dämpfung bestimmt. Wenn einige Umkehrpunkte nicht beobachtet wurden, so ist die Zeit angegeben, welche von der Ladung der wirkenden Kugeln bis zur Beobachtung der betreffenden Ablenkung verging. Vor und nach der Beobachtungsreihe wurde die Ruhelage bestimmt. Letztere differierte meist zwei bis drei Teilstriche von der ersteren. Es wurde der Berechnung der anfänglichen Ablenkung die erste, der der letzten die zweite, und der Berechnung der mittleren Ablenkung eine mittlere Ruhelage zugrunde gelegt. Manchmal wurden nach Beobachtung der zweiten Ruhelage die wirkenden Kugeln entgegengesetzt geladen und dann wieder eine Reihe von Ablenkungen beobachtet, die dann in der Tabelle die Überschrift „entgegengesetzt geladen“ tragen.

Metallkugel		Paraffinkugel	
Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage	Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage	Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage	Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage
84	85	56	83
84	81	61,7	78
81,2	78,5	65,2	75,5
84,7	77	67,2	73,5
84,2	75	68,7	72
84,2	73,8	70,2	71
84,7	72	72	70
85,2	71	72,7	69
85,2	70	74	68
85,5	69	74,7	67
85,7	68	75,5	66,5
nach 5 Minuten		76,5	65
86	65	77	64,5
nach 10 Minuten		nach 5 Minuten	
92	58,5	77,2	63
		nach 7 $\frac{1}{2}$ Minuten	
		85	59
		nach 10 Minuten	
		86	57

Kolophoniumkugel

		Entgegengesetzt geladen	
Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage	Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage	Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage	Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage
112	207	64	223
117	198	69,5	212
119	191	71,5	204
120	187	73	207,5
121	182	74,5	202,5
122,5	178	75	189
123	175	76	185
124	173	77	180
124,5	170	78	177
125,5	168	79	175
126	166	80	172
126,5	164,5	80,5	169
127	161	81,5	168
nach 5 Minuten		nach 5 Minuten	
128,5	159	82,5	164
nach 10 Minuten		nach 10 Minuten	
137	144	94	146

Schwefelkugel

Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage	Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage	Entgegengesetzt geladen	
		Doppelte Ablenkung der ersten Drehwage	Doppelte Ablenkung der zweiten Drehwage
106	176	94,5	293,5
106	169	93,5	275,5
106,5	164	92	264
107	160	92,5	254
107	157	93	245
107,5	158	93,5	239
108	153	93,5	232
109	151	94	227
110	148	95	221
110	146	95,5	215
111	145	96,5	212
111,5	143	97	207
112	142		
nach 5 Minuten		nach 10 Minuten	
112,5	141	105,5	175
113	140		

Diese Tabellen zeigen, daß die Ablenkungen der zweiten Drehwage wegen der Zerstreuung der Elektrizität der wirkenden Kugeln beständig abnehmen; die der ersten Drehwage dagegen nehmen zu und zwar kann diese Zunahme zwei Ursachen haben: 1. die allmähliche Ladung der in der ersten Drehwage eingehängten Kugel mit derjenigen Elektrizität, welche der der wirkenden Kugeln entgegengesetzt ist; 2. die dielektrische Nachwirkung. Für die Stanniolkugel, bei der offenbar nur die erste Ursache tätig sein kann, ist die Größe, welche wir die *reduzierte Anziehung* nannten, nach 5 Minuten 1,34, nach 10 Minuten 1,59 mal so groß als zu Anfang; für die Schwefelkugel ist sie nach 5 Minuten ebenfalls 1,34 mal so groß. Nimmt man daher, was freilich nicht bewiesen, aber doch nicht unwahrscheinlich ist, an, daß sich die Schwefelkugel und Stanniolkugel in einer ihrer Anziehung proportionalen Stärke mit Elektrizität laden, so ergibt sich selbst nach 5 Minuten keine dielektrische Nachwirkung für Schwefel. Die reduzierte Anziehung der Paraffin- und Kolophoniumkugel dagegen wächst weit rascher; erstere ist nach 5 Minuten 1,82, nach 10 Minuten 2,237, letztere nach 5 Minuten 1,50, nach

10 Minuten 1,76 mal größer als zu Anfang, was in der dielektrischen Nachwirkung seine Ursache hat. Durch Vergleich mit den an der Stanniolkugel angestellten Versuchen findet man, daß nach 10 Minuten die Metallkugel 1,49 mal so stark als die Kolophonium- und 1,07 mal so stark als die Paraffinkugel angezogen wurde. Setzt man also wieder gleiche Zerstreuung der Elektrizität an die Luft voraus, so mußte nach 10 Minuten die elektrische Polarisation der Paraffinkugel so weit gestiegen sein, daß sie infolge derselben fast so stark wie eine Metallkugel angezogen wurde, daß also ihre Dielektrizitätskonstante schon fast unendlich groß war.

§ 9. Versuche, bei denen die wirkenden Kugeln 1 bis 2 Sekunden hindurch geladen waren.

Bei diesen Versuchen wurde zuerst die Ruhelage der beiden Drehwagen bestimmt, dann wurden die wirkenden Kugeln durch den in Fig. 7 dargestellten Apparat geladen und nach 1,82 (oder 0,9) Sekunden wieder entladen. Da diese Zeit nur $\frac{8}{9}$ (bzw. $\frac{1}{2}$) der ganzen Schwingungsdauer war, so konnte die Kraft, mit der die beiden wirkenden Kugeln angezogen wurden, nur aus der Stärke des Impulses berechnet werden, die hierbei beide Drehwagen empfangen. Um diesen Impuls zu bestimmen, wurden nach geschehener Ladung und Wiederentladung der wirkenden Kugeln vier Umkehrpunkte abgelesen.

Infolge dieses Impulses hatte die Amplitude der Schwingungen beider Drehwagen im allgemeinen zugenommen und man findet unter Vernachlässigung der Dämpfung aus der Zunahme der Amplitude die Stärke des Impulses in folgender Weise. Sei R die in Teilstrichen des im Fernrohre sichtbaren Skalenbildes gemessene Ruhelage einer Drehwage. Die Drehwage schwinde schon vor Ladung der wirkenden Kugeln und zwar seien $R - a$ und $R + a$ die beiden Umkehrpunkte. Im Momente, wo das Fadenkreuz auf dem Teilstriche $R + s$ steht, werden die wirkenden Kugeln geladen; und zwar übe diese Ladung eine solche Kraft auf die an der Drehwage hängende Kugel aus, daß, wenn diese Kraft unverändert fortwirken würde, das Fadenkreuz um den Teilstrich $R + c$ schwingen würde.

c wäre also die von dieser Kraft hervorgebrachte Ablenkung. Die Ablenkung c kann nicht, wie in den vorhergehenden Paragraphen, aus mehreren Umkehrpunkten berechnet werden, da, ehe nur eine einzige Umkehr stattfindet, bereits die wirkenden Kugeln wieder entladen wurden. Das einzige, was beobachtet werden kann, ist, daß die Schwingungen jetzt nicht mehr wie vorher zwischen den Teilstriichen $R - a$ und $R + a$, sondern zwischen $R - b$ und $R + b$ stattfinden. Man kann jedoch aus den der Beobachtung zugänglichen Größen a , b und s die Ablenkung c berechnen, welche eingetreten wäre, wenn die Kraft unverändert fortgewirkt hätte. Es ist nämlich

$$(2) \quad c = \frac{s}{2} - \sqrt{a^2 - s^2} \frac{\sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}}{4 \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{\tau}} + \sqrt{\left(\frac{s}{2} - \sqrt{a^2 - s^2} \frac{\sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}}{4 \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{\tau}} \right)^2 + \frac{b^2 - a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{\tau}}}$$

wobei ϑ die Zeit ist, während welcher die wirkenden Kugeln geladen waren, τ aber ist die ganze Schwingungsdauer der Drehwage. $\sqrt{a^2 - s^2}$ ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem im Augenblicke der Ladung der wirkenden Kugeln im Fernrohre das Skalenbild der Umkehrpunkte $R + a$ oder $R - a$ zueilt. Die Ableitungsweise der Formel (2) ist eine so einfache, daß ich nicht glaube, hierauf weiter eingehen zu sollen. Es zeigte sich jedoch bald, daß der Stand der Drehwage im Momente der Ladung, also die Größe s , nicht mit großer Schärfe beobachtet werden konnte. Es mußte daher nach jeder Beobachtung so lange gewartet werden, bis die Schwingungen beider Drehwagen (also in unserer Formel a und s) sehr klein waren. Dann hatte ein kleiner Fehler in der Bestimmung des Zeitmomentes der Ladung keinen schädlichen Einfluß. Man kann dann an die Stelle der vorhergehenden Formel folgende einfachere benützen:

$$(3) \quad c = \frac{b}{2 \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{\tau}} + \frac{s}{2} - \sqrt{a^2 - s^2} \frac{\sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}}{4 \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{\tau}}$$

Bequemlichkeitshalber wurde zudem meist im Momente eines Umkehrpunktes, also für $s = \pm a$ geladen. Ich lasse nun zunächst wieder sämtliche mit der Schwefelkugel beobachteten Zahlen folgen, und werde zeigen, wie dieselben der Berechnung

unterworfen wurden. In der ersten Vertikalkolumne stehen wieder die beobachteten Umkehrpunkte. Wo nur zwei zwischen zwei horizontalen Strichen stehen, wurden sie unmittelbar vor der Ladung beobachtet, um die Größe a zu bestimmen; ihnen ist rechts immer der betreffende Wert a sowie der beobachtete Wert des s beigegeben. (Alles in Skalenteilen ausgedrückt.) Bei der ersten Drehwage wurden oft diese beiden Umkehrpunkte gar nicht notiert, sondern sogleich die Werte von a und s ins Beobachtungsbuch eingetragen, wo dann die entsprechenden Rubriken der Tabelle leer stehen.

Nach zwei derartigen Umkehrpunkten folgen immer vier Umkehrpunkte, welche unmittelbar nach der Ladung der wirkenden Kugeln beobachtet wurden und welche ebenfalls zwischen zwei horizontalen Strichen stehen. Zur Berechnung von b wurden bloß die beiden ersten verwendet, da sich voraussetzen ließ, daß bei denselben etwaige Störungen durch Luftströmungen usw. noch am wenigsten geltend gemacht hätten. Die beiden letzten Umkehrpunkte wurden nur zur Kontrolle beobachtet und sieht man in der Tat, daß sich aus denselben immer fast genau dieselben Werte für c ergeben hätten. Wäre keine Dämpfung vorhanden gewesen, so wäre die Differenz des ersten und zweiten Umkehrpunktes die doppelte Amplitude der Schwingungen, also die Zahl $2b$ gewesen. Die Dämpfung zog ich in folgender Weise in Rechnung. Nehmen wir an, wenn die Drehwage denselben Impuls erhalten hätte, aber gar nicht gedämpft wäre, so wären $R + b$, $R - b$, $R + b$, $R - b$ usw. die sich folgenden Umkehrpunkte. Durch die Dämpfung werde die Amplitude bei jeder Viertelschwingung um d verkleinert, so werden also die Umkehrpunkte der gedämpften Drehwage sein: $R + b - d$, $R - b + 3d$, $R + b - 5d$, $R - b + 7d$ usw. Die Differenz des ersten und zweiten Umkehrpunktes ist also $2b - 4d$, die des ersten und dritten Umkehrpunktes ist $4d$.

Wir bekommen also $2b$, indem wir zur ersten Differenz die letztere addieren. Und dies ist die Methode, nach welcher die rechts von den Umkehrpunkten angemerkten Werte von $2b$ bestimmt wurden. Ich bemerke übrigens hier wieder, daß es für die Bestimmung des Verhältnisses der Anziehung der Stanniol- und Schwefelkugel, das wir ja allein später brauchen werden, gleichgültig ist, ob und wie man die Dämpfung in

Rechnung zieht, wenn man sie nur bei beiden in gleicher Weise in Rechnung zieht (und zwar immer so, daß das daher rührende Korrektionsglied der ersten Potenz der Dämpfung proportional ist), denn die Dämpfung selbst ist ja der Ablenkung proportional. Unter den Werten von $2b$ sind immer die daraus nach Formel (3) berechneten Werte von c angegeben.

Schwefelkugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage	
Umkehrpunkte		Umkehrpunkte	
494	$a = s = 1$	518,2	$a = s = 0,5$
492		519,2	
536	$2b = 86,5$	442	$2b = 154$
453,5		594	
532	$c = 86,6$	444	$c = 153,4$
457		592	
493,8	$a = 0,5, s = 0$	520	$a = s = 1$
492,8		518	
543	$2b = 102,5$	428	$2b = 183$
445		608	
638,5	$c = 101,6$	431	$c = 182,6$
449,5		605	
	$a = -s = 0,5$	518,6	$a = s = 0,3$
		519,2	
525	$2b = 65$	461	$2b = 117$
463		576	
522	$c = 64,5$	463	$c = 116,5$
466		574	
	$a = s = 0,5$	518,8	$a = s = 0,1$
		519	
524,5	$2b = 64$	463	$2b = 112$
463,5		573	
521,5	$c = 63,9$	465	$c = 111,5$
466		572	
	$a = s = 0,5$	518,8	$a = s = 0,1$
		519,0	
526	$2b = 66,5$	460,5	$2b = 117,2$
462,5		576	
523	$c = 66,4$	462,2	$c = 116,7$
465		574,5	

Metallkugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage	
Umkehrpunkte		Umkehrpunkte	
512		518,8	
510	$a = s = 1$	520	$a = s = 0,6$
576		463	
449	$2b = 133$	574,3	$2b = 112,3$
570		464	
454,5	$c = 132,8$	572	$c = 112,0$
	$a = s = 1$	519	
		510,7	$a = s = 0,3$
599		444	
428	$2b = 179,5$	593	$2b = 151$
590,5		446	
435,5	$c = 179,1$	591	$c = 150,4$
	$a = s = 1$	519	
		519,2	$a = s = 0,1$
599,5		444	
428	$2b = 180$	593	$2b = 151$
591		446	
435	$c = 179,6$	591	$c = 150,3$
	$a = s = 0$	519,8	
		519	$a = s = 0,4$
534,5		499	
489	$2b = 48$	539	$2b = 40$
532		499	
491	$c = 47,8$	538,5	$c = 40$
	$a = s = 1$	519,1	
		519,5	$a = s = 0,2$
687		369,5	
346	$2b = 539$	666,5	$2b = 302$
669		374,5	
362	$c = 357,7$	662,5	$c = 300,6$

Die Schlagweite zwischen den Kugeln U und V war bei den meisten dieser Versuche ungefähr 2,8 mm. Bei einigen, die schon durch größere Werte des c erkennbar sind, größer, bei einigen kleiner. Die wirkenden Kugeln waren immer während $\frac{8}{99}$ einer ganzen Schwingung geladen, so daß also

$$\frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}, \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\pi \vartheta}{\tau}} = 1,99, \quad \frac{\sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}}{4 \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{\tau}} = 0,77$$

war. Durch Substitution dieser Zahlen und der in der vorhergehenden Tabelle angeführten Werte von a , b und s in die Formel (3) wurden die Werte für c berechnet. c ist die Ablenkung, welche die Drehwage erfahren hätte, wenn wie bei den vorhergehenden Versuchen die Elektrizität lange Zeit hindurch mit derselben Stärke gewirkt hätte, dabei aber die dielektrische Polarisierung nicht fortwährend gewachsen wäre, sondern immer gleich dem Mittelwerte der während der jetzt zu beschreibenden Versuche stattfindenden Polarisierung gewesen wäre. Dividiert man also den für die erste Drehwage gefundenen Wert des c durch den für die zweite Drehwage gefundenen, so gibt der Quotient wieder die Ablenkung, die in der ersten Drehwage durch eine solche Elektrizitätsmenge hervorgebracht worden wäre, welche in der zweiten die Ablenkung 1 erzeugt hätte, den ich wieder die reduzierte Anziehung der in der ersten Drehwage eingehängten Kugel nennen will. Der Quotient der reduzierten Anziehung der isolierenden Kugel in die der Metallkugel, welcher also angibt, um wievielfach eine leitende isolierte, ursprünglich unelektrische Kugel stärker angezogen wird als die isolierende, wenn sich letztere unter ganz denselben Umständen befindet und ebenfalls ursprünglich unelektrisch war, soll wieder mit E bezeichnet werden.

In der folgenden Tabelle stelle ich die aus den Zahlen der vorhergehenden Tabelle berechneten Werte der Größen c sowie der reduzierten Anziehungen und der mit E bezeichneten Größen übersichtlich zusammen. R ist immer die mittlere Ruhelage der ersten Drehwage. Das Fernrohr wurde während des Umtausches nicht verschoben. Die Zeichen, welche über den Werten von c angebracht sind, geben an, mit welcher Elektrizität die wirkenden Kugeln geladen wurden.

Tabelle 7.

	Schwefelkugel $R = 493$, $\frac{\vartheta}{r} = \frac{8}{99}$					
	+	+	-	-	+	
Erste Drehwage $c =$	86,6	101,6	64,5	63,9	66,4	
Zweite Drehwage $c =$	153,4	182,6	116,5	111,5	116,7	
Reduz. Anziehung der Schwefelkugel.}	0,565	0,556	0,554	0,573	0,569	Mittel 0,563

$$\text{Metallkugel } R = 511, \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

	+	+	-	-	+	
Erste Drehwage $c =$	132,8,	179,1,	179,6,	47,8,	357,7	
Zweite Drehwage $c =$	112,0,	150,4,	150,3,	40,0,	300,6	
Reduz. Anziehung der Metallkugel	} = 1,186, 1,191, 1,195, 1,195, 1,190					Mittel 1,191
$E = 2,12^1)$						

Dieser Wert für E stimmt sehr nahe mit dem bei längerer Ladung gefundenen. Bei Schwefel ist also keine dielektrische Nachwirkung bemerkbar. Für die übrigen Substanzen will ich nur die Werte des c und E in Tabellen zusammenstellen, welche genau wie die Tabelle 7 eingerichtet sind und auch genau in derselben Weise aus den direkt beobachteten Zahlen berechnet wurden.

Tabelle 8.

$$\text{Paraffinkugel } R = 492$$

$$\text{Erste Versuchsreihe } \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

	+	+	-	-	
Erste Drehwage $c =$	58,2,	43,8,	153,3,	94	
Zweite Drehwage $c =$	130,7,	97,6,	351,8,	200,8	
Reduz. Anziehung	= 0,445, 0,449, 0,436, 0,468				Mittel 0,450
$E = 2,91$					

$$\text{Zweite Versuchsreihe } \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{4}{91} \text{ (unmittelbar danach gemacht)}$$

	+	-	-	+	
Erste Drehwage $c =$	41,4,	70,4,	117,	89,7	
Zweite Drehwage $c =$	92,5,	156,6,	269,5,	208,2	
Reduz. Anziehung	= 0,446, 0,449, 0,434, 0,431				Mittel 0,440
$E = 2,98$					

¹⁾ Diese Beobachtungsreihe ist die nämliche, welche ich auch in einer der Akademie am 10. Oktober 1872 vorgelegten vorläufigen Mitteilung (Nr. 23 dieses Bandes) beschrieben habe. Die dort angegebenen Zahlen für die reduzierten Anziehungen stimmen mit den in der obigen Tabelle angegebenen nicht ganz überein, weil ich damals die Dämpfung in etwas anderer Weise in Rechnung zog. Doch stimmen, wie es sein muß, die Werte für E wieder. Kleine anderweitige Unterschiede, welche von einer verschiedenen Berechnungsweise herrühren, liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

$$\text{Metallkugel } R = 508, \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

	+	-	-	+	
Erste Drehwage $c =$	158,2,	312,9,	250,5,	190,1	
Zweite Drehwage $c =$	121,4,	238,9,	190,4,	144,4	
Reduz. Anziehung =	1,303,	1,309,	1,315,	1,316	Mittel 1,311

Bei Berechnung der in dieser Tabelle mitgeteilten Werte von E wurden stets die zuletzt mitgeteilten an der Metallkugel unmittelbar nach der Untersuchung der Paraffinkugel beobachteten Zahlen zugrunde gelegt.

Tabelle 9.

$$\text{Hartgummikugel } R = 514, \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

Erste Drehwage $c =$	65,7,	64	72,7,	72	
Zweite Drehwage $c =$	101,	101,5,	115,5,	115,1	
Reduz. Anziehung =	0,650,	0,630,	0,629,	0,626	Mittel 0,634

$$\text{Metallkugel } R = 508, \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

Erste Drehwage $c =$	101,2,	201,	141,	181,	149
Zweite Drehwage $c =$	75,8,	155,6,	108,4,	139,7,	114,2
Reduz. Anziehung =	1,335,	1,292,	1,300,	1,295,	1,305
					Mittel 1,307
					$E = 2,06$

Tabelle 10.

$$\text{Kolophoniumkugel } R = 520$$

$$\text{Erste Versuchsreihe } \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

Erste Drehwage $c =$	63,7,	68,5,	49,8,	73,8,	107,5,	136,	137
Zweite Drehwage $c =$	128,6,	139,2,	104,6,	151,	223,7,	272,6,	277,4
Reduz. Anziehung =	0,495,	0,492,	0,79,	0,488,	0,480,	0,499,	0,494
							Mittel 0,489
							$E = 1,94$

$$\text{Zweite Versuchsreihe } \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{1}{28}$$

Erste Drehwage $c =$	65,4,	77,4,	78,3	
Zweite Drehwage $c =$	148,1,	177,1,	172,4	
Reduz. Anziehung =	0,442,	0,437,	0,454	Mittel 0,444
				$E = 2,14$

$$\text{Metallkugel } R = 527, \frac{\vartheta}{\tau} = \frac{8}{99}$$

Erste Drehwage $c = 133,3, 160,2, 72,9, 79,1, 178, 204,8$

Zweite Drehwage $c = 146,3, 171,3, 73,5, 83,9, 193, 214,1$

Reduz. Anziehung = 0,945, 0,935, 0,992, 0,943, 0,922, 0,957 Mittel 0,949

Da das Zeichen der Elektrizität, mit welcher die wirkenden Kugeln geladen wurden, ohnedies nicht von Einfluß war, so habe ich es bei den späteren Versuchen nicht mehr notiert. Doch wurden immer ungefähr gleichviel Beobachtungen mit der einen und anderen Elektrizität gemacht. Die Größe E ist bei Kolophonium und Paraffin bedeutend größer als sie sich aus den Versuchen mit länger dauernder Ladung ergab. Die Kugeln aus diesen beiden Substanzen werden also während den ersten Sekunden viel weniger angezogen (sind schwächer dielektrisch polarisiert) als in den späteren Stadien der Einwirkung.

Ich bemerke noch, daß die in diesem Paragraphen angegebenen Werte des E das Verhältnis der mittleren Anziehung der isolierenden Kugel während der ganzen Zeit der Einwirkung zu der der Stanniolkugel angeben.

§ 10. Beschreibung der im Winter 1873 angestellten Versuche, bei denen das Zeichen der wirkenden Elektrizität innerhalb einer Sekunde etwa 150 mal wechselte.

Diese Versuche unterschieden sich von den im früheren beschriebenen nur dadurch, daß zur Ladung der wirkenden Kugeln der in Fig. 8 dargestellte Apparat benützt wurde. Zuerst wurde die Influenzmaschine in gleichmäßige Rotation und die Stimmgabel in Gang versetzt. Während die Ruhelage der Drehwagen bestimmt wurde, lag über den beiden Drähten k und l ein zur Erde abgeleiteter Draht. Dann wurde derselbe aufgehoben und nun drei sich folgende Umkehrpunkte abgelesen. In dem Momente, wo der vierte Umkehrpunkt eintrat, wurden die wirkenden Kugeln wieder mit der Erde verbunden, damit die Drehwagen nicht in zu heftige Schwingungen kämen.

Da die Umkehrpunkte in beiden Drehwagen nicht absolut gleichzeitig eintraten, so konnte das Resultat fehlerhaft werden,

wenn die Influenzmaschine im Verlaufe eines Versuches sehr ungleichförmig wirkte. Um die Wirkung derselben möglichst gleichförmig zu machen, wurden ihre Scheiben wohlgereinigt und die Umdrehungsgeschwindigkeit durch die im § 4 beschriebene Vorrichtung konstant erhalten. Es zeigte sich dann, daß der dritte Umkehrpunkt fast denselben Wert wie der erste hatte (nur war er wegen der Dämpfung immer ein wenig kleiner), daß also die Maschine sehr gleichförmig wirkte. Die doppelte Ablenkung wurde immer in folgender Weise berechnet. Zum arithmetischen Mittel des ersten und dritten Umkehrpunktes wurde der zweite Umkehrpunkt addiert und von der Summe die doppelte Ruhelage subtrahiert (für die zweite Drehwage umgekehrt diese Summe von der doppelten Ruhelage subtrahiert). Die Ruhelage wurde unmittelbar vor dem Versuche bestimmt, wo die Drehwagen am wenigsten schwangen; zwischen je zwei Versuchen wurde immer ein wenig ausgesetzt.

Durch diese Berechnungsweise wurde also die Dämpfung eliminiert. Den Quotienten, welchen man erhält, wenn man den Ausschlag der ersten Drehwage durch den der zweiten dividiert, bezeichne ich wieder als die *reduzierte Anziehung* der in der ersten Drehwage eingehängten Kugel. Häufig habe ich bloß der bequemerem Division wegen dessen reziproken Wert berechnet, den ich dann kurz als *reziproke reduzierte Anziehung* bezeichne.

Bei diesen Versuchen wurden durchaus neu gemachte Kugeln angewendet. Und zwar waren die Metallkugeln immer mit einem zusammenhängenden Stück Stanniol bekleidet, so daß also bezüglich ihrer Leitungsfähigkeit nicht der mindeste Zweifel obwalten konnte.

Es konnte dieser Überzug ebenfalls sehr glatt erhalten werden; nur wurde die Metallkugel ein wenig größer, was aber der Rechnung unterzogen werden konnte. Da ich auch alle übrigen Apparate zu diesen Versuchen neu zusammenstellen mußte, so benutzte ich die Gelegenheit, um eine nicht unwesentliche Verbesserung an den Dimensionen derselben anzubringen. In dem Dimensionenschema sind die Längen, welche die betreffenden Linien bei diesen Versuchen hatten, immer in einer Klammer beigefügt. Die bedeutendste Veränderung er-

fuhr die zweite Drehwage. Dieselbe hatte nämlich bei den früheren Versuchen zwei Mängel. Erstens war ihre Dämpfung viel kleiner als die der ersten Drehwage, was das gleichzeitige Beruhigen der Schwingungen beider Drehwagen sehr erschwerte; zweitens war die Ablenkung derselben nicht genau der Intensität der wirkenden Kraft proportional. Das letztere kam daher, daß der Wagbalken der zweiten Drehwage sehr lang war und folglich die an seinem Ende aufgehängte Kugel schon bei sehr kleinen Winkeldrehungen erhebliche Wege zurücklegte.

Beiden Übelständen begegnete ich dadurch, daß ich die Dämpfung der ersten Drehwage durch Entfernung der in der Goldschachtel befindlichen, den Spiegel umschließenden Schachtel verkleinerte und daß ich Trägheitsmoment und Wagbalken der zweiten Drehwage ebenfalls verkleinerte. Den letzteren wählte ich gerade so lange, daß die Ablenkung der zweiten Drehwage von der absoluten Proportionalität mit der wirkenden Kraft genau um ebensoviel abwich wie der der ersten Drehwage, so daß also der Quotient der Ausschläge beider Drehwagen nur um kleine Größen höherer Ordnung sich änderte, wenn die Elektrisierung der wirkenden Kugeln sich änderte. Die Bedingungen, wann dies stattfindet, sollen in einer zweiten Abhandlung, die demnächst folgen wird, besprochen werden.

Ich hängte nun in die Drehwage zuerst eine Metallkugel ein, und erhielt, wenn die wirkende Kugel während zwei ganzen Schwingungen gleichnamig geladen war, bei neun sich folgenden Versuchen folgende reziproke Anziehungen dieser Metallkugel: + 1,00, 1,08, 1,04, - 1,31, 1,21, 1,15, 1,10, + 1,34, 1,17 (das voranstehende Zeichen gibt immer das Zeichen der Elektrizität, mit der die wirkenden Kugeln bei allen folgenden Versuchen geladen wurden. Die Ablenkungen wurden wie bei allen folgenden Versuchen immer aus dem ersten, zweiten und dritten Umkehrpunkte unter Elimination der Dämpfung berechnet). Unmittelbar darauf dagegen, als die wirkenden Kugeln mit der Stimmgabel alternierend geladen wurden, erhielt ich folgende reziproke reduzierte Anziehungen: 1,69, 1,30, 1,22, 1,56, 1,32, 1,63, 1,71, 1,44, 1,65, 1,50, 1,67, 1,47, 1,92, 1,64, 1,61, 1,59, 1,52. Man sieht, daß dieselben erheblich von den bei dauernder

Ladung gefundenen differieren und auch untereinander wenig übereinstimmen. Die Ursache lag darin, daß sich der Tisch und die Wände des Glaskastens bei dauernder Ladung fast vollständig bei alternierender, aber nur unvollständig mit Elektrizität luden, welche Elektrizität wieder eine Rückwirkung auf die beweglichen Kugeln ausübte. Denn als ich jene Teile des Tisches und der Glaswände des Glaskastens, die sich in der Nähe der beweglichen Kugeln befanden, mit zur Erde abgeleitetem Stanniol bekleidete, erhielt ich, wenn die Ladung während zwei Schwingungen ihr Zeichen nicht wechselte, der Reihe nach folgende reziproke reduzierte Ausschläge für eine Metallkugel:

+ 1,10, 1,05, - 1,10, 1,03, 1,01, 0,98, + 1,17, 1,08, 1,06, 1,00,
Mittel 1,064

und bei alternierender Ladung durch die Stimmgabel folgende:
1,08, 1,10, 1,03, 1,12, 1,06, 1,00, 1,11, 1,08, 1,13, 1,08, 1,16, 1,10, 1,17,
Mittel 1,09.

Die von dem Tische und den Wänden ausgehende Wirkung war natürlich, sobald sie nur bei allen Versuchen dieselbe blieb, auf meine Versuche ganz ohne störenden Einfluß.

Ich konstatierte ferner neuerdings, daß die übrigen Bestandteile der Drehwage mit Ausnahme der in die Schellackfäden eingehängten Kugel nicht merklich von der Elektrizität affiziert wurden, indem ich die Schwefelkugel in den Haken *o* (Fig. 3) einhängte, so daß also die Drehwage frei schwingen konnte, während die Schwefelkugel sich ganz in der Goldschachtel befand, also gegen jeden Einfluß der Elektrizität geschützt war. Die Schellackfäden hingen vermöge ihrer Steifigkeit noch an derselben Stelle herunter. Ich wartete nun so lange, bis das durch den Spiegel der ersten Drehwage erzeugte Skalenbild vollkommen ruhig war und lud nun die wirkenden Kugeln alternierend so heftig, daß die zweite Drehwage den doppelten Ausschlag 82 zeigte. Trotzdem zeigte das vom Spiegel der ersten Drehwage erzeugte Skalenbild nicht die mindeste Bewegung. Nun erst schritt ich zu den definitiven Versuchen. Ich hatte zuerst den Glasfaden *uvw* (Fig. 8) nicht eingeschaltet. Dabei ergaben sich die in der ersten mit

„ohne Glasröhre“ überschriebenen Vertikalreihe der Tabelle zusammengestellten Zahlen; dieselben zeigen ziemliche Unregelmäßigkeit, welche daher rührte, daß sich auf den wirkenden Kugeln bei einigen Versuchen eine bestimmte Elektrizität allmählich in Überschuß entwickelte. Ich überzeugte mich hiervon dadurch, daß ich die wirkenden Kugeln während sehr vieler Schwingungen der Drehwagen fortwährend durch die Stimmgabel alternierend lud; dann wurde die aus den späteren Umkehrpunkten berechnete reduzierte Anziehung immer mehr und mehr unregelmäßig und zwar meist größer als die aus den ersten Umkehrpunkten berechnete, was daher rührte, daß sich die wirkenden Kugeln immer mehr und mehr mit Elektrizität von einem bestimmten Zeichen luden. Ich schaltete deshalb die mit Wasser gefüllte Glasröhre *uvw* ein, durch welche ein derartiger einseitiger elektrischer Überschuß abfloß, ohne daß die alternierende Ladung bedeutend geschwächt wurde.

Ich stelle nun wieder die an den Kugeln aus den verschiedenen Substanzen gefundenen Resultate übersichtlich zusammen; und zwar steht immer an der Spitze der Tabellen die mit $2R$ bezeichnete doppelte Ruhelage der ersten Drehwage. Dann folgen (mit $2A$ bezeichnet) die Grenzen, zwischen denen der doppelte Ausschlag der ersten Drehwage bei allen in der betreffenden Vertikalreihe lag; hierauf sind die reduzierten Anziehungen der in der ersten Drehwage eingehängten Kugel (oder deren reziproke Werte) angegeben, im letzteren Falle ist die erste dem Mittel das Zeichen * beigefügt. Dann folgt (mit M bezeichnet) deren Mittelwert und schließlich der Quotient E' der reduzierten Anziehung der isolierenden Kugel in die der Metallkugel, wobei wieder die bei den verschiedenen Versuchen gefundenen reduzierten Anziehungen der Metallkugel immer durch jene reduzierte Anziehung der isolierenden dividiert werden, welche sich bei Versuchen ergab, bei denen die zweite Drehwage nahezu denselben Ausschlag zeigte. Von der Bedeutung der Größe E wird in § 12 die Rede sein.

Tabelle 11. Kolophonium.

Erste Versuchsreihe ohne Glasfaden		Zweite Versuchsreihe	
		Kolophoniumkugel	Metallkugel
2 A 10—17	2 A 26—32	2 R = 806	2 R = 806
3,46*	3,11*	2 A 13—15	2 A 29—33
3,32	3,20	3,30*	1,04*
3,67	3,00	3,21	1,02
3,00	2,98	3,10	1,02
3,24	3,25	3,14	1,03
3,11	3,25	3,13	1,03
3,23	3,21	3,24	<hr/> M 1,03*
3,28	3,20	3,31	
3,09	3,21	3,13	
3,20	3,15	<hr/>	
2,92	3,16	M 3,195*	
2,80	3,17	E' = 3,102	
2,66		$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,092$	
<hr/> M 3,15*	M 3,16*	2(R _m - R _i) = 0, 2(A _m - A _i) = 17	
		E = 3,058	

Dritte Versuchsreihe

Kolophoniumkugel	Metallkugel
2 R = 818	2 R = 812
2 A 12—14	2 A 30—35
3,19*	1,04*
3,08	1,04
3,10	1,05
3,14	1,03
3,00	1,04
3,12	1,02
3,29	1,03
3,15	1,03
3,09	1,05
3,14	<hr/> M 1,037*
3,21	
3,18	
<hr/> M 3,141*	
E' = 3,029	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,019$	
2(R _m - R _i) = -6, 2(A _m - A _i) = 20	
E = 2,992	

Tabelle 12. Schwefel.

Schwefelkugel		Metallkugel	
$2R = 814$		$2R = 815$	
$2A\ 14-17$	$2A\ 10-12$	$2A\ 40-64$	$2A\ 14-15$
1,61*	1,64*	1,30	1,29
1,63	1,64	1,32	1,32
1,66	1,63	1,32	1,31
1,60	1,61	1,32	1,27
$2A\ 19-23$	1,61	1,34	1,30
1,64	1,61	1,33	1,30
1,64	1,63	1,32	1,29
1,63	1,61	1,33	$M\ 1,30$
1,60	$M\ 1,622^*$	1,33	
1,64	$E' = 2,109$	1,34	
1,62		1,32	
1,63	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,039$	1,32	
$M\ 1,629^*$	$2(R_m - R_i) = 1,$	$M\ 1,324$	
$E' = 2,156$	$2(A_m - A_i) = 4$		
	$E = 2,032$		
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,085$			
$E = 2,035$			

Die Zahlen der ersten und zweiten Vertikalreihe, ebenso die der dritten und vierten, wurden unmittelbar nacheinander beobachtet. Bei Bildung von E' wurden die sieben letzten Zahlen der ersten Vertikalreihe mit den Zahlen der dritten, die der zweiten mit denen der vierten kombiniert.

Tabelle 13. Hartgummi unabgewaschen.

Hartgummikugel	
$2R = 815$	
$2A\ 10-12$	$2A\ 15-18$
2,52*	2,50*
2,58	2,45
2,50	2,55
2,50	2,56
2,53	2,51
2,58	2,58
2,57	2,58
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> M 2,54*	2,53
$E' = 2,310$	2,54
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,215$	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 2,53
$2(R_m - R_i) = 3$	M 2,533*
$2(A_m - A_i) = 18$	$E' = 2,292$
$E = 2,185$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,198$
	$2(R_m - R_i) = 3,$
	$2(A_m - A_i) = 20$
	$E = 2,168$

Metallkugel		
$2R = 818$		
$2A\ 28-30$	$2A\ 36-38$	$2A\ 16-17$
1,09*	1,14*	1,09*
1,09	1,12	1,11
1,12	1,09	1,16
1,09	1,09	1,11
1,11	1,10	1,11
1,09*	1,09	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> M 1,10*	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> M 1,105*	M 1,116*

Die Zahlen für die Hartgummi-, sowie die für die Metallkugel wurden unmittelbar nacheinander beobachtet. Bei Bildung von E' wurden die der ersten Vertikalreihe mit denen der dritten, die der zweiten mit denen der vierten kombiniert.

Tabelle 14. Hartgummi mit CS₂ gewaschen.

Hartgummi- kugel	Metall- kugel	Hartgummi- kugel	Metall- kugel
2R = 803	2R = 803	2R = 806	2R = 809
2A 13—15	2A 35—37	2A 16—20	2A 27—29
1,70*	1,43	1,72*	1,40
1,70	1,38	1,72	1,41
1,69	1,40	1,69	1,38
1,66	1,45	1,72	1,43
1,78	1,35	1,68	1,37
1,69	1,37	1,73	1,35
1,76	1,40	1,72	1,37
1,67	1,40	1,70	1,36
1,67	1,40	1,68	<u>M 1,383</u>
1,70	1,41	1,72	
1,69	1,42	1,72	
1,67	1,40	1,70	
1,68	1,40	M 1,708*	
1,70	<u>M 1,40</u>	E' = 2,362	
1,69		$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,265$	
1,67			
<u>M 1,695*</u>		2(R _m —R _i) = 3	
E' = 2,373		2(A _m —A _i) = 10	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,276$		E = 2,246	
2(R _m —R _i) = 0,			
2(A _m —A _i) = 22			
E = 2,245			

Tabelle 15. Paraffin.

Paraffinkugel		Metallkugel
2 R = 814		2 R = 821
2 A 10 - 14	2 A 15 - 17	2 A 40 - 50
2,76*	2,90*	1,27
2,83	2,77	1,26
2,81	2,79	1,28
2,79	2,79	1,28
2,77	2,68	1,28
2,86	2,68	1,28
2,85	2,79	1,26
2,65	2,72	1,26
2,77	2,75	1,30
2,78	2,80	1,27
2,79	2,47	1,24
2,80	2,81	1,28
2,83	2,84	1,28
2,76	<hr/>	<hr/>
2,76	M 2,753	1,27
2,74	E' = 3,502	<hr/>
2,76		M 1,272
2,60	$\frac{V_i}{V_m} E = 3,393$	
2,79	2 (R _m - R _i) = 7	
2,70	2 (A _m - A _i) = 29	
2,67	E = 3,315	
2,60		
2,68		
2,59		
2,68		
<hr/>		
M 2,745*		
E' = 3,491		
$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,382$		
2 (R _m - R _i) = 7		
2 (A _m - A _i) = 33		
E = 3,296		

Die drei Vertikalreihen wurden in derselben Reihenfolge beobachtet, in der sie aufgeschrieben sind. Bei Berechnung von E' wurden sowohl die Zahlen der ersten als auch der zweiten Vertikalreihe mit denen der dritten kombiniert.

§ 11. Ausführliche Mitteilung der auf den Schwefel bezüglichen Zahlen.

Ich will wieder als Muster in den folgenden Tabellen die zehn ersten Versuche ausführlich mitteilen, welche sowohl mit

Tabelle 16.

Schwefelkugel				Metallkugel			
Erste Drehwage		Zweite Drehwage		Erste Drehwage		Zweite Drehwage	
Umkehrpunkte		Umkehrpunkte		Umkehrpunkte		Umkehrpunkte	
	2R 813,2	449 451	2R 900			448,7 450,8	2R 899,5
422,5 407,5 422	2B 829,7 2A 16,5	423,4 449,7 424,2	2B 873,5 2A 26,5	444 410,2 446,5	2R 816 2B 855,5 2A 39,5	423 447,8 490,2	2B 869,4 2A 30,1
422 407,5 421,5	2R 813 2B 829,2 2A 16,2	452,2 447,8 425,5 448 425,5	2R 900 2B 873,5 2A 26,5	406,5 408,2 454,2 408,5 453,5	2R 814,7 2B 862,4 2A 47,7	450,2 448,6 413,9 448,9 413,8	2R 898,8 2B 862,7 2A 36,1
421,5 409,5 420,5	2R 813 2B 830,5 2A 17,5	451,1 448,8 424,7 446,5 426	2R 899,9 2B 871,8 2A 28,1	406,5 407,2 449,2 411,5 449,2	2R 813,7 2B 860,7 2A 47	451,8 447 416,1 447,1 416,1	2R 898,8 2B 863,2 2A 35,6
421 406,5 420,7	2R 813 2B 827,4 2A 14,4	447 451,3 426,3 449 426,3	2R 898,3 2B 875,3 2A 23	456 409,8 455,2	2R 814,4 2B 865,4 2A 51	431,8 447,6 411,1 449,4 411,1	2R 898,9 2B 860,5 2A 38,4
425,7 407,2 425	2R 813,1 2B 832,6 2A 19,5	448,2 451 416,4 450 417,8	2R 899,2 2B 867,1 2A 32,1	406,7 740 459 408,5 460,6	2R 814,3 2B 868,3 2A 54	451,7 447 408,6 450,9 406,9	2R 898,7 2B 858,6 2A 40,1
427,5 406,7 426	2R 813,1 2B 833,5 2A 20,4	451 448 417,3 449,3 415,1	2R 899 2B 865,5 2A 33,5	458,5 413,4 458	2R 814,9 2B 871,7 2A 56,8	450 448,5 411,8 444 411,8	2R 898,5 2B 855,8 2A 42,7
425,5 407 425,7	2R 813,5 2B 832,6 2A 19,1	447,1 451,7 417,4 450,2 417,4	2R 898,8 2B 867,6 2A 31,2	463,5 408,2 464,5	2R 815 2B 872,2 2A 57,2	453 445,7 405,8 450,2 404,6	2R 898,7 2B 855,4 2A 43,3
427 408,2 426,3	2R 813,6 2B 834,8 2A 21,2	452,2 4473 416,5 448,4 417,6	2R 899,5 2B 865,4 2A 34,1	463,6 409,9 464,6	2R 814,6 2B 874,0 2A 59,4	453,7 444,3 405,1 449 404	2R 898 2B 853,6 2A 44,4
427,7 409 426,8	2R 814 2B 836,2 2A 22,2	453,8 446 413,2 449,2 415	2R 899,8 2B 863,3 2A 36,5	468 409,5 468,2	2R 814,2 2B 877,6 2A 63,4	454,4 443,7 400,4 450 399,7	2R 898,1 2B 850 2A 48,1
427,7 408,5 426,5	2R 814 2B 835,6 2A 21,6	455,9 444 413 451,1 414,8	2R 899,9 2B 865 2A 34,9	451,7 412,8 451,5	2R 814 2B 864,4 2A 50,4	455 443 414,7 445,7 414,7	2R 898 2B 860,4 2A 37,6

der Schwefelkugel als auch der dazu gehörigen Metallkugel angestellt wurden. Für jede Drehwage stehen wieder in der ersten Vertikalreihe sämtliche der Reihe nach beobachteten Umkehrpunkte. Je zwei Versuche sind durch eine Horizontallinie getrennt. Die ersten beiden Umkehrpunkte jedes Versuches wurden beobachtet, während die wirkenden Kugeln unelektrisch waren; die aus diesen beiden Umkehrpunkten berechnete doppelte Ruhelage ist denselben rechts (mit $2R$ bezeichnet) beigefügt; nun erst wurden die wirkenden Kugeln alternierend geladen und die drei folgenden Umkehrpunkte beobachtet (die wir mit a , b , c bezeichnen wollen). Denselben ist rechts beigefügt: erstens die doppelte Ablesung, um welche das Fadenkreuz während derselben schwang, also die Größe $b + (a + c)/2$, zweitens die doppelte Ablenkung, also die Größe $\pm [b + (a + c)/2 - 2R]$. Die erstere ist in der Tabelle mit $2B$, die letztere mit $2A$ bezeichnet.

§ 12. Über zwei an den Werten von E' anzubringende Korrekturen.

Die mit E' bezeichneten Zahlen, welche den Quotienten der Anziehung einer isolierenden Kugel in die einer unter denselben Umständen befindlichen leitenden angeben, bedürfen noch zweier Korrekturen. Erstens war das Volum der Metallkugel bei diesen Versuchen nicht genau gleich dem der isolierenden.

Wir werden später sehen, daß die Anziehung direkt dem Volum proportional ist. Um also das Verhältnis zu finden, in dem beide Anziehungen gestanden wären, falls die Metallkugel dasselbe Volum wie die isolierende gehabt hätte, muß man die Zahl E' mit dem Volum V_i der isolierenden Kugel multiplizieren und durch das Volum V_m der Metallkugel dividieren. Folgendes waren die aus dem Gewichtsverluste in destilliertem Wasser berechneten Volumina:

	Volum V_i der isolierten Kugel	Spez. Gewicht der isolierten Kugel	Volum V_m der dazugehörigen Metallkugel
Schwefel	1,582 ccm	1,027 ccm	1,637 ccm
Hartgummi	1,519	1,171	1,584
Kolophonium	1,527	1,076	1,532
Paraffin	1,434	0,912	1,480

In § 10 sind nach den Werten von E' jedesmal die von E' (V_i/V_m) angegeben. An denselben ist noch eine zweite Korrektion anzubringen, welche daher kommt, daß die Metallkugel, während die Elektrizität auf sie wirkte, im allgemeinen nicht genau an derselben Stelle hing, wie die isolierende. Aus den im Dimensionenschema angegebenen Zahlen findet man mit Leichtigkeit, daß sich das Zentrum der Kugel L (Fig. 4) dem der Kugel M um 0,02185 mm näherte, wenn die erste Drehwage einen Ausschlag von einem Teilstrich zeigte (d. h. wenn sich das im Fernrohre sichtbare Skalenbild um einen Teilstrich [Millimeter] nach der Seite der größeren Zahlen verschob). Ist R_m die Ruhelage, während die Metallkugel, R_i die, während die isolierende Kugel eingehängt war, und ist ferner A_m die durchschnittliche Ablenkung im ersten, A_i die im zweiten Falle, so war das Skalenbild im Fernrohre, während die Elektrizität auf die Metallkugel wirkte, durchschnittlich um $R_m - R_i + A_m - A_i$ Teilstriche nach der Seite der größeren Zahlen verschoben im Vergleiche mit seiner Lage, während die Elektrizität auf die isolierende Kugel wirkte.

Das Zentrum der Metallkugel war also dem der wirkenden um 0,01255 ($R_m - R_i + A_m - A_i$) mm näher als das der isolierenden, wenn man die Momente ins Auge faßt, in denen auf beide gewirkt wurde. Nun war die Distanz der Centra der Kugeln L und M nahe 49 mm und wir werden im zweiten Teile dieser Abhandlung sehen, daß die Anziehung sowohl der Metall- als auch der isolierenden Kugel der fünften Potenz der Distanz ihres Zentrums von dem der wirkenden Kugel verkehrt proportional ist. Es gilt dies in voller Strenge freilich nur, wenn bloß die Kugeln aufeinander wirken, während hier auch der elektrisierte Tisch eine kleine Einwirkung ausübte. Allein letztere war, wenn sie auch bei der zweiten Drehwage einen etwas größeren Wert hatte, bei der ersten, wo sich die beiden Kugeln, die aufeinander wirkten, so nahe standen, sicher verschwindend gegen die Wechselwirkung der Kugeln. Zudem ist ja die Korrektion, welche wir jetzt anbringen wollen, selbst außerordentlich klein: ein unbedeutender Fehler bei Bestimmung dieser Korrektion also jedenfalls einflußlos. Hätte sich also die Metallkugel genau an derselben Stelle wie die isolierende befunden, so hätte sie eine

$$\left[\frac{49}{49 + 0,01255 (R_m - R_i + A_m - A_i)} \right]^5$$

mal so starke Anziehung erfahren, als sie tatsächlich erfuhr. Um also die durch die Anziehung der isolierenden Kugel dividierte Anziehung E zu erhalten, welche die Metallkugel erfahren hätte, wenn sie genau an derselben Stelle gehängt hätte, muß $E' (V_i / V_m)$ noch mit

$$\left[\frac{49}{49 + 0,01255 (R_m - R_i + A_m - A_i)} \right]^5 = 1 - 0,00128 (R_m - R_i + A_m - A_i)$$

multipliziert werden. Die in dieser Weise berechneten Werte von E sind am Schlusse der Tabellen des § 10 angegeben.

§ 13. Beiläufige Schätzung der Menge der überschüssigen Elektrizität.

Es ist selbstverständlich, daß trotz der angegebenen Vorichtsmaßregeln bei der alternierenden Ladung der wirkenden Kugeln die Menge der wirkenden positiven Elektrizität nicht absolut gleich war der Menge der wirkenden negativen. Ich stellte daher Versuche an, um wenigstens beiläufig schätzen zu können, um wieviel die eine Menge die andere übertraf, was ich immer den Elektrizitätsüberschuß nennen will. Derselbe könnte einen doppelten schädlichen Einfluß haben. Erstens wirkt er auf die Elektrizitätsmenge, welche vor Anstellung des Versuches schon auf der in der ersten Drehwage hängenden Kugel vorhanden war (ich werde in der Anmerkung zu diesem Paragraph zeigen, daß diese Wirkung jedenfalls verschwindend war); zweitens erzeugte er ebenfalls eine dielektrische Polarisation, wovon zu Ende dieses Paragraphen die Rede sein wird.

Um diesen Elektrizitätsüberschuß zu bestimmen, verfuhr ich folgendermaßen: Ich hängte in die erste Drehwage eine Metallkugel ein; ihre reduzierte Anziehung betrug, wenn sie ungeladen war, etwa 1,4. Nun lud ich sie ziemlich stark mit positiver Elektrizität. Wurden jetzt die wirkenden Kugeln dauernd negativ geladen, so zeigte die erste Drehwage die doppelte Ablenkung 323, die zweite aber 11,2; die reduzierte Anziehung war also 29. Lud ich dagegen die wirkenden Kugeln positiv, so zeigte die erste Drehwage die doppelte Ablenkung 5,34 nach der entgegengesetzten Seite, während die

zweite die doppelte Ablenkung 214 zeigte. Die reduzierte Anziehung war also 25. Die in der ersten Drehwage hängende Kugel war also mit einer solchen Elektrizitätsmenge geladen, daß sie durchschnittlich 27mal so stark abgelenkt war, als die in der ersten Drehwage hängende.¹⁾ Nun lud ich die wirkenden Kugeln, ganz nach derselben Methode, welche bei allen im § 10 beschriebenen Versuchen angewendet wurde, alternierend und erhielt die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Ablenkungen.

Tabelle 17.

Erste Drehwage.	Zweite Drehwage	
	Beobachtet	Berechnet
21,6	25,0	30,2
21,4	16,5	30,2
22,8	14,0	31,9
21,6	23,5	30,2
21,0	33,0	29,4
20,9	26,5	29,3
21,1	31,5	29,5

Wäre die Kugel, die in der ersten Drehwage hing, unelektrisch gewesen, so wäre ihre reduzierte Anziehung 1,4 gewesen; sie hätte also die in der letzten Kolumne zusammengestellten doppelten Ablenkungen erfahren. Die Differenzen der Zahlen der vorletzten und letzten Kolumne rühren also von der Wirkung der überschüssigen Elektrizität auf diejenige

¹⁾ Diese Elektrizitätsmenge läßt sich mittels der in den §§ 6 und 7 mitgeteilten Versuche mit derjenigen vergleichen, welche bei den übrigen Versuchen gewöhnlich vor Anstellung des Versuches auf der Kugel der ersten Drehwage vorhanden war. Aus denselben folgt nämlich, daß die Wirkung der Elektrizität der wirkenden Kugeln auf die letztere Elektrizitätsmenge höchstens den reduzierten Ausschlag 0,1 hervorgebracht hätte; daß also die erstere Elektrizitätsmenge etwa 270mal so groß als die letztere war. Die Fehler, welche durch die Wirkung der bei der alternierenden Ladung überschüssigen Elektrizität auf die letztere Elektrizitätsmenge bewirkt wurden, mußten also etwa 270mal kleiner sein als die vermöge der Wirkung auf die erstere, d. h. als die Differenzen der zweiten und dritten Kolumne der Tabelle 17. Sie mußten also ganz verschwinden. Es war durchaus kein Grund vorhanden, weshalb bei den Versuchen mit alternierender Ladung wesentlich mehr Elektrizität auf der Kugel der ersten Drehwage gewesen sein sollte, als bei den in den §§ 6 und 7 beschriebenen.

Elektrizität her, mit welcher die Kugel der ersten Drehwaage geladen war. Trotz der enormen Größe der letzteren sind diese Differenzen mäßig groß. Wie ich bereits in der Anmerkung zeigte, folgt hieraus, daß der Elektrizitätsüberschuß bei denjenigen Substanzen, welche keine erhebliche dielektrische Nachwirkung zeigen, also vor allem beim Schwefel, ohne Schaden ist. Doch schien dieser Überschuß periodisch hin und her zu schwanken, was offenbar mit der periodischen Drehung der Influenzmaschine zusammenhängt. Infolgedessen könnte bei den Substanzen mit dielektrischer Nachwirkung die Größe E etwas fehlerhaft erhalten werden.

Ich fand übrigens seitdem eine weit bessere Methode, diesen Elektrizitätsüberschuß zu prüfen, nämlich: durch gleichzeitige Einschaltung eines stark geladenen Elektrometers. Nach dieser Methode hoffe ich demnächst eingehendere Untersuchungen hierüber anstellen zu können.

Experimentelle Bestimmung der Dielektrizitätskonstante einiger Gase.¹⁾

(Wien. Ber. 69. S. 795—813. 1874 und Pogg. Ann. 155. S. 403. 1875.)

Als meine Bestimmungen der Dielektrizitätskonstante fester Isolatoren im allgemeinen die von Maxwell aus seiner Theorie gefolgerte Relation zwischen der Dielektrizitätskonstante und dem Brechungsquotienten bestätigten, ohne daß ich jedoch imstande gewesen wäre, eine so große Genauigkeit zu erzielen, daß die Richtigkeit jener Relation für eine größere Zahl von Substanzen außer Zweifel gestellt worden wäre, verfiel ich sogleich auf den Gedanken, daß dies vielleicht bei Gasen gelingen werde. Diese Erwartung hat mich nicht getäuscht. In der Tat zeigten die Wurzeln der Dielektrizitätskonstante der Gase eine sehr vollständige Übereinstimmung mit den Lichtbrechungsquotienten. Gase haben nämlich zahlreiche günstige Eigenschaften, die festen Körpern fehlen. Erstens isolieren sie ausgezeichnet und scheinen von der dielektrischen Nachwirkung völlig frei zu sein. Zweitens fällt bei ihnen die Schwierigkeit, den Raum zwischen den Kondensatorplatten kontinuierlich auszufüllen, Löcher im Innern des Dielektrikums hintanzuhalten usw. hinweg und ist auch ihre chemisch reine Darstellung eine leichtere. Drittens gibt es zahlreiche chemisch vollkommen definierte Gase, welche sich zur Untersuchung eignen, wogegen ich bisher nur einen hierzu geeigneten festen Körper (den Schwefel) finden konnte, der nicht, wie Paraffin, Harz, Hartgummi, ein schwer zu definierendes Gemenge wäre, und selbst beim Schwefel sind die zahlreichen allotropen Modifikationen sehr störend. Erschwert wird dagegen die Untersuchung der Gase dadurch, daß die Dielektrizitätskonstante aller Gase und

¹⁾ Vorläufiger Bericht über diese Arbeit Wien. Anz. 11. S. 96. 23. April 1874.

unter allen Drucken nahe gleich (also wenn man die der Luft gleich eins setzt, nahe gleich eins) ist, wie schon Faraday nachwies (Exp. res. 11; Pogg. Ann. 47). Mit 18 Daniellschen Elementen ist da durchaus nichts zu machen. Ich verschaffte mir daher eine Batterie von 300 Daniellschen Elementen; erst mit dieser konnte ich hoffen, wahrnehmbare Ausschläge zu erhalten.

1. *Grundidee.* Der Methode, welche ich zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Gasen einschlug, liegt folgende Idee zugrunde. Ich verschaffte mir zwei wohlisolierte Kondensatorplatten d und e , die sich unter einem Rezipienten befanden, durch den natürlich die Zuleitungsdrähte isoliert hindurchgingen. Ich verband die Platte e mit der Erde, die Platte d mit dem Elektrometer. Pumpte ich nun rasch das Gas unter dem Rezipienten, also auch zwischen den Kondensatorplatten (bis auf einige Zentimeter Quecksilberdruck) aus, so zeigte das Elektrometer nicht den mindesten Ausschlag, ebensowenig, wenn das Gas wieder einströmte; die durch die Gasbewegung erzeugte Reibung veranlaßte also keine Elektrizitätsentwicklung. Nun lud ich die Platte e mit etwa 300 Daniellschen Elementen, z. B. positiv. Dabei lag (was bei dem früher beschriebenen Prozesse natürlich nicht der Fall war) auf dem von der Platte d zum Elektrometer führenden Drahte l ein anderer mit der Erde verbundener Draht m , so daß also die positive Elektrizität der Platte d , weil sie von der positiven Elektrizität der Platte e abgestoßen wurde, zur Erde abfloß; dagegen wurde negative auf der Platte d gebunden. Jetzt erst wurde der Draht m gehoben, also das Elektrometer, welches mit der Platte d leitend verbunden blieb, isoliert; da beide Kondensatorplatten sehr gut isoliert waren, so erfolgte kein Ausschlag (dies war der Prüfstein der guten Isolation). Fügte man dagegen jetzt zu den 300 ladenden Daniellschen Elementen noch eins hinzu, so wurde die Platte e noch ein wenig stärker positiv geladen, daher noch etwas mehr positive Elektrizität der Platte d abgestoßen; dieser Überschuß konnte jetzt nicht mehr zur Erde abfließen, sondern bewirkte einen positiven Ausschlag β des Elektrometers (etwa 60 Skalenteile). Wurde jenes Element wieder weggenommen, so daß die Platte e wieder wie zu Anfang mit 300 Daniellschen Elementen ge-

laden war, so kehrte das Elektrometer wieder in seine Ruhelage zurück. Wurde nun rasch das Gas zwischen den Kondensatorplatten verdünnt, so zeigte das Elektrometer wieder einen Ausschlag und zwar einen negativen $- \alpha$ (α sei sein Absolutwert, etwa acht Skalenteile). Das Gas erzeugt durch Reibung an den Platten, wenn diese vorher unelektrisch waren, keine Elektrizität; schließt man den sehr unwahrscheinlichen Fall aus, daß die Reibung bedeutend mehr Elektrizität entwickle, wenn die Platten schon vorher elektrisch waren, so kann der Ausschlag $- \alpha$ nur daher rühren, daß Gas von normaler Dichte stärker dielektrisch polarisiert ist als verdünntes. Durch ein Abreißen elektrischer Gasteilchen von den Platten kann derselbe nicht erklärt werden; denn während die positive Elektrizität, die etwa von der Platte e durch abgerissene Gasteilchen entfernt worden wäre, durch die Batterie sogleich wieder ersetzt würde, so müßte die negative von der Platte d abgerissene durch die im Elektrometer vorrätige Elektrizität ersetzt werden; es müßte also negative vom Elektrometer zur Platte d , also umgekehrt positive von der Platte d zum Elektrometer strömen, was im Elektrometer einen positiven Ausschlag erzeugen würde. Zudem kehrte, wenn man wieder Luft unter den Rezipienten einströmen ließ, das Elektrometer augenblicklich wieder in seine Ruhelage zurück, während es bei der schlechten Leistungsfähigkeit der Gase lange Zeit gebraucht haben müßte, bis die Elektrizität wieder in die Gasschicht eingedrungen wäre. Daß der Ausschlag $- \alpha$ auch nicht dadurch bewirkt wurde, daß sich der ganze Kondensator durch die Druckverminderung etwas deformierte und infolgedessen die Distanz der Platten etwas verändert wurde, geht schon aus der großen Verschiedenheit des Ausschlages $- \alpha$ für verschiedene Gase hervor (für Äthylen ist er fünfmal so groß als für Wasserstoff). Zudem wurde es noch durch einen später zu beschreibenden Versuch konstatiert. — Es wird also der Ausschlag $- \alpha$ in der Tat höchstwahrscheinlich dadurch veranlaßt, daß Gas von normaler Dichte eine größere Dielektrizitätskonstante als verdünntes hat. — Das verdichtete Gas ist also stärker dielektrisiert und infolgedessen bindet die positive Elektrizität der Platte e mehr negative auf der Platte d , solange verdichtetes Gas dazwischen ist. Wird dagegen das

Gas verdünnt, so wird negative auf der Platte d frei, welche zum Teil ins Elektrometer abfließt und daselbst den negativen Ausschlag α erzeugt. Aus der Größe der Ausschläge α und β kann die Größe der Veränderung der Dielektrizitätskonstante des Gases beim Auspumpen berechnet werden und, zwar in folgender Weise:

2. *Theorie der Berechnungsweise meiner Versuche.* Sei das Potential an dem Pole eines Daniellschen Elementes p , während der andere zur Erde abgeleitet ist. Dann wird in der Platte e , wenn dieselbe durch n Daniellsche Elemente geladen wird, das Potential np erzeugt. Durch Hinzufügen von noch einem Daniell wächst das Potential noch um p und wird der Ausschlag β erzeugt, welcher offenbar dem Potentialzuwachse proportional ist. (Davon, daß die Ausschläge wirklich mit genügender Genauigkeit den Potentialen proportional waren, mit denen man das Elektrometer lud, hatte ich mich vorher überzeugt, was ich „das Kalibrieren des Elektrometers“ nenne.) Um nun den mathematischen Ausdruck für den Ausschlag zu erhalten, den ich als Ausschlag $-\alpha$ bezeichnet habe, verfährt man am kürzesten so. Wir denken uns die Platte e mit n Daniellschen Elementen geladen, so daß in ihr das Potential np herrscht, die Platte d aber mit der Erde verbunden, so daß in ihr das Potential Null herrscht; nun werde die Verbindung der Platte e mit der Batterie und die der Platte d mit der Erde aufgehoben, ohne daß die auf diesen Platten aufgehäuften Elektrizitätsmengen verändert werden. In diesem Zustande werde jetzt die Natur des Mediums, in dem sich die Platten befinden, verändert (z. B. das Gas, in dem sie sich befinden, ausgepumpt), so daß die Dielektrizitätskonstante dieses Mediums von D_1 in D_2 übergeht. In der Theorie der Dielektrizität wird folgender Satz bewiesen (vgl. Helmholtz, Borch. Journ. 72. S. 116): Sei ein Raum rings von einer leitenden Hülle umgeben; in demselben befinden sich irgendwelche geladene Leiter, während er sonst von einem dielektrischen Medium mit der Dielektrizitätskonstante D_1 erfüllt ist. Wenn nun die Elektrizitätsmengen, die sich auf den Leitern und der Hülle befinden, keine Veränderung erfahren, und nur das Medium seine Dielektrizitätskonstante ändert (deren neuer Wert D_2 heiße), so ist das Potential an jedem Punkte des

Raumes gleich dem mit D_1/D_2 multiplizierten Potential, welches früher daselbst herrschte. Wo also früher das Potential Null war, dort ist es noch immer. War z. B. die Hülle früher mit der Erde verbunden, so ist der Zustand des Systems noch immer so, daß die Hülle ohne Elektrizitätsverlust mit der Erde verbunden werden kann. Es ändert also in diesem Falle an der Sache gar nichts, wenn die Hülle während des ganzen Prozesses mit der Erde verbunden war. Mein Kondensator war in der Tat rings von einer leitenden Hülle umgeben. Auf ihn ist also das zitierte Theorem anwendbar, wenn der Versuch so angestellt wird, daß während des Auspumpens beide Platten isoliert sind. Beim Auspumpen wird also in diesem Falle einfach an jeder Stelle das Potential D_1/D_2 mal so groß. Auf der Platte d bleibt es daher Null. Verbindet man also diese Platte jetzt wieder mit dem Elektrometer, so erhält man keinen Ausschlag, was der Versuch vollkommen bestätigte. Auf der Platte e dagegen verwandelt sich das Potential in $(D_1/D_2)np$. Läßt man nun, nachdem der Kondensator in diesen Zustand gebracht worden ist, die Platte d mit dem Elektrometer verbunden und verbindet die Platte e wieder mit der Batterie, so steigt das Potential der letzteren wieder auf np , es wächst also um

$$np \left(1 - \frac{D_1}{D_2}\right).$$

Den Ausschlag, den dadurch das Elektrometer erfährt, nennen wir α' . Wir sahen früher, daß der Potentialzuwachs p den Ausschlag β hervorruft und daß die Ausschläge den Potentialzuwachsen proportional sind; man hat also die Proportion:

$$(1) \quad \alpha' : \beta = np \left(1 - \frac{D_1}{D_2}\right) : p.$$

Die Richtigkeit dieser Proportion setzt voraus, daß sich die Verhältnisse, unter denen sich der Kondensator befindet, nur sehr wenig verändert haben, daß sich also namentlich die Dielektrizitätskonstante D_1 nur wenig verändert hat, was bei mir immer der Fall war. Es ist klar, daß man ganz denselben Ausschlag α' erhalten hätte, wenn auch während des Auspumpens die Platte e mit der Batterie, die Platte d mit dem Elektrometer verbunden gewesen wäre; α' ist also identisch mit dem früher mit $-\alpha$ bezeichneten Ausschlage. Sein

negatives Zeichen rührt daher, daß die Verdünnung die Dielektrizitätskonstante des Gases vermindert, daß also $D_2 < D_1$ und $1 - (D_1/D_2)$ negativ ist. In der Proportion (1) kann also $\alpha' = -\alpha$ gesetzt werden und dann folgt aus derselben

$$(2) \quad \frac{D_1}{D_2} = 1 + \frac{\alpha}{\beta n}.$$

Wir werden später sehen, daß der Zuwachs der Dielektrizitätskonstante innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler dem Zuwachse des Druckes des Gases proportional ist. Nehmen wir also an, wenn der Gasdruck um 760 mm Quecksilber steigt, so wachse die Dielektrizitätskonstante um das λ -fache ihres ursprünglichen Betrages. Wir müssen dann setzen:

$$D_1 = C \left(1 + \frac{\lambda b_1}{760} \right), \quad D_2 = C \left(1 + \frac{\lambda b_2}{760} \right),$$

wobei b_1 und b_2 die in Millimeter Quecksilber gemessenen Gasdrucke vor und nach dem Auspumpen sind. Da λ sehr klein ist, so können wir setzen

$$\frac{D_1}{D_2} = 1 + \frac{\lambda(b_1 - b_2)}{760}.$$

Die Formel (2) verwandelt sich also in

$$(3) \quad \lambda = \frac{\alpha \cdot 760}{\beta n (b_1 - b_2)}.$$

Dabei ist λ der Quotient der ursprünglichen Dielektrizitätskonstante des Gases in den Zuwachs, welchen dieselbe erfährt, wenn der Druck des Gases bei unveränderter Temperatur um 760 mm Quecksilber wächst. Wenn angenommen wird, daß die Proportionalität des Zuwachses der Dielektrizitätskonstante mit dem Druckzuwachs bis zur absoluten Evakuierung gültig sei, so hat die Größe λ eine noch einfachere Bedeutung. Dann ist nämlich

$$(4) \quad 1 + \lambda = D_{760},$$

wobei D_{760} die Dielektrizitätskonstante des Gases beim Drucke 760 mm ist, wenn die des absoluten Vakuums gleich eins gesetzt wird.

Wenn die Magnetisierungskonstanten mit hinlänglicher Genauigkeit gleich sind, was, wie sich leicht zeigen läßt, bei Gasen in der Tat der Fall ist, so ist nach Maxwells Theorie das Verhältnis der Lichtbrechungsquotienten zweier Substanzen

die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse ihrer Dielektrizitätskonstante; da für Gase diese Verhältnisse sehr nahe gleich eins sind, so ist der Zuwachs der Lichtbrechungsquotienten halb so groß als der der Dielektrizitätskonstanten unter denselben Verhältnissen; eine Relation, welche meine Versuche bestätigen.

Wiewohl die Schlüsse, durch welche wir fanden, daß die von mir gefundene Größe in der Tat die Dielektrizitätskonstante ist, ziemlich einwurfsfrei sein dürften, so wäre es doch wünschenswert, Versuche zu machen, bei denen das Gas nicht während des Versuches ausgepumpt wird, sondern einmal die Kapazität des leeren, dann die des gaserfüllten Kondensators mit der eines Eichkondensators nach meiner älteren Methode verglichen wird. Derartige Versuche, bei denen immer die durch das Laden der einen Platte auf der anderen frei werdenden Elektrizitätsmengen in beiden Kondensatoren zu vergleichen wären und beide Kondensatoren fast genau dieselbe Kapazität haben müßten, scheinen mir durchaus nicht unausführbar und ich werde sie, sobald es meine Muße erlaubt, in Angriff nehmen.

Ich gehe nun zu einer kurzen Beschreibung der wesentlichsten Apparate über, die mir bei meiner Untersuchung dienten. Ich bemerke, daß die Figuren, welche ich hier von den Apparaten geben werde, nur als schematische aufzufassen sind, wobei minder wesentliches, um allzugroße Komplikation derselben zu vermeiden, weggelassen wurde. Die Beschreibung mit Angabe aller Details werde ich baldmöglichst in der ausführlichen Abhandlung folgen lassen.

3. *Das Elektrometer.* Da ich leider kein Thomsonsches Quadrantelektrometer zur Verfügung hatte, so suchte ich ein Kirchhoffsches Vorlesungselektrometer, so gut es anging, in ein Präzisionsinstrument umzuwandeln. Ich verklebte zu diesem Zwecke die zahlreichen Löcher dieses Instrumentes und umgab es mit einem (mit einem Fenster versehenen) Pappkasten. Dadurch wurden Luftströmungen im Innern so sehr vermieden, daß bei einigermaßen solider Aufstellung selbst die kleinen Ausschläge, die ich zu beobachten hatte, mit ziemlicher Sicherheit abgelesen werden konnten. Die Quadranten schraubte ich auf einen Hartgummiring fest und ließ dann alle vier gleichzeitig eben abschleifen. Ferner legte ich auf zwei Quadranten

ganz nahe zum Schlitze, welcher sie trennte, zwei Kupferdrähte. Die Elektrizität, welche durch den elektrisierten Aluminiumdraht in diesen Kupferdrähten influenziert wurde, lieferte die Kraft, die den Aluminiumdraht in einer bestimmten Ruhelage festhielt. Den Aluminiumdraht selbst hing ich an einem einzigen sehr feinen Kokonfaden auf und verband ihn durch einen haarfeinen Platindraht, der durch eine kleine zugeschmolzene, mit Quecksilber gefüllte Glaskugel beschwert war, mit der geladenen Schwefelsäure. Um diesem feinen Platindrahte mehr Halt zu verleihen, steckte er größtenteils in einem feinen Glasfaden. Die Kirchhoffsche, zur Projektion bestimmte Ablesevorrichtung vertauschte ich mit der gewöhnlichen Spiegelablesung mit Fernrohr. Der Spiegel aus

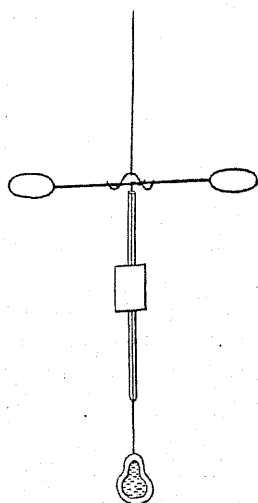
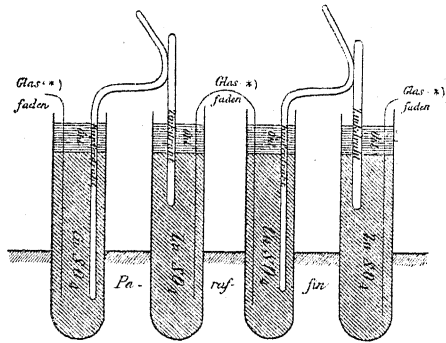


Fig. 1.

dünnem Spiegelglas, ziemlich klein, namentlich sehr schmal, vergrößerte das Trägheitsmoment nicht merklich und lieferte bei guter Beleuchtung doch vortreffliche Bilder. Das Fernrohr hatte die Distanz 1880 mm vom Spiegel, die Skala war in Millimeter geteilt. Der ganze bewegliche Teil (Wagebalken) des Elektrometers ist in Fig. 1 dargestellt. Die Dämpfung war nicht sehr groß und ich wartete mit der Ablesung niemals, bis der Wagebalken zur Ruhe gelangt war, sondern berechnete die Ablenkung immer aus den drei ersten Umkehrpunkten, ebenso die darauffolgende Ruhelage, was größere Genauigkeit liefert, als eine zu starke Dämpfung.

4. *Die Batterie.* Jedes meiner Daniellschen Elemente bestand aus zwei Probegläschen, in einigen Linien Distanz voneinander, deren untere Hälften in Paraffin eingeschmolzen waren. Das eine war mit Kupfervitriol, das andere mit Zinkvitriol gefüllt. Beide Flüssigkeiten standen durch einen heberförmig gekrümmten feinen Glasfaden in Verbindung, der ebenfalls mit Zinkvitriol gefüllt war. In den Kupfervitriol tauchte ein Kupferdraht, in den Zinkvitriol ein Zinkdraht; der Kupfer-

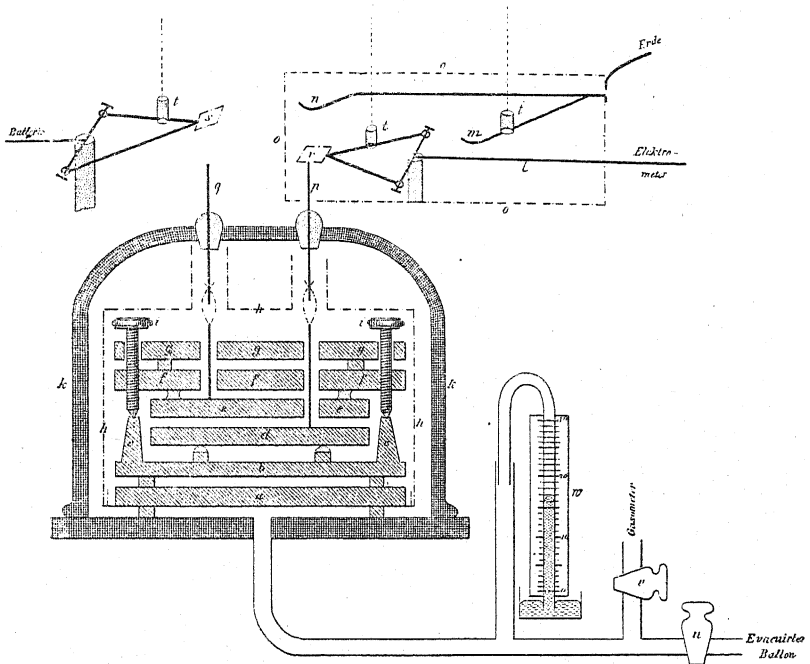
draht war mit dem Zinkdrahte des vorhergehenden, der Zinkdraht mit dem Kupferdrahte des nachfolgenden Elementes zusammen- gelötet. Zwei Ele- mente der Batterie sind in Fig. 2 dar- gestellt.



5. Der Kondensator ist in Fig. 3 im Querschnitte gezeichnet. Er bestand aus sechs kreisrunden Messingscheiben *a, b, d, e, f, g*. Die Platten *d* und *e* waren die eigentlichen Kondensatorplatten

Fig. 2.

aus sechs kreisrunden Messingscheiben *a, b, d, e, f, g*. Die Platten *d* und *e* waren die eigentlichen Kondensatorplatten



In Fig. 3 bedeutet

--- Messingblech, — steifer Kupferdraht, Bindfaden
 ▨ Messing Messing, ▩ Glas, ▧ Schallkammer

Fig. 3.

(identisch mit den schon früher in gleicher Weise bezeichneten). Die Platte d konnte durch den Zuleitungsdraht p , die Platte e durch den Zuleitungsdraht q geladen werden. d ruhte auf drei kleinen Schellackstücken, die auf kleine Messingwürfel aufgeschmolzen waren. Jene Messingwürfel standen auf der Platte b . Die Platte e dagegen wurde von oben mittels dreier kleiner Schellackstücke getragen, die an ihr und der Platte f angeschmolzen waren. Distanz der Platte etwa 1 mm, Dicke 4—5 mm, Durchmesser 160 mm.

Die Platte f ruhte auf drei verstellbaren Schrauben i , welche sich auf die drei Messingansätze c der Platte b stützten. (In der Fig. 3 sind immer nur zwei Schrauben i , zwei Messingansätze c usw., und zwar nicht in der richtigen relativen Lage gezeichnet. In Wirklichkeit bildeten die drei Schrauben, wie man leicht begreifen wird, die drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.) Die unterste und oberste Platte a und g waren durch kleine dazwischengelegte Messingstücke von den folgenden Platten b und f getrennt und hatten nur den Zweck, die Wärme, die sich bei Verdichtung der Gase entwickelt, abzuleiten, welche sonst möglicherweise die beiden Seiten der Platten b und f verschieden erwärmt und letztere Platten dadurch etwas deformiert hätte. Um den Kondensator vor äußeren elektrischen Einflüsse zu schützen, war er von einem Gehäuse h aus dünnem Messingbleche umgeben. Darüber stand erst der Rezipient k . Die Zuleitungsdrähte p und q gingen durch Schellackstöpsel; das Gehäuse, sowie die Platte a , b , f und g waren sorgfältig leitend mit der Erde verbunden.

Bei einer Versuchsreihe legte ich drei kleine Schellackstücke zwischen die Platten d und e (und zwar so, daß sie sich ganz am Rande der Platten, nicht unter denjenigen befanden, die früher die Platte e getragen hatten) und schraubte dann die Schrauben i so weit zurück, daß sie die Messingstücke c nicht mehr berührten. Jetzt wurde also die Platte e nicht mehr getragen, sondern ruhte auf der Platte d . Ich erhielt auch bei dieser Versuchsreihe fast denselben Wert von λ aus Formel (3), was beweist, daß die Distanzänderung der Kondensatorplatten infolge der Deformation durch Druckänderung keinen wesentlichen Einfluß auf den Ausschlag $-\alpha$ hat, denn diese Distanzänderung mußte jetzt offenbar eine ganz andere sein.

6. *Die Zuleitungsdrähte.* Mittels der horizontalen, an passende Kupferdrähte, die sich wie Scharniere um andere Drähte schlangen, angelöteten Messingbleche *s* und *r* konnte die Platte *e* mit der Batterie geladen, die Platte *d* aber mit dem Elektrometer verbunden werden. (Die Messingbleche *s* und *r* und was damit zusammenhängt, ist in Fig. 3 ausnahmsweise perspektivisch gezeichnet.) War das Messingblech *r* ganz abgehoben, so berührte es einen mit der Erde verbundenen Draht *n*. War das Messingblech *r* gesenkt und wurde der Draht *m* herabgelassen (er berührte dann den Draht *l*), so war die Platte *d* und das Elektrometer zur Erde abgeleitet. Die Hebung und Senkung der Messingbleche *r* und *s*, sowie des beweglichen Drahtes *m* geschah durch lange hölzerne Hebel; die einen Enden dieser Hebel konnten vom Beobachter, während er am Fernrohr saß, gehoben und gesenkt werden. An den anderen Enden waren durch Bindfaden Schellackzylinder *t* aufgehängt, die an passenden Orten an die zu bewegenden Drähte aufgeschmolzen waren. Das Messingblech *r*, der damit verlötete Draht und ein Teil des Drahtes *l* befanden sich ebenfalls (natürlich davon isoliert) in einer mit der Erde leitend verbundenen Metallschachtel *o*.

7. *Die Gasleitungen.* Die Ableitung des unter dem Rezipienten befindlichen Gases geschah durch Öffnen des Geisslerschen Hahnes *u*, der den Rezipienten mit einem großen evakuierten Ballon in Kommunikation setzte, die Zuleitung neuen Gases durch Öffnen des Hahnes *v*, der zum Gasometer führte (dabei war natürlich der Hahn *u* geschlossen). Das Gas durchstrich, während es vom Gasometer in den Rezipienten strömte, ein langes Chlorcalciumrohr und einen dichten Baumwollpfropf. Die Zeit des Ein- und Ausströmens betrug etwa $\frac{1}{2}$ Minute. Ein Manometer *w* zeigte den im Rezipienten herrschenden Gasdruck an. Manometer und Hähne lagen ebenfalls im Bereiche des am Fernrohre sitzenden Beobachters.

8. *Elektrische Leitungsfähigkeit der Luft.* — Bevor eine Beobachtung begann, war schon tagelang das Messingblech *s* gesenkt, die Platte *e* also mit etwa 300 Daniellschen Elementen geladen gewesen. Ich prüfte zuerst, ob die beiden Kondensatorplatten *d* und *e* vollständig voneinander isoliert waren, indem ich zuerst das Messingblech *r* und den Draht *m*

senkte, dann beide hob und nach Verlauf einer gewissen Zeit t das erstere wieder senkte. War $t = 5$ Minuten, also viel länger als eine Beobachtung dauerte, so erfolgte nicht der mindeste Ausschlag, zum Zeichen, daß während dieser 5 Minuten keine Elektrizität von der geladenen Platte e auf die Platte d übergegangen war. Ich machte einige Versuche, bei denen $t = 14$ Stunden war; dann zeigte das Elektrometer nach dem Senken des Bleches r einen Ausschlag von beiläufig 14 Skalenteilen. Da die Hinzufügung eines Daniellschen Elementes zur Ladung der Platte e einen Ausschlag von etwa 60 Skalenteilen bewirkte und die Platte e mit 300 Elementen geladen war, so war während 14 Stunden jedenfalls nicht mehr als der 1200. Teil der gesamten Ladung mitgeteilt worden. Ich vermute übrigens, daß auch dieser kleine beobachtete Ausschlag des Elektrometers nicht von Elektrizitätsleitung durch die Luft, sondern von einer Inkonstanz der Batterie herrührte. Aus diesen Daten ergibt sich der elektrische Leitungswiderstand der Luft für so kleine Spannungen jedenfalls größer als 10^{26} mal so groß als der des Kupfers. Dieser so hohe Grad von Isolation konnte nur nach sorgfältiger Entfernung aller im Apparate enthaltener Härchen und Stäubchen erzielt werden, welche sonst von der Elektrizität angezogen, beide Platten überbrückten. Die Entfernung aller Stäubchen war unendlich mühsam; am besten gelang sie mir, indem ich alle Bestandteile des Apparates sehr glänzend polieren ließ, wo dann jedes Stäubchen sehr sichtbar ist und dann von jedem Bestandteile besonders unter einem eigens dazu konstruierten Glaskasten, in den ich durch passende Löcher meine nackten Arme steckte, bei heller Beleuchtung jedes einzelne Stäubchen mit dem Finger oder einem Drahte oder einer etwas gefetteten Schweinsborste entfernte. Auch verdünnte Luft und die übrigen Gase schienen ebenso gut zu isolieren, doch mangelte es mir an Zeit, dies genauer zu prüfen. Erst wenn der Druck der Luft auf etwa 3''' Quecksilberdruck sank, hörte plötzlich alle Isolation auf; dann schienen also „Funken“ überzuspringen. Wasserstoff dagegen konnte ich bis auf 2''' Quecksilberdruck verdünnen, ohne daß die Isolation aufhörte, was mich wunderte, da sonst im Wasserstoff die Schlagweite größer ist. Als die Schellackklötze zwischen den Platten waren, zeigte sich nach 14 Stunden

ein Ausschlag von 45 Skalenteilen, also auch reiner Schellack leitet bei so kleiner Oberfläche nicht merklich. Diese große, von mir beobachtete Isolationsfähigkeit der Gase scheint zu beweisen, daß der von Coulomb, Riess, Warburg u. a. beobachtete Elektrizitätsverlust von Drehwagen nicht den darin befindlichen Gasen zuzuschreiben ist.¹⁾ Ich überzeugte mich ferner, daß die Platten d und e auch sonst isoliert waren, sowie daß die Zuleitungsdrähte und die Elemente isoliert waren.

9. *Manipulation bei Beobachtung der Dielektrizitätskonstante der Gase.* Um diese Beobachtung auszuführen, waren wieder zuerst die beiden Messingbleche r und s und der Draht m gesenkt. Es wurde zuerst das Messingblech r und der Draht m gehoben. Dann ließ man das Gas ausströmen und senkte, wenn die Ausströmung vollendet war, wieder das Messingblech r , nicht aber den Draht m . Der Ausschlag, den jetzt das Elektrometer zeigt, ist der Anschlag α der Formel (3). Der Theorie nach ist es vollkommen gleichgültig, ob während des Ausströmens des Gases das Elektrometer schon mit der Platte d verbunden (also von der Erde getrennt), oder ob es während des Ausströmens noch mit der Erde verbunden und von der Platte d getrennt ist und erst zum Schlusse damit verbunden wird. Praktisch erschien mir die letztere Methode empfehlenswerter. Nachdem die abgelenkte Lage des Elektrometers aus drei Umkehrpunkten bestimmt war, senkte ich den Draht m und bestimmte die Ruhelage wieder aus drei Umkehrpunkten. Den Inbegriff aller dieser Operationen nenne ich einen Versuch. Nun wurde abermals Blech und Draht m gehoben und ich ließ wieder Gas einströmen. Nach Beendigung der Einströmung wurde wieder der Ausschlag α wie früher bestimmt, womit dann der zweite Versuch beendet war usw. Die Formel (3) zeigt zunächst, daß die Quotienten, die man erhält, wenn man α dividiert durch die Druckzunahme oder Abnahme $b_1 - b_2$, die dem Versuche vorherging, konstant sein müssen. Denn die Ladung der Leydnerflasche und damit β blieb sehr konstant. In der Tat war $\alpha / (b_1 - b_2)$ innerhalb der Grenzen der

¹⁾ Von dem letzteren erhielt ich übrigens, ohne daß er von meinen Versuchen irgend etwas wußte, unlängst einen Brief, worin er mir mitteilte, daß auch er sich überzeugt habe, daß die Gase die Elektrizität nicht merklich leiten.

Beobachtungsfehler konstant, womit also bewiesen ist, daß der Zuwachs der Dielektrizitätskonstante dem des Druckes proportional ist, was übrigens nicht anders zu erwarten war. β wurde anfangs vor und nach jeder Versuchsreihe mehrmals bestimmt; da es sich jedoch als fast ganz konstant erwies, wurde es später bloß mehr für einige Versuchsreihen gemeinsam bestimmt. In der Formel (3) wurde dann für $\alpha/(b_1 - b_2)$ der Mittelwert aller bei den einzelnen Versuchen einer Versuchsreihe gefundenen Werte dieser Größe, für β ebenfalls dessen Mittelwert eingesetzt und daraus λ berechnet. Um einen Begriff zu geben, inwieweit die einzelnen Versuche untereinander übereinstimmten, stelle ich die ausführlichen Daten der definitiven mit Luft angestellten Beobachtungsreihe in der folgenden Tabelle zusammen:

b	4α	R	$\frac{4\alpha}{b_1 - b_2}$
675	35,5	303,7	0,0525
20	33,8	304,6	0,0516
660	32,7	305,1	0,0511
12	34,4	305,3	0,0531
647	30,4	305,5	0,0479
17	33,2	306,4	0,0527
635	31,4	302,8	0,0508
10	31,3	303,2	0,0501
622	—	—	—
10	34,5	303,7	0,0564
610	30,4	304,2	0,0507
5	31,3	304,4	0,0517
600	—	—	—
10	30,1	304,9	0,0510
588	—	—	—
10	26,5	305,4	0,0459
575	24,7	305,7	0,0437
27	29,0	305,8	0,0530
565	23,3	305,9	0,0433
Mittel			0,05034

Hier ist b der Manometerstand während der Beobachtung von α . Für jedes α ist also unter b_1 der nächstvorhergehende Wert des b , unter b_2 der neben dem betreffenden α stehende zu verstehen; für das erste α ist b_1 gleich Null. Wenn man die α alle mit positiven Zeichen nimmt, sind auch die Diffe-

renzen $\pm (b_1 - b_2)$ positiv zu nehmen. Es wurde immer der vierfachen Wert des α angegeben, weil die Berechnung des vierfachen Wertes aus drei Umkehrpunkten bequemer ist als die des einfachen; die Division durch 4 geschah dadurch, daß ich auch für β dessen 4fachen Wert setzte. R ist die Ruhelage, um welche zum Schlusse jedes Versuches das Elektrometer schwankte. Nach dem sechsten Versuche war das Fernrohr ein wenig verschoben worden. Drei Beobachtungen mißglückten, da ich dabei das Messingblech r und den Draht m aus Versehen falsch gestellt hatte. Da der von mir beobachtete Ausschlag so außerordentlich klein (acht Skalenteile) war, so war eine größere Übereinstimmung der Quotienten in der letzten Vertikalreihe, die nach der Theorie konstant sein sollten, kaum zu erwarten. Ich glaube aber, daß die Nichtübereinstimmung derselben mehr noch von der Inkonstanz der Batterie als von Luftströmungen oder anderen Störungen im Elektrometer stammt. Beide Störungsursachen müssen sich übrigens aus dem Mittel sehr vieler Versuche eliminieren. β wurde viermal bestimmt; es ergab sich 4β gleich 238, 227, 238, 227, Mittel 232,5. Die Anzahl n der ladenden Daniellschen Elemente war 295. Die Substitution dieser Werte in die Formel (3) liefert für die Hälfte der Größe λ (welche ich in der Folge immer anführe, da sie sich am besten mit dem Lichtbrechungsquotienten vergleichen läßt) den Wert 0,000278. Bei der Mehrzahl der übrigen Gase zeigte sich eine erheblich größere Konstanz der Quotienten $\alpha / (b_1 - b_2)$, bei einigen eine noch geringere, je nachdem die Batterie konstanter oder weniger konstant wirkte. Bei einigen Versuchen mit Luft hatte ich eine größere Mannigfaltigkeit in den Werten von $b_1 - b_2$.

10. *Kalibrieren des Elektrometers.* Bei dieser Operation, d. h. bei Bestimmung, welchen Potentialen die verschiedenen Ausschläge desselben entsprechen, bediente ich mich der schon in der Abhandlung „Experimentelle Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Isolatoren“ (Wien. Ber. 67, Abt. II, 1873)¹⁾ beschriebenen Methode. Es zeigten sich die Ausschläge für meine gegenwärtigen Zwecke dem Potentiale genügend proportional, so daß die Anfertigung einer Korrektionstabelle sich

1) Die Sammlung Nr. 24.

als überflüssig erwies. Da ein Daniellsches Element schon einen zu großen Ausschlag gab, suchte ich mir konstante Elemente von kleinerer elektromotorischer Kraft zu verschaffen; ich verwendete Zinkeisen- und Eisenkupferelemente, wobei jedes Metall immer in die Lösung seines schwefelsauren Salzes in Wasser tauchte. Dabei fand ich, daß derartige Zinkeisenelemente fast genau den dritten Teil, derartige Eisenkupferelemente aber $\frac{2}{3}$ der elektromotorischen Kraft des Daniellschen Elementes haben, was mit Thomsens Bestimmungen der Verbindungswärme stimmt. Eine eingehendere Untersuchung der elektromotorischen Kraft derartiger, aus verschiedenen Metallen gebildeter Elemente schiene mir von Interesse zu sein.

11. *Zusammenstellung der Resultate.* Bei den ersten Versuchen, die ich anstellte, war die Aufstellung des Elektrometers eine ziemlich unsolide, auch war dasselbe nicht genügend vor Luftströmungen in seinem Innern verwahrt. Bei diesen Versuchen ergab sich für Luft bei fünf Versuchsreihen:

$$\frac{\lambda}{2} = 0,000288$$

257
272
289
287

Für Wasserstoff bei zwei Versuchsreihen:

$$\frac{\lambda}{2} = 0,000136$$

114

Bei den beiden letzten mit Luft angestellten Versuchsreihen wurde die Platte *e* nicht von oben getragen, sondern ruhte durch Schellackstücke getrennt auf der Platte *d*. Der Wert des λ ist nicht merklich verschieden; doch ist er ein wenig größer, was möglicherweise darin seine Ursache hat, daß sich bei Verminderung des Druckes die Schellackstützen ausdehnten und daher die Kapazität des Kondensators nicht bloß infolge der Verminderung der Dielektrizitätskonstante der Luft, sondern auch infolge der Vergrößerung der Plattendistanz wuchs. Wird die Platte *e* von oben getragen, so ist eher eine Verkleinerung der Plattendistanz bei Abnahme des Druckes wahrscheinlich, da sich Schellack mehr als Messing ausdehnen dürfte. Nun erst schritt ich zu den definitiven Versuchen.

Die Werte von $\lambda/2$, die sich dabei für die verschiedenen Gase ergaben, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Daneben stehen unter der mit μ überschriebenen Rubrik die Zunahmen, welche der Brechungsquotient des betreffenden Gases durch eine Druckvermehrung von 760 mm erleidet und welche nach der Maxwell'schen Theorie gleich $\lambda/2$ sein müssen. Die Werte von $\lambda/2$ wurden bei Temperaturen beobachtet, die zwischen 15 und 17° C. lagen. Ich habe deshalb die Größen μ für 16° C. berechnet und zwar aus den von Dulong ausgeführten Bestimmungen der Lichtbrechungsquotienten von Gasen.

	$\frac{\lambda}{2}$	μ
Luft	0,000 279	0,000 278
Kohlensäure	0,000 446	0,000 424
Wasserstoff	0,000 125	0,000 130
Kohlenoxyd	0,000 325	0,000 321
Stickoxydul	0,000 469	0,000 475
Ölbild. Gas	{ 0,000 604	0,000 641
	{ 0,000 633	
Sumpfgas	0,000 445	0,000 419

Nimmt man an, daß die Proportionalität des Zuwachses der Dielektrizitätskonstante mit dem des Druckes bis zur absoluten Evakuierung gelte, so ist, wie bereits bemerkt, $1 + \lambda$ die Dielektrizitätskonstante des Gases bei 760 mm Quecksilberdruck, wenn die des luftleeren Raumes gleich eins gesetzt wird; daher $1 + \lambda/2$ ihre Quadratwurzel. λ sei bei der Temperatur t bestimmt worden; α sei der bekannte Ausdehnungskoeffizient der Gase, also $\alpha = 0,00366$. Setzt man noch voraus, daß sich diese Quadratwurzel in derselben Weise mit der Temperatur verändert, wie der Lichtbrechungsquotient, mit dem sie ja nach Maxwell's Theorie identisch ist, so ist $1 + \lambda(1 + \alpha t)/2$ die Quadratwurzel der Dielektrizitätskonstante des Gases bei 0° C. und 760 mm Druck, wieder die des Vakuums gleich eins gesetzt. Letztere Dielektrizitätskonstante soll mit $D_{0,760}$ bezeichnet werden. Ich lasse hier eine Zusammenstellung der Werte von $\sqrt{D_{0,760}}$, wie sie sich unter diesen Voraussetzungen aus den Werten des λ der vorigen Tabelle ergeben, mit den Lichtbrechungsquotienten $i_{0,760}$ bei 0° C. unter 760 mm Druck folgen.

	$\sqrt{D_{0,760}}$	$\epsilon_{0,760}$
Luft	1,000 295	1,000 294
Kohlensäure . . .	1,000 473	1,000 449
Wasserstoff . . .	1,000 132	1,000 138
Kohlenoxyd . . .	1,000 345	1,000 340
Stickoxydul . . .	1,000 497	1,000 503
Ölbild. Gas . . .	1,000 656	1,000 678
Sumpfgas	1,000 472	1,000 443

12. Einige ältere Versuche über die dielektrische Fernwirkung.

Ich erwähne schließlich einige noch in Graz angestellte Versuche über die dielektrische Fernwirkung. Ich selbst stellte noch einige Versuche mit Paraffinkugeln an. Die Methode war genau die in meiner Abhandlung „Über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper“ (dieser Band Nr. 25) beschriebene. Auch die Größe der Paraffinkugeln war dieselbe. Doch war mit besonderer Sorgfalt darauf gesehen, daß dieselben möglichst genau die Kugelgestalt hatten. Die Abweichungen der Längen der verschiedenen Durchmesser wurden mit einem Mikroskope mit Okularmikrometer gemessen und die Rechnung ergab, daß, wenn die Kugel ein Ellipsoid gewesen wäre, dessen verschiedene Durchmesser dieselben Abweichungen gehabt hätten und dies Ellipsoid bei Berechnung der dielektrischen Fernwirkung als Kugel von gleichem Volumen in Rechnung gezogen worden wäre, dies keinen bemerkbaren Fehler veranlaßt hätte. Die beiden wirkenden Kugeln wurden alternierend geladen, wobei sie aber mit zwei Quadranten eines Kirchhoffschen Elektrometers verbunden waren; der bewegliche Teil (Wagbalken) dieses Elektrometers war nicht aus Aluminiumdraht, sondern aus einer halbleitenden Substanz (Pappe), so daß die alternierende Ladung auf ihn nicht wirkte, wohl aber mußte er durch den etwaigen Überschuß einer Elektrizität abgelenkt werden. Mittels dieser Vorrichtung wurde konstatiert, daß auch jener Überschuß keinen schädlichen Einfluß auf das Resultat haben konnte. Drei Versuchsreihen ergaben für die in der zitierten Abhandlung mit E bezeichnete Größe die Werte: 3,267, 3,213, 3,220, Mittel 3,233, woraus sich die Dielektrizitätskonstante des Paraffins gleich 2,343 ergibt.

Außerdem untersuchten die Herren Romich und Fajdiga, stud. phil. an der Grazer Universität, die dielektrische

Anziehung von Schwefelkugeln, die mit einer dünnen Harz- oder Paraffinschicht überzogen waren und von Paraffinkugeln, die mit einer Harzschicht bekleidet waren. Wenn die Schicht nicht zu dick war, so war die dielektrische Anziehung dieselbe, als ob jene Schicht nicht vorhanden gewesen wäre. Endlich untersuchten die genannten Herren noch vier Kugeln aus Kalkspat, Glas, Flußspat und Quarz. Die Dielektrizitätskonstanten dieser Substanzen stimmten nicht mit der Maxwellschen Theorie, sondern lagen zwischen 5 und 8. Bei allen diesen Substanzen zeigte sich jedoch eine Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Zeit der Einwirkung. Da diese nun bei den dielektrischen Versuchen nicht unter $\frac{1}{500}$ Sekunde lag, bei den Lichtschwingungen aber viel kleiner als ein Billionstel Sekunde ist, so wird hieraus die Nichtübereinstimmung begreiflich.

Die ausführliche Beschreibung aller dieser Versuche wurde bisher durch meine Übersiedelung nach Wien und Mangel an Zeit sowohl von meiner Seite als auch von Seite jener Herren verzögert.

Zum Schlusse sage ich noch Herrn Professor Ludwig meinen wärmsten Dank, welcher mir in der zuvorkommendsten Weise die Arbeit dadurch erleichterte, daß er die Darstellung der zu meinen Versuchen notwendigen Gase übernahm.

Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper¹⁾ anzubringende Korrekturen.²⁾

(Wien. Ber. 70. S. 307—341. 1874.)

Der erste Teil der folgenden Abhandlung hat den Zweck, möglichst kurz alle Korrekturenformeln, welche bei diesen Versuchen zur Anwendung kommen, aus der Theorie der Dielektrizität zu entwickeln und außerdem anzugeben, wie die in meinen Versuchen angewandte Stärke der elektrischen Einwirkung in absolutem Maße gemessen werden kann; in dem zweiten Teile werde ich eine besondere, an einer Paraffinkugel angestellte Versuchsreihe beschreiben, bei welcher mit der größten Sorgfalt alle zu jenen Korrekturen erforderlichen Daten beobachtet wurden, und durch welche nachgewiesen wird, daß jene Korrekturen in der Tat bei der bisher von mir angestrebten und erreichten Genauigkeit keinen bemerkbaren Einfluß auf das Endresultat haben. (Höchstens ein paar Einheiten in der zweiten Dezimale.) Zum Schlusse stelle ich die Resultate aller meiner bisherigen Beobachtungen über dielektrische Fernwirkung übersichtlich zusammen.

Formeln.

§ 1. Berücksichtigung, daß der Radius der Kugel, auf welche gewirkt wird, nicht gegen die Entfernung der wirkenden Elektrizitätsquelle verschwindet.

Wir haben es immer mit dem Falle zu tun, daß eine elektrische Kugel auf eine andere dielektrische oder leitende aber isolierte, jedenfalls aber ursprünglich unelektrische ein-

¹⁾ Ich will meine erste Abhandlung über diesen Gegenstand (Nr. 25 dieses Bandes), welche sich im 68. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie befindet, hier immer kurz unter dem Namen „die 1. Abhandlung“ zitieren.

²⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 11. S. 172. 8. Oktober 1874.

wirkt. Die erstere Kugel nenne ich immer die wirkende, die letztere die bewegliche. Der Fall, daß die letztere leitend ist, ist ein Spezialfall des anderen, den man dadurch erhält, daß man die Dielektrizitätskonstante der beweglichen Kugel gleich Unendlich setzt. Wir werden sehen, daß alle anzubringenden Korrekturen nur klein sind; wir können daher voraussetzen, daß sich alle ohne Störung einfach superponieren. Denn die Fehler, welche durch das gleichzeitige Zusammenwirken zweier störender Ursachen hervorgerufen werden, sind jedenfalls klein zweiter Ordnung. Wir wollen daher jetzt annehmen, die auf der wirkenden Kugel befindliche Elektrizitätsmenge (in absolutem Maße gemessen) sei in deren Zentrum vereinigt und befinde sich in der Distanz p vom Zentrum der beweglichen Kugel. Die letztere habe den Radius a und die Dielektrizitätskonstante D . (D ist die von Maxwell, Phil. transact. of the Roy. Soc. of London 155, so bezeichnete Größe, also gleich $1 + 4\pi\epsilon$, nach Helmholtz, Borch. Journ. 72). Es wird gesucht die Kraft, welche die elektrische Masse e auf die Kugel in der Richtung der Verbindungslinie der Centra ausübt. Da die Formeln für die dielektrische Polarisation, solange sich die Elektrizität in Ruhe befindet, zusammenfallen mit denen der Magnetisierung weichen Eisens, so können wir einfach die Formel anwenden, welche für den Fall gilt, daß eine magnetische Masse auf eine magnetisierbare Kugel wirkt (z. B. aus Beers Einleitung in die Elektrostatik usw. S. 175). Nach Einführung unserer Bezeichnungen (D ist gleich $1/(1-\kappa)$ zu setzen, wobei κ die von Beer gebrauchte Konstante ist), geht die Formel, welche Beer für die Kraft aufstellt, die die Kugel auf die magnetische Masse ausübt, über in

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(D-1)e^2 a}{p^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n(n+1)}{nD+n+1} \left(\frac{a}{p}\right)^{2n} \\ = \frac{2(D-1)e^2 a^3}{(D+2)p^5} \left[1 + \frac{3(D+2)a^2}{(2D+3)p^2} + \dots \right]. \end{array} \right.$$

Setzt man darin $D = \infty$, so erhält man für die Anziehung der leitenden Kugel unter denselben Umständen den Wert

$$(2) \quad \frac{e^2 a}{p^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+1) \left(\frac{a}{p}\right)^{2n} = \frac{2e^2 a^3}{p^5} \left[1 + \frac{3a^2}{2p^2} + \dots \right],$$

die letztere Anziehung dividiert durch die ersten liefert also den Quotienten

$$E_s = \frac{D+2}{D-1} \cdot \left[1 - \frac{3a^2}{2(2D+3)p^2} \dots \right] = E_w \cdot \left[1 - \frac{3(E_w-1)a^2}{2(5E_w-1)p^2} \dots \right].$$

Wir haben diesen Quotienten mit E_s bezeichnet, weil es derjenige Quotient ist, den die unmittelbare Beobachtung liefern wird, also der scheinbare. Wäre dagegen die wirkende Masse sehr entfernt, so hätte der Quotient der Anziehung der dielektrischen Kugel in die der leitenden den Wert $(D+2)/(D-1)$, den ich mit E_w (wahrer Quotient) bezeichne. Die letztgefundene Formel liefert mit Vernachlässigung von kleinen Größen von der Ordnung a^4/p^4 :

$$(3) \quad E_w = E_s \cdot \left[1 + \frac{3(E-1)a^2}{2(5E+1)p^2} \right].$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist jener Faktor, mit dem man den beobachteten Wert von E noch multiplizieren muß, um den wahren Wert des E , welcher gleich $(D+2)/(D-1)$ sein soll, zu erhalten. Für meine Versuche im Winter 1873 und später war beiläufig $a = 7$ mm, $p = 49$ mm. (Der Durchmesser im Dimensionenschema soll $14\frac{1}{2}$ statt $15\frac{1}{2}$ mm lauten.)¹⁾

Jener Faktor hatte also folgende Werte:

für Schwefel	1 + 0,0031,
„ kleine krist. Schwefelkugel	1 + 0,0031,
„ große „	1 + 0,0040,
„ Paraffin	1 + 0,004,
„ Kolophonium	1 + 0,004,
„ Hartgummi	1 + 0,0031.

Die Multiplikation mit jenem Faktor kann also ohne erheblichen Fehler auch unterlassen werden.

§ 2. Wann sind die Ausschläge beider Drehwagen möglichst genau proportional?

Aus Formel (1) ist ersichtlich, daß die auf die bewegliche Kugel wirkende Kraft, wenn man nur das weitaus größte erste Glied der Reihe berücksichtigt, der 5. Potenz von p

¹⁾ In dieser Ausgabe bereits korrigiert.

verkehrt proportional ist, wodurch die Ableitungsweise der in § 12 meiner ersten Abhandlung besprochenen Korrekursionsformel gerechtfertigt ist. Ich will hier noch besprechen, wie die Dimensionen gewählt werden müssen, damit bei verschiedener Elektrisierung der wirkenden Kugeln die Ausschläge beider Drehwagen einander möglichst proportional seien.

Bei der zweiten Drehwage ist die bewegliche Kugel (mit dem Radius a') leitend mit der Erde verbunden; auf sie wirke die elektrische Masse e' in der Distanz p' von ihrem Zentrum. Es häufe sich dabei die gesamte Elektrizitätsmenge $-\varepsilon$ auf der beweglichen Kugel auf; da in ihrem Innern das Potential gleich Null sein muß, so muß, wenn man p groß annimmt, $e'/p' = \varepsilon/a'$ sein. Die Kraft, mit welcher die Elektrizitätsmengen e' und $-\varepsilon$ anziehend aufeinander wirken, also die Kraft, welche auf die bewegliche Kugel der zweiten Drehwage wirkt, ist

$$(4) \quad \frac{e' \varepsilon}{p'^2} = \frac{e'^2 a'}{p'^3}.$$

Sei φ der Winkelausschlag der ersten, φ' der der zweiten Drehwage, ferner h der Hebelarm FG (Fig. 2 meiner ersten Abhandlung) der ersten, h' der der zweiten Drehwage (PQ , Fig. 3 derselben Abhandlung), so verschiebt sich die bewegliche Kugel der ersten Drehwage um $h\varphi$, die der zweiten um $h'\varphi'$. Auf die bewegliche Kugel der ersten Drehwage wirkt also nach Formel (1) dieser Abhandlung, wenn man darin nur das erste Glied beibehält, die Kraft

$$\frac{2(D-1)e^2 a^3}{(D+2)(p-h\varphi)^5} = \frac{2(D-1)e^2 a^3}{(D+2)p^5} \left(1 + \frac{5h\varphi}{p}\right).$$

Das Moment, welches dem Moment dieser Kraft das Gleichgewicht hält, ist proportional dem Torsionswinkel, also etwa $= k\varphi$.

Man hat also für die erste Drehwage

$$(5) \quad k\varphi = \frac{2(D-1)e^2 a^3 h}{(D+2)p^5} \left(1 + \frac{5h\varphi}{p}\right).$$

Freilich ist dabei außer acht gelassen, daß die Biflarkraft auch nicht genau dem Torsionswinkel proportional ist, und daß die elektrische Kraft nach geschehener Ablenkung nicht mehr genau senkrecht auf dem Hebelarme steht. Wenn ursprünglich die Verbindungslinie der wirkenden elektrischen

Masse mit dem Zentrum der beweglichen Kugel senkrecht auf dem Hebelarme stand, so verursacht letzteres nur einen Fehler, der sich zum Resultat wie $1 - \cos \varphi : 1$ verhält, und darf daher, sowie auch die erstere Fehlerquelle vernachlässigt werden. Analog der Formel (5) erhält man für die zweite Drehwaage

$$(6) \quad k' \varphi' = \frac{e'^2 \alpha' h'}{p'^3} \left(1 + \frac{3 h' \varphi'}{p'} \right).$$

Werden beide wirkenden Kugeln mit dem Potential v geladen, so ist e und e' proportional v ; etwa $e = b v$, $e' = b' v$, wenn b und b' die Radien der wirkenden Kugeln sind. Aus den Formeln (5) und (6) folgt mit Rücksicht hierauf

$$(7) \quad \varphi = \frac{M v^2}{k - \frac{5 M h v^2}{p}}, \quad \varphi' = \frac{M' v^2}{k' - \frac{3 M' h' v^2}{p'}}$$

wobei

$$M = \frac{2(D-1) b^2 \alpha^3 h}{(D+2) p^5}, \quad M' = \frac{b'^2 \alpha' h'}{p'^3}.$$

Es ist also

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{M}{M'} \frac{k' - \frac{3 M' h' v^2}{p'}}{k - \frac{5 M h v^2}{p}}.$$

Die negativen Glieder im Zähler und Nenner der rechten Seite sind klein. In denselben kann man daher M und M' statt aus den Gleichungen (7) aus folgenden berechnen:

$$(8) \quad \varphi = \frac{M v^2}{k}, \quad \varphi' = \frac{M' v^2}{k'},$$

und erhält dann

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{M k'}{M' k} \cdot \frac{1 - \frac{3 h' \varphi'}{p'}}{1 - \frac{5 h \varphi}{p}} = \frac{M k'}{M' k} \cdot \left[1 - \frac{3 h' \varphi'}{p'} + \frac{5 h \varphi}{p} \right].$$

Der erste Faktor rechts ist unabhängig von der Stärke der Ladung. Die beiden letzten Glieder in der eckigen Klammer sind jedes proportional dem Quadrate der Ladung. Soll daher φ'/φ mit variierender Ladung nur um kleine Größen höherer Ordnung variieren, so muß

$$(9) \quad \frac{3 h' \varphi'}{p'} = \frac{5 h \varphi}{p}$$

sein. Dies könnte bei der dielektrischen und Metallkugel nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn die erstere viel größer wäre, so daß bei gleichem φ' auch φ für beide gleich ausfiele. In Wirklichkeit wird sich diese Relation nur in ziemlich roher Annäherung erfüllen lassen.

Da man über φ und φ' nicht von vornherein verfügen kann, so ist es besser, statt derselben die Trägheitsmomente T und T' der zwei Drehwagen einzuführen. Ist τ die beiden gemeinsame Dauer einer ganzen Schwingung, so hat man

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{T}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{T'}{k'}},$$

daher $Tk' = T'k$. Berücksichtigt man dies in Gleichung (9) und drückt φ und φ' durch die Gleichungen (8) aus und substituiert schließlich für M und M' ihre Werte, so ergibt sich

$$(10) \quad \frac{10(D-1)}{3(D+2)} \frac{b^2 a^3 p'^4}{p^5 b'^2 a'} \frac{T' h^2}{T h'^2} = 1.$$

Soll die Bedingung erfüllt sein, wenn eine leitende Kugel in die erste Drehwage eingehängt ist, so muß man $D = \infty$ setzen.

§ 3. Berechnung der bei meinen Versuchen wirksamen Kraft in absolutem Maße.

k und k' können leicht aus den Gleichungen

$$k = \frac{4\pi^2 T}{\tau^2}, \quad k' = \frac{4\pi^2 T'}{\tau^2}$$

in absolutem Maße berechnet werden. Für die erste Drehwage liefert die Formel (5) unter Vernachlässigung des zweiten Gliedes

$$e^2 = \frac{(D+2)p^5 \cdot 2\pi^2 T \varphi}{(D-1)a^3 h \tau^2}.$$

Bezeichnet A den einfachen Ausschlag (die Anzahl der Millimeter, welche am Fadenkreuz vorbeigehen mußten, damit die Skala aus der Ruhelage in die abgelenkte kam) und d die Distanz der Fernrohre von den Spiegeln, so ist $\varphi = A/2d$, daher

$$(11) \quad e^2 = \frac{\pi^2 (D+2) p^5 T A}{(D-1) a^3 h \tau^2 d} = \frac{\pi^2 E p^5 T A}{a^3 h \tau^2 d},$$

also sobald die leitende Kugel eingehängt ist,

$$(12) \quad e^2 = \frac{\pi^2 p^5 T A}{a^3 h \tau^2 d}.$$

Die Kraft, welche im Innern der dielektrischen Kugel wirksam ist, wird leicht in folgender Weise in absolutem Maße bestimmt. Sei α das elektrische Moment der Volumeinheit der Kugel. Dann übt dieselbe auf eine im Innern befindliche elektrische Masse die Kraft $-(4\pi\alpha/3)$ aus. Die elektrische Masse e aber übt, wenn sie weit entfernt ist, die Kraft e/p^2 aus. Nach der Grundgleichung der Dielektrizität (vgl. Helmholtz, Borchh. Journ. 72) ist das elektrische Moment der Volumeinheit gleich der mit der Konstante ε multiplizierten gesamten Kraft, also

$$\alpha = \varepsilon \left(\frac{e}{p^2} - \frac{4\pi\alpha}{3} \right),$$

woraus

$$\alpha = \frac{\frac{\varepsilon e}{p^2}}{1 + \frac{4\pi\varepsilon}{3}} = \frac{3}{4\pi} \frac{D-1}{D+2} \frac{e}{p^2}.$$

Die auf eine im Innern der Kugel befindliche elektrische Masse 1 wirkende Gesamtkraft aber ist

$$(13) \quad \frac{3}{D+2} \frac{e}{p^2} = \frac{E'-1}{E} \cdot \frac{e}{p^2}.$$

Für die zweite Drehwage würde man erhalten:

$$(14) \quad e'^2 = \frac{p'^3}{a' h'} \frac{2\pi^2 T'}{\tau'^2} \frac{A'}{d'}.$$

Das Potential im Innern der wirkenden Kugel ist für die erste Drehwage e/b , für die zweite e'/b' . Es muß also $e/b = e'/b'$ sein.

Bei den im Sommer 1872 angestellten Versuchen war

$$T = 44900 \text{ mm}^2 \times \text{Gramm (Masse).}$$

$$\tau = 22\frac{1}{2} \text{ Sek.}$$

$$p = 62 \text{ mm, } a = 7,3 \text{ mm, } h = 67 \text{ mm, } b = 20\frac{1}{2} \text{ mm.}$$

$$T' = 1,450000 \text{ mm}^2 \times \text{Gramm.}$$

$$p' = 67 \text{ mm, } a' = 8 \text{ mm, } h' = 212 \text{ mm, } b' = 8 \text{ mm.}$$

$$d = d' = 2200 \text{ mm.}$$

Bei den in Tabelle III meiner ersten Abhandlung zusammengestellten, bei der Schlagweite 1,3 mm an Paraffin an-

gestellten Versuchen war A etwa gleich 17 mm, $E = 1,3$, woraus sich e etwa

$$= 520 \frac{\text{mm}^{3/2} \times \text{Gramm}^{1/2} (\text{Masse})}{\text{Sek.}}$$

ergibt. Im Innern der Paraffinkugel wirkte auf die Elektrizitätsmenge 1 die Kraft

$$0,03 \frac{\text{Gramm} \times \text{mm}}{\text{Sek.}^2},$$

wobei Elektrizitätsmenge 1 diejenige ist, die in Luft einer gleichen, in der Distanz 1 mm an die Masse eines Gramms gehefteten, in der Sekunde die Beschleunigung eines Millimeters erteilt.

Bei anderen Schlagweiten verhalten sich diese Kräfte wie die Quadratwurzeln der Ausschläge.

Bei der Schwefelkugel (Schlagweite 1,3 mm) ist diese Kraft 0,08. Das Potential, mit dem die wirkenden Kugeln geladen waren, erhält man, wenn man e durch den Radius der wirkenden Kugel dividiert. Es war also

$$\frac{520}{20^{1/2}} = 25 \frac{\text{Gramm}^{1/2} \times \text{mm}^{1/2}}{\text{Sek.}}$$

Aus dem Ausschlage der zweiten Drehwage ergibt sich nach Formel (14) für dieses Potential der Wert

$$30 \frac{\text{Gramm}^{1/2} \text{mm}^{1/2}}{\text{Sek.}}$$

Da sich die Elektrizität bei meinen Versuchen immer auf zwei nahe gleiche Leydnerflaschen verteilte, so ist die Potentialdifferenz, welche einen Funken von 1,3 mm Länge erzeugte, etwa doppelt so groß. Doch beanspruchen diese Angaben über absolute Werte nur die Bestimmung der Größenordnung der bei mir wirksamen Kräfte. Um eine numerische Genauigkeit zu erzielen, hätte der Apparat ganz anders eingerichtet werden müssen, was ich unterließ, da absolute Maßbestimmung nicht der Zweck meiner Untersuchung war.

Bei meinen ersten, mit der großen aus einem Schwefelkristall geschliffenen Kugel angestellten Versuchen (vgl. diesen Band der Sitzungsber. Tab. I)¹⁾ war, wenn ich die an der

¹⁾ Vgl. Nr. 28 dieses Bandes.

Metallkugel angestellten Beobachtungen der Rechnung zugrunde lege,

$$\begin{aligned} T &= 37953 \text{ Gramm (Masse) mm}^2, \\ p &= 49 \text{ mm}, \quad a = 7,3 \text{ mm}, \quad h = 40,8 \text{ mm}, \quad b = 20\frac{1}{2} \text{ mm}, \\ T' &= 670,000, \quad p' = 82 \text{ mm}, \\ a' &= 12,9 \text{ mm}, \quad h' = 84 \text{ mm}, \quad b' = 8 \text{ mm}, \\ d = d' &= 2300 \text{ mm}, \quad \tau = \tau' = 25 \text{ Sek.}, \quad A = 49 \text{ mm}, \end{aligned}$$

woraus man für die erste Drehwage findet

$$e = 518 \frac{\text{mm}^{3/2} \text{Gramm}^{1/2}}{\text{Sek.}}$$

Das Potential im Innern der wirkenden Kugeln war

$$= \frac{518}{20,5} = 25 \frac{\text{mm}^{1/2} \text{Gramm}^{1/2}}{\text{Sek.}};$$

für die zweite Drehwage erhält man dieses Potential gleich 30.

Die bei gleicher Ladung der wirkenden Kugel auf die Elektrizitätseinheit im Innern der Schwefelkugel wirkende Kraft aber ist, wenn die Wirkung parallel der Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achsen geschieht, 0,11, wenn dagegen parallel der des stumpfen, 0,091.

Um diese Kräfte mit denen zu vergleichen, welche bei meinen Kondensatorversuchen (vgl. Sitzungsber. d. Wiener Akad. 67)¹⁾ im Innern des Dielektrikums auf die Dielektrizitätsmenge 1 wirkten, können folgende Betrachtungen dienen. Nach Thomson (Phil. mag. 4. ser., 20, oder Papers on electrostatic S. 246) üben zwei Metallplatten von 1 □' Oberfläche in $\frac{1}{100}$ ' Entfernung eine Kraft von dem Gewichte von 55 Grain aufeinander aus, wenn eine zur Erde abgeleitet, die andere mit einem Pole einer Batterie von 1000 Daniell verbunden ist, deren anderer Pol ebenfalls zur Erde abgeleitet ist.

Sei v das Potential auf der nicht abgeleiteten Platte, q deren Flächeninhalt, d die Plattendistanz, so ist die Flächen-dichte der darauf angesammelten Elektrizität gleich

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dN_a} - \frac{dV}{dN_i} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{v}{d},$$

da

$$\frac{dV}{dN_a} = \frac{v}{d}, \quad \frac{dV}{dN_i} = 0$$

¹⁾ Vgl. Nr. 24 dieses Bandes.

ist. Die gesamte auf einer Platte befindliche Elektrizität ist also

$$e = \frac{1}{4\pi} \frac{vq}{d}.$$

Die Kraft, welche auf eine elektrische Masse ε , die sich zwischen den Platten befindet, normal zur Platte wirkt, ist $\varepsilon \frac{dV}{dN_a}$, und zwar geht die Hälfte dieser Kraft von der Elektrizität aus, die sich auf der einen Platte befindet, die andere Hälfte von der auf der anderen. Darauf folgt, daß die Kraft, welche die Elektrizität der einen Platte auf die der anderen ausübt, den Wert

$$\frac{e}{2} \frac{dV}{dN_a} = \frac{1}{8\pi} \frac{v^2 q}{d^2}$$

hat, wie man übrigens auch leicht durch direkte Berechnung der Anziehung einer unendlichen Scheibe auf einen Punkt findet, woraus folgt

$$(15) \quad v^2 = \frac{8\pi k d^2}{q}.$$

Nun war bei Thomson

$$\frac{d^2}{q} = \frac{1}{10000},$$

k gleich dem Gewichte von 55 Grain, gleich dem Gewichte von $\frac{55,3}{15,432} = 3,57$ g (nach späteren Beobachtungen beträgt dieses Gewicht 5,7 g; — ich will die Zahlen, bei deren Berechnung diese letztere Zahl zugrunde gelegt ist, in einer Klammer beifügen), also in unseren Maßen

$$k = 3,564 \times 9810 \frac{\text{Gramm (Masse)} \times \text{mm}}{\text{Sek.}^2}.$$

Die Formel (15) liefert also

$$v = 9,4(11,9) \frac{\text{Gramm}^{1/2} \text{mm}^{1/2}}{\text{Sek.}}.$$

Das Potential am Pole eines Daniellschen Elementes ist also, wenn der andere zur Erde abgeleitet ist,

$$0,0094(0,0119) \frac{\text{Gramm}^{1/2} (\text{Masse}) \text{mm}^{1/2}}{\text{Sek.}}.$$

Branly (Compt. rend. S. 431. 1872) findet für dieses Potential den Wert

$$0,00039 \frac{\text{Milligramm}^{1/2}}{\text{mm}^{1/2}} \text{Gewicht} = 0,00104 \frac{\text{mm}^{1/2} \text{Gramm}^{1/2} \text{Masse}}{\text{Sek.}}.$$

Nach Thomson sind 5500 Daniell notwendig, um einen Funken von $\frac{1}{20}'' = 1,27 \text{ mm}$ Länge zu erzeugen. Dieselben liefern nach dem obigen die Potentialdifferenz

$$42 (53) \frac{\text{Gramm}^{1/2} \text{ mm}^{3/2}}{\text{Sek.}}$$

Eine größere Übereinstimmung mit dem von mir bei gleicher Schlagweite gefundenen Potentialwerte war nicht zu erwarten. (Bei Thomson sprang der Funke zwischen Platten, bei mir zwischen Kugeln über, wobei sich ein Teil der Elektrizität rasch in der Leydnerflasche verlor.) Doch glaube ich, daß sich bei genügender Sorgfalt mein Apparat auch zu derartigen Messungen eignen würde.

Bei meinen Messungen an der Paraffinplatte II z. B. Sitzungsber. d. Wiener Akad. 67, § 8)¹⁾ war zwischen den Kondensatorplatten außer einer Paraffinschicht von 2,3276 mm Dicke noch eine Luftschicht von 0,28 mm Dicke. Letztere entspricht einer Paraffinschicht von 0,655 mm Dicke. Die Platten luden sich also gerade so, als ob sie sich in einer Distanz von 2,98 mm befunden hätten und nur Paraffin dazwischen gewesen wäre. Die Potentialdifferenz war dabei die an den beiden Polen von 18 Daniellschen Elementen, also

$$= 0,17 (0,21) \frac{\text{Gramm}^{1/2} \text{ mm}^{3/2}}{\text{Sek.}}$$

Dividiert man durch die Distanz der Platten, also durch 2,98 mm, so erhält man den Differentialquotienten des Potentials normal zu den Platten; multipliziert man denselben mit der Elektrizitätsmenge 1, also mit

$$1 \frac{\text{Gramm}^{1/2} \text{ mm}^{3/2}}{\text{Sek.}},$$

so erhält man die Kraft, welche im Innern der Paraffinplatte auf die Elektrizitätsmenge 1 wirkte. Dieselbe war also

$$0,06 (0,07) \frac{\text{Gramm} \times \text{mm}}{\text{Sek.}^2}$$

Es war somit die auf die Elektrizitätsmenge 1 im Innern des Dielektrikums wirkende Kraft bei meinen Kondensatorversuchen nahe so groß, wie bei denen über dielektrische Fernwirkung. Daß sich bei den ersteren Versuchen keine, bei

¹⁾ Vgl. Nr. 24 dieses Bandes.

letzteren aber, wenn Paraffin und Kolophonium untersucht wurde, so bedeutende elektrische Nachwirkung zeigte, kann nicht von der verschiedenen Stärke der elektrischen Einwirkung herrühren, sondern höchstens von der Verschiedenheit des Materials oder der Art und Weise und des zeitlichen Verlaufs der Ladung, und ist mir überhaupt gegenwärtig noch etwas rätselhaft. Mit Zugrundelegung der Messungen Branlys wurde übrigens diese Zahl fast zehnmal so klein.

§ 4. Berücksichtigung, daß die auf der wirkenden Kugel befindliche Elektrizitätsmenge nicht in einem Punkte konzentriert ist.

Sei b der Radius der wirkenden Kugel, $+e$ die darauf befindliche Elektrizitätsmenge. Wir nehmen das Zentrum der wirkenden Kugel als Koordinatenanfang und ziehen die Abszissenachse gegen das Zentrum der beweglichen hin. Dann ist das elektrische Moment der Volumeinheit der beweglichen Kugel $\frac{3}{4\pi E} \frac{e}{p^2}$; das wirkliche elektrische Moment der Kugel ist also $\frac{1}{E} \frac{ea^3}{p^2}$. Dieselbe wirkt also nach außen, wie zwei elektrische Massen $-\frac{ea^3}{Ep^2\lambda} = e_1$ und $+\frac{ea^3}{Ep^2\lambda} = e_2$, von denen die erstere im Zentrum der beweglichen Kugel, die letztere aber um λ weiter von der fixen entfernt auf der Zentrallinie sich befindet. Erstere hat also die Abszisse p , letztere die Abszisse $p + \lambda$. Dieses Verfahren, die Wirkung magnetischer oder dielektrischer Körper zu bestimmen, welches meist am kürzesten zum Ziele führt, wurde zuerst von Stefan (Sitzungsbericht d. Wiener Akad. 69) angegeben. Die von der ersteren auf die wirkende Kugel induzierte Elektrizität wirkt so nach außen, wie die elektrische Masse

$$-\frac{e_1 b}{p} = \frac{ea^3}{Ep^2\lambda} \cdot \frac{b}{p} = e_3$$

mit der Abszisse (b^2/p). Die von der letzteren induzierte Elektrizitätsmenge wirkt nach außen, wie die Menge

$$-\frac{e_2 b}{p} = -\frac{ea^3}{Ep^2\lambda} \cdot \frac{b}{p + \lambda} = e_4$$

mit der Abszisse $\frac{b^2}{p+\lambda}$. Die vier Massen e_1, e_2, e_3 und e_4 erzeugen in der wirkenden Kugel zusammen das Potential Null, so daß also das Gesamtpotential in der wirkenden Kugel noch immer (e/b) ist.

Die Anziehung von e_3 auf e_1 und e_2 zusammen ist

$$\begin{aligned} -\frac{e_3 e_1}{\left(p - \frac{b^2}{p}\right)^2} - \frac{e_3 e_2}{\left(p - \frac{b^2}{p} + \lambda\right)^2} &= + \frac{2\lambda}{\left(p - \frac{b^2}{p}\right)^3} e_3 e_2 \\ &= + \frac{2 e^2 a^3 b}{E^2 p^3 \lambda \left(p - \frac{b^2}{p}\right)^3}. \end{aligned}$$

Die von e_4 auf e_1 und e_2 zusammen ist

$$\begin{aligned} -\frac{e_4 e_1}{\left(p - \frac{b^2}{p+\lambda}\right)^2} - \frac{e_4 e_2}{\left(p - \frac{b^2}{p+\lambda} + \lambda\right)^2} &= + \frac{2\lambda}{\left(p - \frac{b^2}{p+\lambda}\right)^3} e_4 e_2 \\ &= - \frac{2 e^2 a^3 b}{E^2 p^4 (p+\lambda) \lambda \left(p - \frac{b^2}{p+\lambda}\right)^3}, \end{aligned}$$

folglich ist die gesamte Anziehung der Massen e_3 und e_4 auf e_1 und e_2 :

$$(16) \quad \frac{2 e^2 a^3 b (p^2 + 2 b^2)}{E^2 p^3 (p^2 - b^2)^4}.$$

Natürlich wirken die beiden Massen e_3 und e_4 wieder induzierend auf die bewegliche Kugel.

Die elektrische Masse e_3 induziert daselbst Elektrizität, welche so nach außen wirkt, wie zwei elektrische Massen:

$$e_5 = - \frac{a^3 e_3}{E \left(p - \frac{b^2}{p}\right)^2 \lambda} = - \frac{e a^3 b}{E^2 p^3 \lambda^2 \left(p - \frac{b^2}{p}\right)^2}$$

und $e_6 = -e_5$ mit den Abszissen p und $p + \lambda$. Die Masse e_4 hingegen induziert Elektrizität, die so wirkt, wie die zwei Massen

$$e_7 = - \frac{a^3 e_4}{E \left(p - \frac{b^2}{p+\lambda}\right)^2 \lambda} = + \frac{e a^3 b}{E^2 p^2 \lambda^2 (p+\lambda) \left(p - \frac{b^2}{p+\lambda}\right)^2}$$

und $e_8 = e_7$ mit den Abszissen p und $p + \lambda$.

Wir haben also im ganzen

$$e_5 + e_7 = - \frac{e a^6 b (p^2 + b^2)}{E^2 p^5 \left(p - \frac{b}{p}\right)^3 \lambda}$$

und $e_6 + e_8 = -e_5 - e_7$ mit den Abszissen p und $p + \lambda$.

Die ursprünglich auf der wirkenden Kugel vorhandene Elektrizitätsmenge e übt auf alle diese Massen die Anziehung

$$(17) \quad \frac{2 e^2 a^5 b (p^2 + b^2)}{E^2 p^5 (p^2 - b^2)^3}$$

aus. Die gesamte Mehranziehung, welche die bewegliche Kugel infolge der Influenzierung der wirkenden erfährt, ist also die Summe von (16) und (17), hat also den Wert

$$(18) \quad \frac{2 e^2 a^6 b (2 p^4 + 2 p^2 b^2 - b^4)}{E^2 p^5 (p^2 - b^2)^4}$$

Natürlich wirken auch die elektrischen Massen $e_5 + e_7$ und $e_6 + e_8$ wieder influenzierend auf die wirkende Kugel, und die Massen e_3 und e_4 anziehend auf $e_5 + e_7$ und $e_6 + e_8$ usw., wodurch eine unendliche Reihe entsteht, deren auf das Glied (18) folgendes aber, was die Größenordnung betrifft, wieder im Verhältnisse $a^3 b/p^4$ kleiner ist, als das Glied (18). Bleiben wir bei dem Gliede (18) stehen, so ist die Anziehung der beweglichen dielektrischen Kugel

$$\frac{2 e^2 a^3}{E p^5} + \frac{2 e^2 a^5 b (2 p^4 + 2 p^2 b^2 - b^4)}{E^2 p^5 (p^2 - b^2)^4}$$

Dabei ist wohl zu bemerken, daß die auf der fixen Kugel befindliche Elektrizitätsmenge jetzt

$$e + e_3 + e_4 = e + \frac{e a^3 b}{E p^4}$$

ist. Das Potential in ihrem Innern aber ist noch immer e/b . Das gesamte elektrische Moment der beweglichen Kugel ist

$$M = \frac{e a^3}{E p^2} \left(1 + \frac{a^3 b (p^2 + b^2)}{E (p^2 + b^2)^3} \right),$$

das Potential im Innern derselben

$$\frac{M}{a^3} + \frac{e}{p + x} + \frac{e_3}{p - \frac{b^2}{p} + x} + \frac{e_4}{p - \frac{b^2}{p + \lambda} + x} = \frac{e}{p} \left(1 + \frac{a^3 b}{E (p^2 - b^2)^2} \right).$$

Hängen wir statt derselben eine Metallkugel ein, so er-

gibt sich deren Anziehung, indem man $E = 1$ setzt; sie ist also, wenn die Größe der Metallkugel dieselbe ist:

$$\frac{2 e^2 a^3}{p^5} + \frac{2 e^2 a^3 b (2 p^4 + 2 p^2 b^2 - b^4)}{p^5 (p^2 - b^2)^4}.$$

Der Quotient

$$\frac{\text{Anziehung der Metallkugel}}{\text{Anziehung der dielektr. Kugel}}$$

wird also sein:

$$(19) \quad E \left[1 + \frac{E - 1}{E} \cdot \frac{a^3 b (2 p^4 + 2 p^2 b^2 - b^4)}{(p^2 - b^2)^4} \right]$$

und man muß den beobachteten Wert von E durch den in der Klammer stehenden Ausdruck dividieren, wenn man dieser Korrektur Rechnung tragen will, d. h. wenn man denjenigen Quotienten finden will, welcher sich herausstellen würde, wenn die wirkende Kugel ein mathematischer Punkt wäre. Die Superposition der hier und der in § 1 diskutierten Korrektur wäre vollkommen unbedenklich, wenn sich nicht sowohl in dem einen, als auch in dem anderen Falle die Glieder mit den ersten Potenzen der sehr kleinen Größen tilgten, und erst die mit höheren den Ausschlag geben. Dadurch könnte man zu glauben veranlaßt werden, daß durch das gleichzeitige Zusammenwirken der in den §§ 1 und 4 diskutierten Ursachen Glieder von derselben Größenordnung erzeugt würden. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man ein, indem man b noch viel kleiner als a wählt. Setzt man zuerst $b = 0$, so erhält man die Wirkung der Kugeln in die jedenfalls konvergierende, nach Potenzen von a fortschreitende Reihe des § 1 entwickelt; in derselben Form würde auch das Potential erscheinen. Nun erst sucht man den Inbegriff der mit b multiplizierten Glieder, die wieder eine nach Potenzen von a fortschreitende Reihe bilden. Das mit der niedrigsten Potenz von a behaftete findet man, indem man die verteilende Wirkung des mit der niedrigsten Potenz von a behafteten Gliedes der Potentialreihe auf die wirkende Kugel aufsucht; es ist also das in § 4 entwickelte. Sowohl durch Betrachtung der späteren Glieder der Potentialreihe, als auch durch Fortsetzung der unmittelbar nach Entwicklung der Formel (18) angedeuteten Operationen erhält man lauter Glieder mit höheren Potenzen von a als der

sechsten. Dasselbe findet man aber auch direkt, indem man b gar nicht als klein ansieht, und nur nach Potenzen von a entwickelt. Die Anziehung zweier leitender Kugeln finde ich dann gleich

$$\frac{2e^2a^3}{p^5} \left[1 + \frac{3a^2}{2p^2} + \frac{a^3b(2p^4 + 2p^2b^2 - b^4)}{(p^2 - b^2)^4} + \frac{2a^4}{p^4} + \dots \right],$$

also in Übereinstimmung mit der Superposition der Resultate der §§ 1 und 4.

Bei den von mir im Winter 1873 und später angestellten Versuchen war etwa $p = 49$ mm, $b = 20\frac{1}{2}$ mm, $a = 7,3$ mm, daher hatte der in der Klammer stehende Ausdruck den Wert

$$1 + 0,0067 \frac{E - 1}{E}.$$

Die Division durch diesen Ausdruck würde also nicht einmal die zweite Dezimalstelle um eine Einheit vermindern. Infolge der Einwirkung der mit Stanniol überzogenen Kastenwände war das Feld wahrscheinlich noch homogener, daher die anzubringende Korrektur noch geringer. Ich habe deshalb auch das Anbringen dieser, sowie der in § 1 angegebenen Korrektur lieber ganz unterlassen, und mein Zweck hier war nicht so sehr, dieselben numerisch zu bestimmen, als vielmehr ihre verschwindende Kleinheit darzutun. Bei der größeren, aus Schwefelkristall geschliffenen Kugel, sowie bei den von Romich und Nowak untersuchten Kristallkugeln war der Radius der isolierenden Kugel erheblich größer als der der Metallkugel, und daher der Betrag dieser Korrektur noch geringer.

§ 5. Berechnung der dielektrischen Anziehung auf Ellipsoide.

Um zunächst eine beiläufige Vorstellung zu erhalten, welchen Einfluß die Abweichungen der beweglichen Kugel von der Kugelgestalt auf das Endresultat haben, wollen wir zunächst einen einfachen Fall betrachten, der sich leicht der Rechnung unterziehen läßt, nämlich, daß der in der ersten Drehwage eingehängte Körper, den wir bisher die bewegliche Kugel genannt haben, ein Rotationsellipsoid ist und die Wirkung parallel oder senkrecht zur Rotationsachse stattfindet. Einst-

weilen soll nicht vorausgesetzt werden, daß die Achsen des Ellipsoids nahe gleich sind; doch soll die wirkende Kugel so weit entfernt vorausgesetzt werden, daß bei Berechnung der Dielektrisierung des Ellipsoids das Feld als homogen betrachtet werden darf. Ich benütze als die kürzeste wieder die bereits erwähnte Stefansche Methode. Ein beliebiges mit Masse von der Dichte ρ gleichförmig erfülltes Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c , erstere parallel der Abszissenachse, übt auf eine Masseneinheit, die sich im Punkte x, y, z befindet, wenn sich dieser Punkt im Innern des Ellipsoids befindet, in der Richtung der Abszissenachse die Kraft

$$X_1 = -4\pi\rho b c x \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)(a^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta)}}$$

aus. Die Masseneinheit ist dabei so gewählt, daß zwei Masseneinheiten in der Distanz 1 die Kraft 1 aufeinander ausüben; die Kraft zweier Massenpunkte ist verkehrt proportional dem Quadrate ihrer Distanz. Ist über dieses Ellipsoid noch ein zweites gelagert, das sich von dem ersten nur dadurch unterscheidet, daß es um das sehr kleine Stück λ in der Richtung der negativen Abszissenachse verschoben ist, und mit Masse von der Dichte $-\rho$ erfüllt ist, so übt dieses letztere auf die Masseneinheit im Punkte x, y, z in der Richtung der Abszissenachse die Kraft

$$X_2 = 4\pi\rho b c (x - \lambda) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)(a^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta)}}$$

aus. Beide zusammen wirken gerade so, wie ein dielektrisch polarisiertes Ellipsoid von derselben Gestalt, das in der Volumeneinheit das elektrische Moment $\rho\lambda = \sigma$ besitzt. Letzteres übt also auf die Masseneinheit im Punkte x, y, z die Kraft $X_1 + X_2$ aus. Befindet sich nun dieses Ellipsoid in einem homogenen elektrischen Felde, in dem auf eine elektrische Masseneinheit von außen nur in der Richtung der Abszissenachse eine Kraft von der Intensität A wirkt, so ist die gesamte, im Ellipsoid auf die Elektrizitätseinheit wirkende Kraft nach der Abszissenachse gerichtet, und hat die Stärke $A + X_1 + X_2$. Soll die angenommene Dielektrisierung durch jene von außen wirkende

Kraft induziert worden sein, so muß nach der Theorie der Dielektrizität $\sigma = \varepsilon(A + X_1 + X_2)$ sein, woraus sich ergibt

$$(20) \quad \sigma = \frac{\varepsilon A}{1 + 4\pi \varepsilon b c \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)(a^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta)}}$$

Wirken auch in der Richtung der übrigen Halbachsen elektrische Kräfte, so werden auch in jenen Richtungen elektrische Momente induziert, die durch ganz analoge Formeln gegeben werden und sich superponieren. Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so verwandeln sich die elliptischen Transzendenten in gewöhnliche. Wenn die Rotationsachse mit der Elektrisierungsrichtung zusammenfällt, hat man zu setzen $b = c$ und erhält für das abgeplattete Rotationsellipsoid, also für $b > a$

$$(21) \quad \sigma = \frac{\varepsilon A}{1 + \frac{4\pi \varepsilon b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right]}$$

für das verlängerte Rotationsellipsoid, also für $b < a$ aber

$$(22) \quad \sigma = \frac{\varepsilon A}{1 - \frac{4\pi \varepsilon b^2}{a^2 - b^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{lognat} \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right]}$$

Geschieht dagegen die Wirkung senkrecht zur Rotationsachse, so hat man zu setzen $a = c$ und findet für das abgeplattete Rotationsellipsoid, also für $a > b$

$$(23) \quad \sigma = \frac{\varepsilon A}{1 + \frac{2\pi \varepsilon b}{a^2 - b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} - b \right]}$$

und für das verlängerte Rotationsellipsoid, also für $a < b$

$$(24) \quad \sigma = \frac{\varepsilon A}{1 + \frac{2\pi \varepsilon b}{b^2 - a^2} \left[b - \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{lognat} b + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right]}$$

Geht die Kraft von einer in der Distanz p vom Zentrum des Ellipsoids auf der Abszissenachse befindlichen elektrischen Masse e aus, so ist $A = e/p^2$ zu setzen, und es handelt sich noch um die anziehende Kraft, welche ein in dieser Weise dielektrisiertes Rotationsellipsoid auf jene Masse ausübt. Die-

selbe ist, wenn die Wirkung in der Richtung der Rotationsachse geschieht, und mit v das Volum des Ellipsoids bezeichnet wird, für das abgeplattete Ellipsoid, also für $b > a$

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & 3 \frac{v \sigma e}{(b^2 - a^2)^{3/2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{p} - \frac{p \sqrt{b^2 - a^2}}{p^2 + b^2 - a^2} \right] \\ &= \frac{3 v \varepsilon e^2}{p^2 (a^2 - b^2)^{3/2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{p} - \frac{p \sqrt{b^2 - a^2}}{p^2 + b^2 - a^2} \right] \\ & \quad 1 + \frac{4 \pi \varepsilon b^2}{b^2 + a^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right] \end{aligned} \right.$$

dagegen für das verlängerte, also $a > b$

$$(26) \frac{3 v \varepsilon e^2}{p^2 (a^2 - b^2)^{3/2}} \left[\frac{p \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{p^2 - a^2 + b^2}} - \operatorname{lognat} \frac{p + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{p^2 - a^2 + b^2}} \right] \\ 1 - \frac{4 \pi \varepsilon b^2}{a^2 - b^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{lognat} \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right]$$

Geschieht dagegen die Wirkung senkrecht zur Rotationsachse, so hat man für das abgeplattete Rotationsellipsoid, also $a > b$

$$(27) \frac{3 v \varepsilon e^2}{2 p^2 (b^2 - a^2)^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot (p^2 + a^2 - b^2)}{p^2 \sqrt{p^2 - a^2 + b^2}} - \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{p} \right] \\ 1 + \frac{2 \pi \varepsilon b}{a^2 - b^2} \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} - b \right]$$

dagegen für das verlängerte Rotationsellipsoid, also für $a < b$

$$(28) \frac{3 v \varepsilon e^2}{2 p^2 (b^2 - a^2)^{3/2}} \left[\operatorname{lognat} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{p^2 + b^2 - a^2}}{p} \right) - \frac{\sqrt{b^2 - a^2} (p^2 - b^2 + a^2)}{p^2 \sqrt{p^2 + b^2 - a^2}} \right] \\ 1 + \frac{2 \pi \varepsilon b}{b^2 - a^2} \left[b - \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{lognat} \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right]$$

Man könnte in gewissen Fällen erwarten, es sei besser, statt der von mir angewandten Kugeln Ellipsoide in die erste Drehwage einzuhängen (besonders bei großen Dielektrizitätskonstanten lang gestreckte), deren Orientierung jedoch sehr genau sein müßte.

Da in diesen Formeln die Exzentrizität des Ellipsoids nicht klein vorausgesetzt ist, so können sie die Frage entscheiden, um wievielfach die Anziehung des in die erste Drehwage eingehängten leitenden Körpers größer wäre, als die

des an seine Stelle gehängten dielektrischen Körpers, wenn beide kongruente Rotationsellipsoide sind. Wir wollen da bloß den Fall betrachten, daß die Wirkung längs der Rotationsachse geschieht. Für das verlängerte Ellipsoid ist der erwähnte Quotient nach Formel (26) (für die leitende Kugel ist $\epsilon = \infty$, für das dielektrische $1 + 4\pi\epsilon = D$):

$$(29) \quad Q = 1 + \frac{1}{(D-1) \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{lognat} \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - 1 \right]},$$

dagegen ist der Quotient für das abgeplattete Ellipsoid nach Formel (25)

$$(30) \quad Q = 1 + \frac{1}{(D-1) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right]}.$$

Man hat also für

$$a = 0, \quad a = b, \quad a = 2b, \quad a = \infty$$

$$Q = \frac{D}{D-1}, \quad Q = \frac{D+2}{D-1}, \quad Q = \frac{D+4 \cdot 8 \dots}{D-1}, \quad Q = \infty.$$

Für den Fall, daß die Exzentrizität klein ist, kann man eine Reihenentwicklung eintreten lassen.

Wenn die Wirkung in der Richtung der Rotationsachse (der a) geschieht, liefern die Formeln (25) und (26) für die Anziehung den Wert

$$(31) \quad \frac{\frac{2v e^2 \epsilon}{p^5} \left[1 - \frac{6(b^2 - a^2)}{5p^2} + \frac{9(b^2 - a^2)^2}{7p^4} \dots \right]}{1 + 4\pi\epsilon \left[\frac{1}{3} + \frac{2(b^2 - a^2)}{3 \cdot 5a^2} - \frac{2(b^2 - a^2)^2}{5 \cdot 7a^4} \dots \right]}.$$

Geschieht die Wirkung senkrecht zur Rotationsachse, so liefern die Formeln (27) und (28)

$$(32) \quad \frac{\frac{2v e^2 \epsilon}{p^5} \left[1 + \frac{3(a^2 - b^2)}{5p^2} + \frac{27(a^2 - b^2)^2}{56p^4} \dots \right]}{1 + 4\pi\epsilon \left[\frac{1}{3} + \frac{a^2 - b^2}{15a^2} - \frac{8}{105} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4} \dots \right]}.$$

Man sieht, daß der Faktor im Zähler noch weit weniger von eins verschieden ist, als der im Nenner. Der erstere ist übrigens nur dann genau, wenn nicht die Masse e , sondern ein homogenes Feld, in dem die Kraft e/p^2 in der Richtung der Abszissenachse wirkt, sich befindet, auf die Kugel induzierend

wirkt, und nach der Anziehung gefragt wird, welche das so dielektrisierte Ellipsoid auf die Masse e in der Distanz p ausübt. Sonst superponiert sich noch die auch bei Kugeln wegen der Nichthomogenität des Feldes angebrachte Korrektur. Berechnet man die Größe E nach der von mir immer angewandten Methode, so findet man E wegen der Elliptizität der dielektrischen Kugel höchstens

$$(33) \quad \frac{1 + 4\pi \varepsilon \left(\frac{1}{3} + \frac{2(b^2 - a^2)}{15a^2} \right)}{1 + \frac{4\pi \varepsilon}{3}} = 1 + \frac{2(b^2 - a^2)}{5Ea^2} \text{ mal,}$$

wegen der der Metallkugel

$$(34) \quad 1 - \frac{2(b^2 - a^2)}{5a^2} \text{ mal}$$

so groß. Geschieht die Wirkung gegen die Achsen des Ellipsoids geneigt, so wird außer der Anziehung auch ein Drehungsmoment auf das Ellipsoid ausgeübt, welches aber bei der Größe des Hebelarmes meiner Drehwaage einen ganz verschwindenden Einfluß auf dieselbe hat.

§ 6. Anziehung, welche eine elektrische Masse e auf einen dielektrischen Körper ausübt, dessen Gestalt sich nur sehr wenig, aber beliebig von der einer Kugel mit dem Radius a unterscheidet.

p sei die Distanz des Kugelzentrums O von e . Wir denken uns zuerst den Körper als eine Kugel vom Radius a , aus der unmittelbar an der Oberfläche ein unendlich kleines Stück vom Volumen ω herausgebrochen ist. Die vom Kugelzentrum e und ω gezogenen Geraden sollen den Winkel δ bilden, letztere soll die Länge t haben. Das elektrische Moment der Volumeneinheit der Kugel ist in der Richtung der x -Achse (der Geraden Oe)

$$\alpha = - \frac{3e}{4\pi E p^2},$$

das des herausgebrochenen Stückes war $\alpha \omega$.

Es entsteht zunächst die Frage, welche dielektrische Polarisation durch das Herausbrechen dieses Stückes zu der in der Kugel vorhandenen noch hinzukommt. Gerade dieselbe,

als ob auf die Kugel zwei elektrische Massen $-Q$ und $+Q$ induzierend wirkten, erstere mit den Kugelkoordinaten t, δ , letztere mit den Kugelkoordinaten $t - \lambda \cos \delta, \delta + (\lambda \sin \delta / t)$, wobei $Q\lambda = t\alpha\omega$ gleich dem elektrischen Momente der beiden Massen $-Q$ und $+Q$ ist.

Die Koordinaten haben dieselbe Bedeutung, wie in Beers Elektrostatik, S. 174. Nach der auf derselben Seite abgeleiteten Formel Beers hat die von $-Q$ auf die Kugel induzierte Elektrizität auf die Masse e das Potential, dessen negativer Differentialquotient nach den Koordinaten von e , die darauf nach den positiven Achsen wirkenden Kräfte liefert

$$T = \frac{e\alpha Q}{a} \sum_1^{\infty} \frac{np_n}{2n+1-(n+1)\kappa} \left(\frac{a}{p}\right)^{n+1} \left(\frac{a}{t}\right)^{n+1}.$$

Dasselbe Potentiale beider Massen zusammen ist also

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial T}{\partial t} \lambda \cos \delta + \frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\lambda \sin \delta}{t} \\ &= \frac{e\alpha Q\lambda}{a^2} \sum_2^{\infty} \frac{n}{2n+1-(n+1)\kappa} \left(\frac{a}{p}\right)^{n+1} \left(\frac{a}{t}\right)^{n+2} \left[p_n(n+1) \cos \delta + \frac{dp_n}{d\delta} \sin \delta \right]. \end{aligned}$$

Beide Formeln gelten nur für $t \leq a$.

Dies ist das Potential auf die Masse e , welches zu dem schon vorhandenen durch die veränderte Dielektrisierung der übrigen Kugel dazu kommt. Infolge des Fehlens jenes Stückes kommt aber ein Potential dazu, das gleich ist dem Potentiale der Massen $+Q$ mit den Koordinaten t, δ und $-Q$ mit $t - \lambda \cos \delta, \delta + (\lambda \sin \delta / t)$ auf e . Setzt man

$$r = \sqrt{p^2 - 2pt \cos \delta + t^2},$$

so ist dieses Potential, weil die Masse e und $+Q$ das Potential $+Qe/r$ aufeinander haben

$$\begin{aligned} & + eQ \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial t} \lambda \cos \delta - eQ \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \delta} \frac{\lambda \sin \delta}{t} = + \frac{(p-t)eQ\lambda}{(p^2 - 2pt \cos \delta + t^2)^{3/2}} \\ & = \frac{eQ\lambda}{t^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{t}{p}\right)^{n+1} \left[-\frac{dp_n}{d\delta} \sin \delta + np_n \cos \delta \right]. \end{aligned}$$

Das gesamte hinzugekommene Potential ΔT ist also die Summe dieser beiden Ausdrücke, wobei für $Q\lambda$ noch dessen

Wert $-\alpha\omega$ zu setzen ist. Der Zuwachs der Anziehung aber ist $\Delta A = d\Delta T/dp$. Es ist also, wenn man noch $t = a$ setzt

$$\Delta A = -e\alpha\omega \sum_1^{\infty} \frac{n+1}{p^{n+2}} \cdot \left[a^{n-1} \left(\frac{dp_n}{d\delta} \sin \delta - n p_n \cos \delta \right) - \frac{\kappa n a^{n-1}}{(2n+1 - (n+1)\kappa)} \left(\frac{dp_n}{d\delta} \sin \delta + (n+1)p_n \cos \delta \right) \right],$$

wobei

$$\kappa = \frac{D-1}{D} = \frac{3}{E+2}.$$

Fehlt daher an der Kugeloberfläche ein kleines Stück vom Volum ω , so kommt, wenn man nur das Glied mit der niedrigsten Potenz des p im Nenner beibehält, zur Anziehung der Kugel noch folgende hinzu:

$$\frac{2e\alpha\omega}{p^3} - \frac{2e\alpha\omega(1-3\cos^2\delta)}{E p^3} = -\frac{3e^2\omega}{2\pi E p^5} \left(1 - \frac{1-3\cos^2\delta}{E} \right).$$

Wir wollen jetzt annehmen, aus der ganzen Kugelfläche sollen rings Stücke fehlen, so daß die Verbindungslinie irgend eines Oberflächenelementes do der Kugel mit dem Zentrum nicht a , sondern $a-\lambda$ ist, wobei λ für die verschiedenen Oberflächenelemente verschieden sein kann. Dann ist $\omega = \lambda do$ zu setzen und über die ganze Kugeloberfläche zu integrieren. Zur Anziehung $2e^2 a^3/E p^5$, welche die exakte Kugel erfuhr, kommt also noch hinzu:

$$\Delta A = \frac{3e^2}{4\pi E p^4} \sum_1^{\infty} \frac{n+1}{p^n} \cdot a^{n-1} \left[\int \left(\frac{dp_n}{d\delta} \sin \delta - n p_n \cos \delta \right) \lambda do - \frac{3n}{(2n+1)E + n - 1} \int \left(\frac{dp_n}{d\delta} \sin \delta + (n+1)p_n \cos \delta \right) \lambda do \right],$$

oder wenn man die drei ersten Glieder der Reihe berechnet

$$\Delta A = -\frac{3e^2}{2\pi E p^5} \left[\int \lambda do - \frac{1}{E} \int (1-3\cos^2\delta) \lambda do + \frac{3a}{p} \int \cos \delta \lambda do - \frac{27a}{2p(5E+1)} \int (3\cos\delta - 5\cos^3\delta) \lambda do - \frac{2a^2}{p^2} \int (1-2\cos^2\delta) \lambda do + \frac{9a^2}{2(7E+2)p^2} \int (3-30\cos^2\delta + 35\cos^4\delta) \lambda do \dots \right].$$

Wenn die Kugel durch Wegnahme jener Stücke sich in ein Rotationsellipsoid verwandelt, dessen mit der Richtung der

Wirkung der Elektrizität zusammenfallende Rotationshalbachse gleich α , dessen andere Halbachse gleich $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ ist, so ist

$$\lambda = \frac{\gamma^2}{2\alpha} \sin^2 \delta, \quad d\sigma = 2\pi \alpha^2 \sin \delta d\delta$$

zu setzen, und von Null bis π zu integrieren, wodurch man wieder die Formel (34) erhält, aber natürlich nur bis auf die Glieder von der Ordnung der ersten Potenz von γ^2 genau. Natürlich sind dabei wieder jene Glieder vernachlässigt, welche dadurch entstehen, daß die Kugel nicht durch ein homogenes Feld, sondern durch einen induzierenden Punkt dielektrisiert wird. Man könnte sie auch mit Leichtigkeit in Rechnung ziehen, wenn man die weggelassenen Volumelemente nicht gleichförmig, sondern so elektrisiert wählte, wie sie es durch einen induzierenden Punkt werden. Der größeren Komplikation der Rechnung wegen und weil ich glaube, daß die Glieder von der niedrigsten Ordnung, welche hierdurch nicht alteriert werden, vollkommen ausreichen, habe ich jedoch diese Rechnung vorläufig unterlassen.

Experimente.

§ 7. Versuche, bei denen die Abweichungen der Kugel von der Kugelgestalt und der einseitige Elektrizitätsüberschuß gemessen wurde.

Da ich bei meinen früheren Kugeln die Abweichungen von der Kugelgestalt nicht bestimmt hatte, so stellte ich noch eine besondere diesbezügliche Versuchsreihe an, und zwar mit einer Paraffinkugel. Sowohl diese, als auch die dazu gehörige, mit Stanniol überzogene Kugel wurden mit besonderer Sorgfalt rund gegossen, das Stanniol sehr sorgfältig geglättet. Ich klebte nun drei kleine Spiegelglasplatten so aneinander, daß sie wechselseitig aufeinander senkrecht waren und eine körperliche Ecke bildeten, in welcher die zu untersuchende Kugel herumgewälzt wurde, so daß sie immer alle drei Glasplatten tangierte. Das System der drei Glasplatten wurde so auf ein Brett aufgeklebt, daß zwei nahe vertikal, die dritte nahe horizontal, jedoch etwas geneigt war, so daß die Kugel schon durch ihr Gewicht in die körperliche Ecke gedrückt ward. Auf

dem Brette war außerdem ein Mikroskop mit Okularmikrometer aufgeklebt, welches auf den höchsten Punkt der Kugel visierte, und dessen Achse der dritten Glasplatte parallel war. Aus den Verschiebungen dieses höchsten Punktes beim Wälzen der Kugel konnten mit großer Genauigkeit die Längenunterschiede der Kugeldurchmesser bestimmt werden.

Ich maß den Durchmesser, welcher beim Hängen der Kugel vertikal stand, dann acht Durchmesser, welche horizontal standen, dann vier, die etwa um 45° gegen den Horizont geneigt waren, und zwar stellte ich an der Paraffinkugel und Metallkugel zwei Messungsreihen an. Bei der zweiten Messungsreihe war das Mikroskop etwas gegen seine Lage während der ersten verschoben, so daß also nur die Differenzen beider Messungsreihen zu stimmen brauchen. Die folgende Tabelle gibt die Zahl der Trommelumdrehungen, welche notwendig war, um das Fadenkreuz des Okularmikrometers aus einer fixen Lage in die Höhe des höchsten Punktes der Kugel zu bringen. Ihre Differenzen geben also die Längendifferenzen der verschiedenen Kugeldurchmesser, und zwar entspricht eine Trommelumdrehung einer Längendifferenz von $\frac{1}{6}$ mm.

Metallkugel		Paraffinkugel	
Erste Reihe	Zweite Reihe	Erste Reihe	Zweite Reihe
3,50	3,70	2,75	3,00
3,17	3,30	3,23	3,53
3,17	3,30	3,25	3,55
3,29	3,52	3,23	3,55
3,73	3,90	2,80	3,05
3,23	3,33	3,23	3,60
3,00	3,15	3,24	3,64
2,79	3,02	3,23	3,60
3,61	3,71	2,81	3,00
3,30	3,35	3,22	3,52
3,30	3,53	2,51	3,05
2,71	2,88	2,62	3,03
3,31	3,46	3,35	3,81
3,63	3,82	3,35	3,73

Man sieht, daß die größte Differenz zweier Durchmesser kaum eine Umdrehung = 0,167 mm betrug, und ich überzeugte mich noch durch weiteres Wälzen, daß auch kein anderer Durchmesser eine größere Abweichung zeigte.

Will man daher die Formel (34) anwenden, so hat man $a = 7,3$ mm, $b = 7,22$ mm zu setzen, und findet, daß infolge der Abweichungen von der Kugelgestalt der Wert von E höchstens um 0,0088 seines Betrages falsch erhalten worden sein kann. Doch ist er in Wirklichkeit höchstwahrscheinlich noch um viel weniger falsch, da in Wirklichkeit der eingehängte Körper kein Ellipsoid war, dessen größte und kleinste Halbachse 7,3 und 7,22 mm lang waren, sondern wahrscheinlich hatte dieser Körper nur stellenweise Vertiefungen oder Erhöhungen, wodurch der schädliche Einfluß der Durchmesserungleichheit bedeutend vermindert wird. Übrigens werde ich bei späteren Versuchen für eine noch genauere Kugelgestalt sorgen, die namentlich bei geschliffenen Kugeln ganz wohl erreichbar sein wird.

Bei der Ladung durch die Stimmgabeln wurden die wirkenden Kugeln rasch nacheinander bald positiv, bald negativ geladen. Sei e die auf den wirkenden Kugeln zu einer Zeit dt befindliche Elektrizitätsmenge, welches mit negativen Zeichen zu nehmen ist, wenn sie negativ ist. Wenn $\int e dt$, über eine längere Zeit erstreckt, Null ist, so findet auf eine positive, fest an einen Punkt des Raumes gekettete Elektrizitätsmenge gar keine Wirkung statt. Alle Fernwirkung stammt dann von der Influenz. Ist dagegen $\int e dt$ von Null verschieden, so findet auch auf jene positive Elektrizitätsmenge Einwirkung statt. Ich will $\int e dt$ immer den Elektrizitätsüberschuß nennen. Derselbe war bei meinen Versuchen, dank dem mit Wasser gefüllten Glasfaden, sehr klein. Um seine Größe zu messen verband ich den zu den wirkenden Kugeln führenden Draht leitend mit zwei gegenüber liegenden Quadranten eines Kirchhoffschen Elektrometers; die beiden anderen Quadranten waren zur Erde abgeleitet. Der bewegliche Teil des Elektrometers, den ich „Wagebalken“ nenne, war, damit es nicht zu empfindlich sei, an zwei ziemlich entfernten Kokonfäden bifilar aufgehängt und sehr stark elektrisiert dadurch, daß die Flasche sehr stark geladen wurde. Derselbe wurde, selbst wenn $\int e dt = 0$ war, immer nach der Seite der alternierend geladenen Quadranten abgelenkt, weil deren alternierende Ladung auf dem Wagebalken eine gerade in der entgegengesetzten Weise alternierende influenzierte. Um diesem Übelstande abzuhelfen,

machte ich einen Wagebalken, dessen horizontaler Teil aus einem Halbleiter (steifem Papier) gemacht war, auf das die alternierende Ladung wegen seiner geringen Leitungsfähigkeit keine Influenz ausüben konnte; die Ladung der Leydnerflasche dagegen übertrug sich vortrefflich auf das Papier, welches daher durch den dauernden Elektrizitätsüberschuß wie Metall abgelenkt wurde. Ist dieser horizontale Draht, wie bei Kirchhoffs Instrument, ein dünner Draht, so wird er durch kleine Elektrizitätsmengen, solange er nahe dem die Quadranten trennenden Schlitzte steht, ziemlich stark abgelenkt. Hat er sich aber etwas von diesem Schlitzte entfernt, so wächst die Ablenkung fast gar nicht mehr, wenn die Potentialdifferenz der Quadranten wächst. Dadurch wird bewirkt, daß die Ablenkung des Wagebalkens sehr wenig der Potentialdifferenz der Quadranten proportional ist. Um diesem Übelstande zu

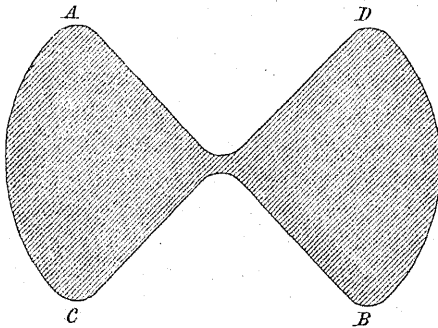


Fig. 1.

begegnen, gab ich dem horizontalen Teile der Quadranten beiläufig die nebenstehende Gestalt (ähnlich wie bei Thomsons Elektrometer). Die die Quadranten trennenden Schlitzte befanden sich unter den Halbierungslinien der von den Geraden AB und CD gebildeten Winkel, wenn die Quadranten ungeladen waren. Der Ausschlag des Elektrometers ist dann innerhalb ziemlich weiter Grenzen der Potentialdifferenz auf den Quadranten proportional. Wurden die wirkenden Kugeln alternierend geladen, so geriet das Lichtbild des Elektrometers sogleich ins Schwanken; es war also Elektrizitätsüberschuß vorhanden. Die Schwankungen geschahen bald nach der einen,

bald nach der anderen Seite der Ruhelage hin und betrug zwei bis höchstens vier Skalenteile. Bevor ich die Versuche begonnen habe, lud ich die mit den Elektrometerquadranten verbundenen wirkenden Kugeln dauernd einmal positiv, dann negativ. Die in der zweiten Drehwage befindliche Kugel zeigte nicht den mindesten Ausschlag, während das Elektrometer im ersten Falle 16, im zweiten 25 Teilstriche Ablenkung zeigte. Nach Beendigung der Versuche wiederholte ich dieses Experiment. Die Kugel der zweiten Drehwage zeigte etwa $\frac{1}{2}$ Teilstrich Ausschlag, der übrigens auch Beobachtungsfehler sein konnte; das Elektrometer zeigte 17 und 24 Teilstriche Ausschlag. Da der Elektrizitätsüberschuß während der alternierenden Ladung dem Elektrometer einen Ausschlag von höchstens vier Skalenteilen erteilte, so ist klar, daß derselbe auf die in den Drehwagen eingehängten Kugeln gar keinen Einfluß ausüben konnte. Ich lasse jetzt die Zahlen folgen, die ich bei zwei mit jener Paraffinkugel angestellten Beobachtungsreihen erhielt. Bedeutung der Zeichen und Anordnung ist dieselbe wie in meiner ersten Abhandlung über dielektrische Fernwirkung

Spez. Gewicht des Paraffins 0,911.

$$V_i = 1,610, \quad V_m = 1,647.$$

Stimmgabel mit 32 ganzen Schwingungen pro Sekunde.

Metallkugel	Paraffinkugel
$2R = 1263$	$2R = 1258$
$2A = +60-80$	$2A = 20-30$
1,30	2,66 2,66
1,31	2,64 2,67
1,29	2,67 2,63
1,31	2,65 2,59
1,30	2,69 2,63
<hr/>	<hr/>
$M \ 1,302$	$M \ 2,649$
$E' = 3,449,$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,373$
$2(R_m - R_i) = 5$	$E = 3,266$
$2(A_m - A_i) = 45$	

Paraffinkugel Metallkugel		Paraffinkugel	
128g. Schwing. pr. S.	32 Schwing.	32 Schwing.	128 Schwing.
$2R = 1271$	$2R = 1266$	$2R = 1264$	$2R = 1257$
$2A = 18-22$	$2A = 70-80$	$2A = 16-24$	$2A = 20-22$
2,57	1,28	2,59	2,65
2,60	1,29	2,59	2,63
2,62	1,34	2,71	2,62
2,59	1,32	2,66	2,63
2,58	1,32	2,69	2,64
2,57	1,32	2,66	2,62
2,66	1,31	2,52	2,56
2,63	1,29	2,59	2,59
2,59	1,30	2,55	2,65
2,59	1,30	2,64	<u>M 2,621</u>
<u>2,600</u>	<u>M 1,307</u>	<u>2,62</u>	
		M 2,630	
$E' = 3,398$		$E' = 3,437$	$E' = 3,426$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,323$		$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,363$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 3,352$
$2(R_m - R_i) = -5$		$2(R_m - R_i) = 2$	$2(R_m - R_i) = 9$
$2(A_m - A_i) = 55$		$2(A_m - A_i) = 55$	$2(A_m - A_i) = 54$
$E = 3,217$		$E = 3,240$	$E = 3,218$

Bei den in der ersten Abhandlung beschriebenen Versuchen fand ich für Paraffin $E = 3,296$ und $3,315$. Diese Übereinstimmung ist jedenfalls befriedigend, besonders da das Material keineswegs eine vollkommen definierte Zusammensetzung hat. Übrigens mag der Umstand, daß der Wert des E jetzt etwas kleiner ausfiel, daher rühren, daß die jetzt untersuchten Kugeln weniger als die früher untersuchten von der Kugelgestalt abwichen.

Ich gebe schließlich eine übersichtliche Zusammenstellung aller bei alternierender Ladung von mir sowohl in der ersten Abhandlung, als auch hier gefundenen Werte der mit E bezeichneten Größe, welche den Wert $(D + 2)/(D - 1)$ hat und angibt, wie vielmal eine leitende Kugel im nahen homogenen Felde stärker angezogen wird, als eine gleich grosse dielektrische. Die in § 1 und 4 angegebenen Korrekturen habe ich dabei nicht angebracht, weil ihr Betrag unter der Hypothese berechnet wurde, daß die umgebenden Wände keine Einwirkung ausüben, wodurch er notwendig zu groß ausfallen mußte. Übrigens bemerke ich, daß durch beide Korrekturen zusammen

der Wert des E jedenfalls um weniger als 1 Prozent kleiner würde. Eine Abhängigkeit von der Ladungsstärke konnte ich nicht konstatieren, auch nicht von der Zeit der Einwirkung, wenn diese zwischen $\frac{1}{64}$ und $\frac{1}{360}$ Sekunde schwankte.

	E			Mittel	
Schwefel	2,035,	2,032		2,033	
Paraffin	3,266,	3,296,	3,315	3,302	
		3,217,	3,240,	3,218	3,235
Kolophonium		3,058,	2,992	3,025	
Hartgummi	2,185,	2,168,	2,245,	2,246	2,211

Ich stelle nun die aus den Mittelwerten der E sich ergebenden Dielektrizitätskonstanten D mit den von mir aus Kondensatorversuchen (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 67¹⁾) gefundenen und den aus den elektromagnetischen Lichttheorien sich ergebenden zusammen:

	Aus d. diel. Fernwirkung	Aus d. Kond.- Versuchen	Aus d. el.-magn. Lichttheorie
Schwefel	3,90	3,84	4,06
Paraffin	2,30 2,34	2,32	2,33
Kolophonium		2,48	2,55
Hartgummi	3,48	3,15	—

Die für das Paraffin in der ersten Zeile angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Versuche der ersten Abhandlung, die in der zweiten Zeile angegebenen auf die Versuche dieser Abhandlung. Für den Schwefel habe ich das Mittel der dritten, aus der elektromagnetischen Lichttheorie für die drei Hauptelastizitätsachsen sich ergebenden Dielektrizitätskonstanten in der letzten Vertikalreihe eingeführt. Um auch noch eine Übersicht über die dielektrische Nachwirkung zu geben, stelle ich zum Schlusse die Werte des E zusammen, die sich bei verschiedener Wirkungsdauer ergeben. (Für jede Wirkungsdauer nur den Mittelwert.)

	Zeit der Einwirkung in Sekunden					
	$\frac{1}{64}$ — $\frac{1}{360}$	0,9	1,8	$22\frac{1}{2}$	45	90
Schwefel	2,033	—	2,125	—	2,110	—
Hartgummi	2,211	—	2,064	—	2,094	—
Paraffin	3,269	2,980	2,920	—	1,420	—
Kolophonium	3,025	2,140	1,927	1,730	1,700	1,650

¹⁾ Diese Sammlung Nr. 24.

wobei jedoch die bei längerer Einwirkungszeit gefundenen Resultate etwas ungenauer sein dürften, als die in der ersten Vertikalreihe stehenden.

Soeben kommt mir eine Abhandlung von Schiller (Pogg. Ann. 152. S. 535) zu Gesicht, worin derselbe ebenfalls Dielektrizitätskonstanten von Isolatoren (teilweise mittels eines von Helmholtz erfundenen Apparates bei weit geringerer Ladungszeit, als mir zu Gebote stand) bestimmte und mit der elektromagnetischen Lichttheorie verglich. Wenn nun auch so kompliziert gebaute Körper, wie Paraffin und Hartgummi, welche vielleicht eine sehr von ihrer Konstitution abhängige dielektrische Nachwirkung besitzen, sich nur wenig zur Prüfung jener Lichttheorie eignen, so ist doch jedenfalls der für Paraffin, namentlich bei kurzer Ladungszeit, von Hrn. Schiller gefundene Dielektrizitätskoeffizient viel kleiner, als es mit der elektromagnetischen Lichttheorie vereinbar ist. Mir war es seinerzeit nicht gelungen, die Platten aus den isolierenden Substanzen so planparallel zu erhalten, daß sie den Raum zwischen den Kondensatorplatten vollkommen ausgefüllt hätten, weshalb ich eine besondere Korrektion anbrachte. Herr Schiller bespricht diesen Punkt in seiner Abhandlung gar nicht. Wenn er aber diese Korrektion unterließ, und wenn es ihm nicht durch ganz besondere Kunstgriffe gelang, die isolierenden Platten exakt planparallel zu machen, so müssen seine Werte für die Dielektrizitätskoeffizienten fehlerhaft, und zwar bedeutend zu klein ausgefallen sein.

Über die Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstante des kristallisierten Schwefels nach verschiedenen Richtungen.¹⁾

(Wien. Ber. 70. S. 342—366. 1874.)

Gemäß der elektromagnetischen Theorie des Lichtes sind die Lichtschwingungen ein und dasselbe mit kleinen Verschiebungen der Elektrizität (Electric displacements) senkrecht zur Richtung des Lichtstrahles. Die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben kann entweder von Verschiedenheit der Magnetisierungs- oder der Dielektrizitätskonstante herühren. Die geringe Anziehung, welche alle durchsichtigen Körper im Vergleiche zu Eisen durch Magnete erfahren, beweist, daß die Magnetisierungskonstante in allen durchsichtigen Körpern fast genau denselben Wert wie in Luft (respektive im leeren Raume) hat. Es muß daher die Verschiedenheit in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von Verschiedenheiten der Dielektrizitätskonstanten herrühren. Wenn in einem und demselben Körper Verschiedenheiten in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes nach verschiedenen Richtungen herrschen, so muß dies also ebenfalls daher rühren, daß derselbe nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene Dielektrizitätskonstante besitzt (vgl. Maxwell, Phil. mag. ser. 4. 23. S. 24 und Phil. transact. 155. S. 501). Ich suche nun in verschiedenen anisotropen Kristallen diese Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstante in verschiedenen Richtungen nachzuweisen. Zwei Substanzen, Kalkspat und Quarz, welche ich zuerst prüfte, erwiesen sich hierzu wenig geeignet, weil bei denselben die Dielektrizitätskonstante mit der Zeit der Einwirkung der Elektrizität wächst, mit anderen Worten, weil sie dielektrische

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 11. S. 172. 8. Oktober 1874.

Nachwirkung besitzen. Da nun aber so kurze Einwirkungszeiten, wie sie bei den Lichtschwingungen vorkommen, bei Versuchen mit statischer Elektrizität auch nicht annähernd erreicht werden können (bei Lichtschwingungen dauert jede einzelne elektrische Verschiebung höchstens den vierhundertbillionsten Teil einer Sekunde, während bei Versuchen mit statischer Elektrizität, deren Dauer kaum kleiner als ein Tausendstel Sekunde gemacht werden kann), so ist bei solchen Körpern die Übereinstimmung der Dielektrizitätskonstante mit der elektromagnetischen Lichttheorie immer von vornherein fraglich, dagegen fand ich im Schwefel einen sehr geeigneten Körper, sowohl wegen seines ausgezeichneten Isolationsvermögens, als auch wegen des gänzlichen Mangels an dielektrischer Nachwirkung in demselben, als auch endlich wegen der großen Verschiedenheit der Lichtgeschwindigkeit in demselben nach verschiedenen Richtungen. Natürlich konnte kristallisierter Schwefel nicht mittels eines Kondensators untersucht werden, da die Unmöglichkeit auf der Hand liegt, sich aus diesem Materiale Platten von genügender Größe zu verschaffen, dagegen bot meine in der Abhandlung „Experimentaluntersuchung über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper“ (Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. 68),¹⁾ welche ich immer unter dem Namen „erste Abhandlung“ zitieren werde, beschriebene Methode ein Mittel, den kristallisierten Schwefel in verschiedenen Richtungen auf seine Dielektrizitätskonstante zu prüfen; und mit Hilfe dieser Methode fand ich in der Tat, daß die Dielektrizitätskonstante im Schwefel in verschiedenen Richtungen verschieden ist, und zwar vollkommen in der von der elektromagnetischen Lichttheorie geforderten Weise.

Ich verschaffte mir zu diesem Zwecke natürliche Schwefelkristalle von möglichst großen Dimensionen, wenn auch nicht mit schönen Flächen; ein solches Stück verdanke ich Hrn. Professor Tschermak, Direktor des k. Hof-Mineralienkabinetts in Wien, zwei andere, allerdings minder schöne Stücke erhielt ich aus der Mineralienhandlung des Hrn. Lenoir. Der außerordentlichen Geschicklichkeit des Hrn. Optikers Steeg in

¹⁾ Vgl. Nr. 25 dieses Bandes.

Homburg gelang es, aus diesem Material zwei vollkommen runde Kugeln, eine von $17\frac{1}{2}$ mm Durchmesser, die andere von $14\frac{1}{2}$ mm Durchmesser zu schleifen. Beide hatten zwar im Innern Sprünge, die jedoch das spezifische Gewicht durchaus nicht verkleinerten und daher auch auf meine Messungen keinen Einfluß haben konnten. Sie enthielten keine fremde Substanz in ihrem Innern und es fehlten auch nirgends Stücke daraus, bis auf ein ganz kleines Loch von höchstens 2 mm^3 Inhalt in der größeren Kugel.

Da jedoch dieses Loch nahe an der Stelle lag, wo die Richtung der größten Dielektrizitätskonstante die Kugeloberfläche traf, so konnte es jedenfalls nicht Ursache des von mir gefundenen verschiedenen Verhaltens des Schwefels nach verschiedenen Richtungen sein, sondern dasselbe höchstens vermindern.

Die erste Bestimmung der Lage der optischen Achsen in beiden Schwefelkugeln verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. v. Lang. Später erwies sich jedoch diese Bestimmung als eine außerordentlich leichte, da das Phänomen der konischen Refraktion mit freiem Auge ohne jedes weitere Hilfsmittel sehr deutlich sichtbar ist, sobald man durch die Kugel irgend ein Objekt, am besten natürlich einen Lichtpunkt, betrachtet, und dieses Phänomen wegen des großen Gesichtsfeldes beim Drehen der Kugel auch sehr leicht aufgefunden werden kann.

Durch Messungen nach der Methode, welche ich in meiner Abhandlung „Über einige in meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Korrekturen“ (dieser Band d. Sitzungsber. § 6)¹⁾ (ich will diese Abhandlung unter dem Namen „die zweite“ zitieren) beschrieben habe, überzeugte ich mich, daß die verschiedenen Durchmesser der größeren Kugel höchstens um 0,05 mm, die der kleineren höchstens um 0,2 mm verschieden waren, was bei Berechnung der Dielektrizitätskonstante bei der größeren Kugel den Wert von E gar nicht erheblich, bei den kleineren höchstens um seinen 0,006fachen Betrag falsch machen kann (vgl. Formel (33) meiner zweiten Abhandlung).

Um die Kugel mit möglichster Leichtigkeit nach verschie-

¹⁾ Vgl. Nr. 27 dieses Bandes.

denen Richtungen untersuchen zu können, klebte ich an jede einen eigentümlich gestalteten Schellackhaken an. Ich bemerke zunächst, daß Schellack auf Schwefel sehr leicht klebt. Man braucht nur das untere Ende des Hakens so stark zu erwärmen, daß sich daselbst ein kochendes Schellacktröpfchen bildet und dann den Haken, welchen man mit einer Pinzette erfaßt hat, sehr rasch auf die Kugel aufzudrücken. Es bleibt dann mit genügender Festigkeit kleben.

Kugel und Haken darf dabei natürlich nicht mit der bloßen Hand berührt werden, nur mit einem reinen Tuche (am besten aus Seide). Ein Vorwärmen der Kugel würde dieselbe der Gefahr des Zerspringens aussetzen, wie überhaupt alle, selbst die durch die Wärme der Hand erzeugten Temperaturungleichheiten im Innern des Schwefels ein Zerspringen veranlassen können. Der Gebrauch feuchten Kittes ist immer mißlich, teils weil der letzte Rest der Feuchtigkeit schwer verdunstet und daher leitend bleibt, teils weil die Fläche, auf die der Kitt aufgetragen werden könnte, sehr klein ist.

Ich will an jedem Haken abc (siehe nebenstehende Fig. 1) denjenigen Teil ab , welcher beim Hängen vertikal steht, als „den Stiel“ bezeichnen, den krummen Teil bc aber als die Nase des Hakens. Ich berührte nun einen schon fertigen Haken bei b mit einem kochenden Schellacktröpfchen, welches ich, sobald es haftete, in einen etwas nach abwärts gekrümmten Faden von passender Dicke auszog. Dadurch erhielt ich einen Haken, welcher an einem und demselben Stiele fast

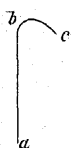


Fig. 1.

in gleicher Höhe zwei Nasen trug, und zwar so, daß die beiden durch den Stiel und je eine Nase gelegten Ebenen aufeinander senkrecht standen.

Natürlich muß man beachten, daß sich der Schellacktropfen wohl angeheftet hat, damit er nicht nachträglich abspringt. Mein Apparat war der in meiner ersten Abhandlung beschriebene und ich befolgte auch ganz das daselbst auseinandergesetzte Verfahren, und zwar arbeitete ich mit alternierender Ladung.

Die elektromagnetische Stimmgabel machte 32 ganze Schwingungen in der Sekunde. Die Drehwagen machten eine ganze Schwingung in 25 Sekunden; das Trägheitsmoment der

ersten Drehwage war $7854 \text{ g (Masse)} \times \text{mm}^2$, daß der zweiten war $674000 \text{ g} \times \text{mm}^2$; der Radius der beweglichen Kugel der zweiten Drehwage war $12,9 \text{ mm}$; die bewegliche Kugel der zweiten Drehwage hatte einen Durchmesser von $25,8 \text{ mm}$.

Der Hebelarm FG (Fig. 2 meiner ersten Abhandlung) war statt 59 nur 41 mm lang. Sonst hatten sämtliche Dimensionen die in der zitierten Abhandlung angegebenen Größen; wo zweierlei Größen angegeben sind, die in Klammern beigefügt.

Dadurch, daß ich in die Schellackfäden der ersten Drehwage die eine oder die andere Nase des Hakens einhängte, konnte ich die Elektrizität nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen auf die Schwefelkugel wirken lassen, und ich hatte den Haken so angeklebt, daß sie dabei tunlichst in der Richtung von zwei Hauptelastizitätsachsen wirkte. Daß dies nicht mit besonderer Genauigkeit erzielt werden konnte, versteht sich bei der Raschheit, mit welcher der Haken aufgeklebt werden mußte, von selbst, und ich glaube, daß die Abweichungen der berechneten und beobachteten Zahlen hauptsächlich in einer mangelhaften Orientierung der Schwefelkugel ihren Grund hatten. Wollte man eine größere Genauigkeit erzielen, so müßte man meiner Ansicht nach die Kugel zuerst so gut wie möglich einhängen, dann erst die Neigung der Richtung der Einwirkung der Elektrizität gegen die Hauptelastizitätsachsen bestimmen und aus dieser Neigung die Dielektrizitätskonstante speziell für die betreffende Einhängung berechnen. Ich machte öfters auch Versuche, bei denen die Kugel jedesmal mit derselben Nase, aber bald die Nase nach vorne, bald nach rückwärts gerichtet, eingehängt war (ich will diese beiden Stellungen immer die Stellung N und M nennen).

Die Kugel erschien also in der Stellung N um 180° um eine vertikale Achse gedreht, gegenüber ihrer Lage in der Stellung M .

In den Stellungen M und N erhielt ich für die Dielektrizitätskonstante immer denselben Wert, wodurch es sehr unwahrscheinlich wird, daß die Verschiedenheiten derselben nach verschiedenen Richtungen von in unsichtbarer Weise eingeschlossenen leitenden Teilchen (oder solchen mit anderer Dielektrizitätskonstante) herrührte, indem diese Teilchen gerade

symmetrisch zu einer senkrecht auf der Hakenebene stehenden Ebene hätten gelagert sein müssen. Zudem wäre auch höchst unwahrscheinlich gewesen, daß diese Teilchen in beiden Kugeln so ähnlich gelagert gewesen wären, daß sie gerade in beiden Kugeln dieselbe Asymmetrie erzeugt hätten nach Richtungen, welche in beiden Kugeln bezüglich der optischen Achsen dieselbe Lage hatten. Es zeigte sich die Dielektrizitätskonstante am größten, wenn die Wirkung in der Richtung der Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achsen geschieht, am kleinsten, wenn in der Richtung der Halbierungslinie des stumpfen. Der größten Dielektrizitätskonstante entspricht auch der größte Lichtbrechungsquotient. Es muß also der Lichtbrechungsquotient am größten sein, wenn die Lichtschwingungen (die elektrischen Schwingungen, aus denen das Licht besteht) parallel der Richtung der Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achsen vor sich gehen, dagegen am kleinsten, wenn die Lichtschwingungen parallel sind der Halbierungslinie des stumpfen Winkels der optischen Achsen. Steht die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht auf den optischen Achsen, so ist im Schwefel derjenige Lichtstrahl, welcher parallel der Halbierungslinie des stumpfen Winkels der optischen Achsen polarisiert ist, derjenige, dem der größte Brechungsquotient zukommt; und da wir eben fanden, daß in dem Lichtstrahl mit dem größten Brechungsquotienten die Schwingungen parallel der Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achsen stehen, so folgt daraus, daß die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationssebene geschehen. (Vgl. die zitierte Stelle der Abhandlung Maxwells aus den Phil. transact.)

Ich will im folgenden immer die Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achsen als die größte Hauptelastizitätsachse, die des stumpfen als die kleinste bezeichnen. Auf beiden senkrecht steht die mittlere Hauptelastizitätsachse. Die Dielektrizitätskonstanten nach diesen drei Richtungen bezeichnen wir der Reihe nach mit D_g , D_k und D_m ; sie sind nach der Maxwellschen Theorie die Quadrate der drei Hauptbrechungsquotienten i_g , i_k und i_m . Ich legte bei der Berechnung die Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten zugrunde, welche Herr Professor Schrauf an kristallisiertem

Schwefel ausgeführt hat (Sitzungsber. der Wien. Akad. der Wissensch. 41. S. 794), und zwar muß nach Maxwells Theorie die Dielektrizitätskonstante mit dem Quadrate des Brechungsquotienten der Strahlen von sehr großer Wellenlänge (also der ultraroten Strahlen) stimmen, weshalb ich die von Schrauf für verschiedene Wellenlängen λ gefundenen Brechungsquotienten in die Form $A + (B/\lambda^2)$ brachte.

Die Dielektrizitätskonstante für die betreffende Richtung muß dann das Quadrat des Koeffizienten A sein. Ich fand in dieser Weise

	Aus den Fraunhoferschen Linien B und E	Aus den Fraunhoferschen Linien D und H
für i_g	$\left\{ \begin{array}{l} A = 2,1679 \\ B = 0,0253 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A = 2,1659 \\ B = 0,0259 \end{array} \right.$
für i_m	$\left\{ \begin{array}{l} A = 1,9714 \\ B = 0,0234 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A = 0,9715 \\ B = 0,0230 \end{array} \right.$
für i_k	$\left\{ \begin{array}{l} A = 1,8957 \\ B = 0,0193 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A = 1,8939 \\ B = 0,0198 \end{array} \right.$

Man sieht, die mit Zugrundelegung verschiedener Fraunhoferscher Linien gefundenen Werte der Koeffizienten stimmen vollkommen genügend miteinander überein.

Die Dielektrizitätskonstanten sind die Quadrate der A . Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} D_g &= 4,596, & D_m &= 3,886, & D_k &= 3,591 \\ E_g &= 1,812, & E_m &= 2,040, & E_k &= 2,157. \end{aligned}$$

E ist die in meiner ersten Abhandlung ebenso bezeichnete Größe, welche also angibt, um wie vielmal eine leitende Kugel stärker angezogen wird, als eine gleich große dielektrische unter denselben Umständen. Es ist also allgemein

$$(1) \quad E = \frac{D + 2}{D - 1}.$$

Der Index g bezieht sich immer auf die Richtung der größten Hauptelastizitätsachse, also die Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achse.

Ich lasse nun zunächst die Angabe der Dimensionenverhältnisse der Kugeln und dann die an denselben angestellten Versuche folgen.

Die Bezeichnungen sind dabei genau die in meiner ersten Abhandlung verwendeten.

Große Kugel:

$$V_i = 2,6315, V_m = 1,681, \frac{V_i}{V_m} = 1,565,$$

spez. Gewicht 2,072, Durchmesser $17\frac{1}{4}$ mm.

Kleine Kugel:

$$V_i = 1,5065, V_m = 1,677, \frac{V_i}{V_m} = 0,8982,$$

spez. Gewicht 2,075, Durchmesser 14,5 mm.

In jeder einzelnen der folgenden Tabellen sind die Versuche in der Reihenfolge aufgeführt, in der sie angestellt wurden.

Tabelle I.

Versuche mit der großen Schwefelkugel.

Bei Einhängung des Hakens I wirkt die Elektrizität parallel der größten, bei Einhängung des Hakens II parallel der kleinsten Hauptelastizitätsachse.

Metallkugel	Schwefelkugel		
	Haken I eingehängt		Haken II
	Stellung M	Stellung N	Stellung M
$2R = 863,4$			
2A 95,5—100,1			
1,47	2R = 857,1	2R = 848,4	2R = 851,2
1,47	2A 88,1—90,9	2A 85,9—91,0	2A 70,7—75,5
1,46	1,30	1,32	1,09
1,46	1,31	1,29	1,09
1,46	1,31	1,32	1,09
1,48	1,30	1,32	1,10
<hr/> M 1,467	1,32	1,34	1,10
	1,30	1,32	1,09
	M 1,307	M 1,3183	1,10
	E' = 1,122	E' = 1,113	1,10
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,755$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,743$	M 1,095
	$2(R_m - R_i) = 6,3$	$2(R_m - R_i) = 15,0$	E' = 1,339
	$2(A_m - A_i) = 8,2$	$2(A_m - A_i) = 9,2$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,096$
	$E_g = 1,745$	$E_g = 1,323$	$2(R_m - R_i) = 12,2$
	Im Mittel $E_g = 1,734$		$2(A_m - A_i) = 23,8$
			$E_k = 2,063$

Tabelle II.

(Stellung der Haken wie in Tabelle I.)

Schwefelkugel

Metallkugel

Haken I	Stellung N	Haken II	Stellung M	Haken II	Stellung N	Haken I	Stellung M	
	$2R = 943,6$		$2R = 943,7$		$2R = 939,2$		$2R = 936,3$	
	$2A = 84,9-90,3$		$2A = 80,5-86,1$		$2A = 79,1-84,3$		$2A = 89,6-97,8$	$2A = 101,1-109,6$
	$2A_i = 86,8$		$2A_i = 83,9$		$2A_i = 81,4$		$2A_i = 95,6$	$2A_m = 104,5$
	1,36		1,21		1,21		1,40	1,58
	1,38		1,20		1,20		1,40	1,60
	1,35		1,19		1,19		1,40	1,58
	1,35		1,19		1,19		1,40	1,59
	1,35		1,19		1,19		1,39	1,58
	1,36		1,18		1,18		1,38	1,58
	$M 1,358$		$M 1,193$		$M 1,193$		$M 1,395$	$M 1,585$
	$E' = 1,167$		$E' = 1,323$		$E' = 1,328$		$E' = 1,139$	
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,827$		$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,071$		$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,079$		$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,783$	
	$2(R_m - R_i) = -16,0$		$2(R_m - R_i) = -16,1$		$2(R_m - R_i) = -11,6$		$2(R_m - R_i) = -8,7$	
	$2(A_m - A_i) = 17,7$		$2(A_m - A_i) = 20,6$		$2(A_m - A_i) = 23,1$		$2(A_m - A_i) = 8,9$	
	$E_g = 1,822$		$E_g = 2,067$		$E_k = 2,067$		$E_g = 1,783$	
			A_g im Mittel = 1,803,		E_k im Mittel 2,067			

Tabelle III.

(Stellung der Haken wie in Tabelle I.)

Der Rechnung wurde das Mittel bei der Metallkugel-Beobachtung zugrunde gelegt.

Metallkugel	Schwefelkugel	
	Haken I Stellung M	Haken II Stellung M
$2R = 950,8$	$2R = 949,2$	$2R = 954,1$
$2A = 104,9-107,4$	$2A = 90,2-92,1$	$2A = 64,4-81,2$
$2A_m = 105,6$	$2A_i = 90,9$	$2A_i = 78,1$
1,59	1,37	1,23
1,60	1,37	1,21
1,60	1,37	1,22
1,58	1,37	1,23
1,60	1,36	1,23
1,60		1,21
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$M 1,595$	$M 1,368$	$M 1,216$
	$E' = 1,177$	$E' = 1,324$
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,842$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,073$
	$2(R_m - R_i) = 1,6$	$2(R_m - R_i) = 27,5$
	$2(A_m - A_i) = 1,47$	$E_k = 2,049$
	$E_g = 1,828$	$E_k = 2,061$
	im Mittel $E_g = 1,835, E_k = 2,061$	

Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I Stellung N	Haken II Stellung N	
$2R = 955,2$	$2R = 956,3$	$2A = 961,9$
$2A = 82,4-86,3$	$2A = 72,9-82,6$	$2A = 97,7-103,1$
$2A_i = 84,9$	$2A_i = 75,9$	$2A_m = 99,8$
1,35	1,20	1,63
1,35	1,20	1,63
1,36	1,18	1,63
1,36	1,20	1,61
1,37	1,21	1,62
1,36	1,22	1,63
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$M 1,358$	$M 1,20$	$M 1,625$
$E' = 1,185$	$E' = 1,342$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,855$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,100$	
$2(R_m - R_i) = 4,4$	$2(R_m - R_i) = 5,6$	
$2(A_m - A_i) = 20,7$	$2(A_m - A_i) = 23,9$	
$E_g = 1,842$	$E_k = 2,073$	
im Mittel $E_g = 1,835, E_k = 2,061$		

Tabelle IV.

Bei Einhängung des Hakens I geschieht die Wirkung parallel der größten, bei Einhängung des Hakens II parallel der mittleren Hauptelastizitätsachse.

(Der Rechnung wurde das Mittel der beiden Metallkugel-Beobachtungen zugrunde gelegt.)

Schwefelkugel Haken II		Metallkugel
Stellung M	Stellung N	
$2R = 957,9$	$2R = 957,9$	$2R = 971,8$
$2A = 52,3-55,3$	$2A = 52,3-55,3$	$2A = 76,3-81,1$
1,24*	1,24*	1,07
1,23	1,22	1,07
1,24	1,22	1,07
1,24	1,23	1,07
1,23	1,22	1,07
1,25	1,22	1,07
<hr/>	<hr/>	<hr/>
M 1,238*	M 1,228*	M 1,07
$E' = 1,322$	$E' = 2,310$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,069$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,057$	
$2(R_m - R_i) = 4,0$	$2(R_m - R_i) = 5,4$	
$2(A_m - A_i) = 24,3$	$2(A_m - A_i) = 18,2$	
$E_m = 2,035$	$E_m = 2,02$	
im Mittel $E_m = 2,022$		

Schwefelkugel Haken I		Metallkugel
Stellung M	Stellung N	
$2R = 959,1$	$2R = 959,3$	$2R = 958,0$
$2A = 57,9-61,2$	$2A = 54,4-59,5$	$2A = 77,9-83,3$
1,25*	1,24	1,05
1,24	1,24	1,07
1,23	1,24	1,04
1,24	1,25	1,04
1,24	1,24	1,06
<hr/>	<hr/>	<hr/>
M 1,24	M 1,24	M 1,055
$E' = 1,324$	$E' = 1,324$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,072$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,072$	
$2(R_m - R_i) = 5,0$	$2(R_m - R_i) = 5,6$	
$2(A_m - A_i) = 18,4$	$2(A_m - A_i) = 20,4$	
$E_k = 2,046$	$E_k = 2,044$	
im Mittel $E_k = 2,045$		

Tabelle V.

Versuche mit der kleinen Schwefelkugel.
(Hakenstellung wie in Tabelle I.)

Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I Stellung M	Haken II Stellung M	
$2R = 867,8$	$2R = 866,9$	$R = 862,1$
$2A = 45,3-33,9$	$2A = 37,9-33,3$	$2A = 67,1-72,1$
1,34*	1,49*	1,56
1,30	1,53	1,55
1,32	1,51	1,45
1,34	1,45	1,48
1,34	1,45	1,56
1,33	1,47	1,58
1,30	1,47	1,60
	1,48	1,55
$M = 1,3243^*$	1,51	1,56
$E' = 2,042$	1,51	1,51
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,834$	1,52	1,56
$2(R_m - R_i) = -5,7$	1,52	
$2(A_m - A_i) = 31,2$	1,44	$M = 1,5418$
$E_g = 1,813$		
	$M = 1,4885$	
	$E' = 2,294$	
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,062$	
	$2(R_m - R_i) = -4,8$	
	$2(A_m - A_i) = 35,0$	
	$E_k = 2,086$	

Ich stellte endlich noch einige Versuche an, bei denen der Doppelhaken so aufgeklebt war, daß die Elektrizität zwar jedesmal parallel der Ebene zweier Hauptelastizitätsachsen, aber unter 45° gegen dieselben geneigt, auf die Schwefelkugel wirkte.

Dieser Fall läßt sich folgendermaßen theoretisch behandeln. Sei der nebenstehende Kreis der horizontale Querschnitt der Schwefelkugel mit dem Radius a , also derjenige, in dem die Einwirkung stattfindet. O sei sein Zentrum, OE_1 sei diejenige Richtung der Kreisebene, welcher die größte Dielektrizitäts-

Tabelle VII.

(Stellung der Haken wie in Tabelle IV.)

Metallkugel	Schwefelkugel Haken I Stellung M	Haken I Stellung N	Metallkugel
$2R = 1076,9$	$2R = 1075,6$	$2R = 1070,0$	$2R = 1072,5$
$2A = 87,8-95,8$	$2A = 32,2-40,2$	$2A = 39,2-41,9$	$2A = 87,6-93,6$
1,12	2,09*	2,14*	1,06
1,11	2,07	2,13	1,05
1,13	2,06	2,09	1,06
1,11	2,06	2,13	1,06
1,11	2,07	2,12	1,05
1,12	2,07	2,12	
1,12	2,05		
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
M 1,117	M 2,069*	M 2,121*	M 1,056
	$E' = 2,249$	$E' = 2,306$	
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,020$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,072$	
	$2(R_m - R_i) = 1,3$	$2(R_m - R_i) = 2,5$	
	$2(A_m - A_i) = 53,4$	$2(A_m - A_i) = 50,9$	
	$E_m = 1,972$	$E_m = 2,024$	
	im Mittel $E_m = 1,998$		

Schwefelkugel Haken II Stellung M	Haken II Stellung M	Metallkugel
$2R = 1067,9$	$2R = 1051,9$	$2R = 1058,2$
$2A = 38,6-40,5$	$2A = 38,9-39,7$	$2A = 93,4-99,4$
2,15*	2,24*	1,12
2,15	2,24	1,11
2,18	2,23	1,10
2,18	2,22	1,11
2,17	2,22	1,12
2,21		
<hr/>	<hr/>	<hr/>
M 2,173*	M 2,23*	M 1,112
$E' = 2,356$	$E' = 2,417$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,116$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,171$	
$2(I'_m - R_i) = 4,6$	$2(R_m - R_i) = 6,3$	
$2(A_m - A_i) = 52,0$	$2(A_m - A_i) = 56,4$	
$E_k = 2,068$	$E_k = 2,106$	
im Mittel $E_k = 2,087$		

konstante D_1 , $O E_2$ jene, der die kleinste Dielektrizitätskonstante D_2 entspricht;

$$E_1 \text{ sei } = \frac{D_1 + 2}{D_1 - 1}, \quad E_2 = \frac{D_2 + 2}{D_2 - 1}.$$

In X befinde sich die wirkende elektrische Masse e , $O X$ sei gleich p , $\sphericalangle X O E_1 = \varphi$. In Y sei der Drehpunkt der Drehwage, $O Y$ sei $= h$. Die gesamte im Innern der Schwefel-

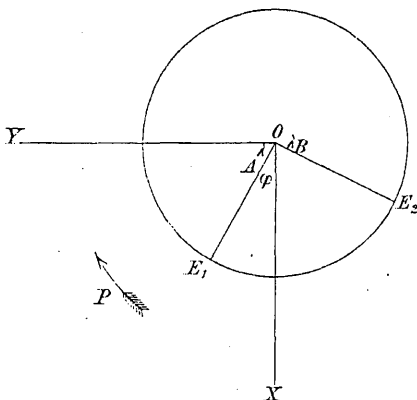


Fig. 2.

kugel in der Richtung XO wirkende elektrische Kraft ist e/p^2 (wenn XO sehr groß ist). Man zerlegt sie in die Komponenten $e/p^2 \cdot \cos \varphi$ in der Richtung $E_1 O$ und $e/p^2 \cdot \sin \varphi$ in der Richtung $E_2 O$. Die erstere erzeugt in der Kugel das elektrische Moment

$$\frac{e a^3 \cos \varphi}{E_1 p^2},$$

letztere

$$\frac{e a^3 \sin \varphi}{E_2 p^2},$$

jede in ihrer Richtung.

Wir können daher die Wirkung der Schwefelkugel ersetzen durch die von vier elektrischen Massen

$$e_1 = \frac{e a^3 \cos \varphi}{E_1 p^2 \lambda} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{e a^3 \sin \varphi}{E_2 p^2 \lambda}$$

in O und

$$e_3 = - \frac{e a^3 \cos \varphi}{E_1 p^2 \lambda}$$

in A und

$$e_4 = - \frac{e \alpha^3 \sin \varphi}{E_3 p^2 \lambda}$$

in B , wenn $OA = OB = \lambda$. Die Wirkung der elektrischen Kraft von e auf diese elektrischen Massen liefert zusammen zwei Kräfte von den Intensitäten

$$(2) \quad \frac{2 e^2 \alpha^3}{p^5} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{E_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{E_2} \right)$$

und

$$(3) \quad - \frac{e^2 \alpha^3 \sin 2 \varphi}{2 p^5} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right),$$

erstere in der Richtung OX , letztere in der Richtung OY und ein Drehungsmoment von der Stärke

$$(4) \quad - \frac{e^2 \alpha^3 \sin 2 \varphi}{2 p^4} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right),$$

welches die Kugel um die Z -Achse, und zwar von der positiven X -Achse gegen die positive Y -Achse zu, also in der Richtung des Pfeiles P zu drehen sucht.

Die Kraft, welche in der Richtung der Y -Achse wirkt, übt keinen Einfluß auf die Drehwaage, sobald die Linie OX senkrecht auf dem Hebelarme steht, wenn jedoch diese Bedingung nicht erfüllt ist, so gibt sie Veranlassung zu einer Fehlerquelle. Das Moment wirkt gerade so auf die Drehwaage, als ob auf die eingehängte Kugel eine Kraft von der Stärke

$$(5) \quad - \frac{e^2 \alpha^3 \sin 2 \varphi}{2 p^4 h} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

anziehend wirkte. Im ganzen wird also die Drehwaage so abgelenkt, als ob auf die Kugel die Anziehung

$$(6) \quad \frac{2 e^2 \alpha^3}{p^5} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{E_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{E_2} \right) - \frac{e^2 \alpha^3 \sin 2 \varphi}{2 p^4 h} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

wirken würde. Die Anziehung der Metallkugel ist wie sonst

$$\frac{2 e^2 \alpha^3}{p^5}.$$

Der reziproke Wert des Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Anziehung der Schwefelkugel, welche der Drehwaage den gleichen Ausschlag erteilen würde, dividiert, hat also den Wert

$$(7) \quad \frac{1}{E \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{E_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{E_2} - \frac{p \sin 2 \varphi}{4 h} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right).$$

Bei meinen Beobachtungen hatte φ den Absolutwert 45° , und zwar ist es gleich $+45^\circ$ zu setzen, wenn die Richtung der größten Dielektrizitätskonstante innerhalb der vom Kugelmittelpunkt nach der wirkenden Elektrizitätsmenge und nach dem Drehpunkte der Drehwaage gezogenen Linien fällt. Sonst ist $\varphi = -45^\circ$. Den Haken, bei dessen Einhängung die erste Lage der Kugel stattfindet, will ich den Haken 1, den anderen den Haken 2 nennen.

Bei den in Tabelle VIII zusammengestellten Zahlen geschah die Wirkung in der Ebene der größten und kleinsten Hauptelastizitätsachse, bei den übrigen in der Ebene der mittleren und kleinsten Hauptelastizitätsachse.

Tabelle VIII.

Kleine Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I	Haken II	
$2R = 789,1$	$2R = 791,2$	$2R = 781,8$
$2A = 27,7-36,5$	$1A = 25,7-41,5$	$2A = 73,1-78,8$
1,50*	1,43*	1,52
1,49	1,44	1,53
1,52	1,42	1,53
1,51	1,43	1,54
1,51	1,43	1,54
1,48	1,45	1,54
1,51	1,42	1,52
<hr/> $M = 1,503^*$	<hr/> $M = 1,431^*$	<hr/> $M = 1,5287$
$E' = 2,298$	$E' = 2,188$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,064$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,996$	
$2(R_m - R_i) = -7,3$	$2(R_m - R_i) = -9,4$	
$2(A_m - A_i) = -41,3$	$2(A_m - A_i) = 4,11$	
$E^{45} = 2,031$	$E^{45} = 1,937$	

Will man die Werte E^{45} und E^{-45} dieser Tabelle nach Formel (7) berechnen, so hat man in jener Formel $E_1 = E_g$, $E_2 = E_k$ zu setzen.

Nimmt man für E_g und E_k die aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgenden Werte, so ergibt sich $E^{45} = 2,084$, $E^{-45} = 1,867$.

Tabelle IX.

Große Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I	Haken II	
$2R = 916,1$	$2R = 906,2$	$2R = 912,3$
$2A \ 46,1-47,9$	$2A \ 50,4-52,1$	$2A \ 61,0-63,7$
1,19*	1,12*	1,14
1,18	1,09	1,12
1,17	1,09	1,13
1,15	1,10	1,15
1,16	1,11	1,16
1,16	1,10	1,14
1,16	1,12	1,15
1,16		
1,166*	1,104*	1,141
$E' = 1,331$	$E' = 1,260$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2,084$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1,973$	
$2(R_m - R_i) = -3,8$	$2(R_m - R_i) = 6,1$	
$2(A_m - A_i) = 14,8$	$2(A_m - A_i) = 10,7$	
$E^{45} = 2,073$	$E^{45} = 1,957$	

Berechnet man wie bei Tabelle VIII die Werte von E^{45} und E^{-45} nach Formel (7), so hat man $E_1 = E_m$ oder $E_2 = E_k$ zu setzen. Nimmt man wieder für E_g und E_k die aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgenden Werte, so findet man $E^{45} = 2,132$, $E^{-45} = 2,062$.

Die beiden in meiner zweiten Abhandlung in den §§ 1 und 4 besprochenen Korrekturen habe ich, weil sie sehr unsicher und jedenfalls zu groß sind, unterlassen. In den folgenden beiden Tabellen sind die bei sämtlichen Beobachtungen gefundenen Werte des E mit dem aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgenden zusammengestellt. Die als Überschrift über den Vertikalreihen stehenden Ziffern geben an, in welcher Tabelle die dem Werte des E entsprechenden Beobachtungen angeführt sind.

Der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Werte des E ist durchaus in den beobachteten Werten sehr scharf markiert, so daß kaum mehr ein Zweifel sein kann,

daß die Dielektrizität des kristallisierten Schwefels in der Tat nach den verschiedenen Richtungen verschieden ist, und zwar in der von der elektromagnetischen Lichttheorie geforderten Weise. Die Werte von E_m und E_k sind so nahe, daß meine Methode einer erheblichen Verfeinerung bedürfte, um dieselben quantitativ zu messen. Doch stellte sich der Unterschied immer noch wenigstens qualitativ heraus.

Tabelle X. Große Schwefelkugel.

Wirkung in der Richtung der Hauptelastizitätsachsen.

Nach der elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet			
		I	II	III	IV
E_g	1,812	1,734	1,803	1,817	—
E_m	2,040	—	—	—	2,022
E_k	2,157	2,063	2,067	2,061	2,045

Tabelle XI. Kleine Schwefelkugel.

Nach der elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet		
		V	VI	VII
E_g	1,812	1,813	1,802	—
E_m	2,040	—	—	1,998
E_k	2,157	2,036	2,101	2,087

Tabelle XII.

Wirkung unter 45° gegen die Hauptelastizitätsachsen geneigt.

Nach der elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet	Nach der elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet
VIII			IX		
E^{45}	2,084	2,031	E^{45}	2,132	2,073
E^{-45}	1,867	1,937	E^{-45}	2,062	1,957

Auch bei der Größe E^{45} und E^{-45} war von vornherein eine große Übereinstimmung nicht zu erwarten, teils wegen der Schwierigkeit, den Haken genau unter 45° geneigt aufzukleben, teils weil bei dieser Stellung eine kleine Abweichung von diesem Winkel sowie von der senkrechten Stellung des Hebelarmes der Drehwaage auf der Verbindungslinie der Centra

der wirkenden und beweglichen Kugel von besonders großem Einflusse auf das Resultat sind.

Im Mittel ergibt sich aus allen meinen Beobachtungen für kristallisierten Schwefel

$$E_g = 1,795, \quad E_m = 2,010, \quad E_k = 2,067;$$

daher für die Dielektrizitätskonstanten

$$D_g = 4,773, \quad D_m = 3,970, \quad D_k = 3,811;$$

während die elektromagnetische Lichttheorie liefert

$$D_g = 4,596, \quad D_m = 3,886, \quad D_k = 3,591.$$

Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte.

(Auszug; die ausführlichen Abhandlungen befinden sich in den Bänden 66, 68 und 70 der Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien.¹⁾
Pogg. Ann. 153. S. 525—534. 1874.)

Aus der durch Clausius, Maxwell und Helmholtz ausgearbeiteten Theorie des Verhaltens dielektrischer Nichtleiter im elektrischen Felde folgt eine merkwürdige Konsequenz, die bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint, nämlich, daß elektrische Kräfte auf einen Nichtleiter, ohne daß sich derselbe elektrisiert, bloß vermöge seiner dielektrischen Polarisirung, ganz erhebliche Anziehungen ausüben müssen; und zwar finde ich aus der Helmholtzschen Theorie, daß eine nicht leitende Kugel, wenn sie so klein ist, daß bei Berechnung der Elektrizitätsverteilung in derselben das Feld als homogen betrachtet werden kann, $(D - 1)/(D + 2)$ mal so stark angezogen werden muß, als eine gleich große leitende Kugel unter Einfluß derselben Kräfte, wenn letztere isolirt und ursprünglich unelektrisch ist, so daß sie nur durch Induktion elektrisch wird. Hierbei ist D die von Maxwell so bezeichnete Größe, also identisch mit der von Helmholtz mit $1 + 4\pi\epsilon$ bezeichneten. Ich nenne diese Größe die Dielektrizitätskonstante des Isolators. Um diese Konsequenz der Theorie zu bestätigen, stellte ich folgende Versuche an.

Es wurde eine Kugel aus dem zu untersuchenden isolierenden Materiale an vollkommen isolierenden Fäden an den einen Hebelarm einer sehr empfindlichen Drehwage gehängt, deren anderer Hebelarm mit einem Spiegel äquilibrirt war, mittels dessen in der bekannten Weise die kleinsten Drehungen der Drehwage abgelesen werden konnten. In einiger Entfernung von der isolierenden Kugel stand eine fixe Kugel, die

¹⁾ Diese Sammlung Nr. 23 ff.

durch Funken einer Influenzmaschine geladen und wieder entladen werden konnte. Die ganze Drehwage befand sich in einer bis auf die erforderlichen Schlitz verschlossenen Schachtel aus Goldpapier, aus der nur die isolierende Kugel an ihrem Faden heraushing. Früher war sorgfältig geprüft worden, daß weder der Faden, an dem die Kugel hing, noch die in der Schachtel befindlichen Bestandteile eine Einwirkung erfuhren, daß also der bei Elektrisierung der fixen Kugel eintretende Ausschlag der Drehwage nur von der Wirkung der Elektrizität der fixen Kugel auf die isolierende herrühren konnte. Daß letztere nicht schon früher elektrisch war und sich auch nicht merklich dauernd elektrisierte, wurde konstatiert, indem die fixe Kugel bald mehrmal nacheinander positiv, bald abwechselnd positiv und negativ geladen wurde. Genau an die Stelle der nicht leitenden Kugel konnte eine gleichgroße leitende (ursprünglich unelektrische) Kugel gehängt werden, um die Einwirkung, welche beide erfuhren, zu vergleichen. Wenn auch die Schlagweite gleich blieb, so war es doch nicht möglich, der fixen Kugel bei den verschiedenen Versuchen, die teils nach Einhängung der isolierenden, teils nach Einhängung der leitenden, aber isolierten Kugel gemacht wurden, immer genau dieselbe Elektrizitätsmenge zuzuführen. Um den daher rührenden Fehler korrigieren zu können, war die fixe Kugel mit einer zweiten fixen leitend verbunden, der eine ganz ähnliche Drehwage (aber mit leitend mit der Erde verbundener Kugel) gegenüberstand.

Der Ausschlag der zweiten Drehwage diente als Maß der mitgeteilten Elektrizitätsmenge. Das Verfahren war nun folgendes: In die erste Drehwage wurde die nicht leitende Kugel eingehängt. Nun ließ man einen Funken überspringen, welcher zunächst die beiden fixen Kugeln elektrisierte. Durch ihre Wirkung auf die hängenden gerieten die beiden Drehwagen in Schwingungen. Da sie nicht rasch genug zur Ruhe kamen, wurde ihr Ausschlag in bekannter Weise aus mehreren Ablesungen berechnet. Da die Ausschläge sehr klein waren, konnten sie als der Kraft proportional betrachtet werden. Den Ausschlag der ersten, dividiert durch den der zweiten Drehwage, bezeichne ich kurz als „die Anziehung der isolierenden Kugel“. Jetzt wurde an die Stelle der nicht leitenden die

gleichgroße leitende Kugel gehängt. Der Ausschlag der ersten Drehwage, dividiert durch den der zweiten, soll jetzt „die Anziehung der leitenden Kugel“ heißen. Der Quotient der Anziehung der nicht leitenden Kugel in die der leitenden ist jedesmal die in der folgenden Tabelle angeführte Zahl. Derselbe soll immer mit E bezeichnet werden. Die Zahlen dieser Tabelle geben also an, um wievielfach die leitende, aber isolierte Kugel stärker angezogen wird als eine gleichgroße unter denselben Umständen befindliche nicht leitende. Dieser Quotient war oft von der Zeit der Einwirkung abhängig, ein Phänomen, welches ich als die elektrische Nachwirkung, Faraday als elektrische Absorption bezeichnet.

	Zeit der Einwirkung				
	0,9 ^s	1,8 ^s	22½ ^s	45 ^s	90 ^s
Schwefel	—	2,125	—	2,110	—
Hartgummi	—	2,064	—	2,094	—
Paraffin	2,980	2,920	—	1,420	—
Kolophonium	2,140	1,927	1,730	1,700	1,650

Um schon aus dieser vorläufigen Notiz eine beiläufige Schätzung der von mir erzielten Genauigkeit möglich zu machen, teile ich die Details für die erste in der obigen Tabelle enthaltene Mittelzahl mit. Die Anziehung der Schwefelkugel 5 mal gemessen ergab sich zu

$$\begin{array}{cccccc}
 + & + & - & - & + & \\
 0,560, & 0,547, & 0,548, & 0,562, & 0,559 & \text{Mittel } 0,555.
 \end{array}$$

Die Anziehung der gleich großen leitenden Kugel aber war

$$\begin{array}{cccccc}
 + & + & - & - & + & \\
 1,175, & 1,180, & 1,188, & 1,173, & 1,179 & \text{Mittel } 1,179.
 \end{array}$$

Die darüber stehenden Zeichen geben an, mit welcher Elektrizität die fixen Kugeln geladen wurden. Der Quotient E ist

$$\frac{1,179}{0,555} = 2,125.$$

Nach der Dielektrizitätstheorie sollten die in der obigen Tabelle enthaltenen Zahlen den Wert $(D + 2)/(D - 1)$ haben;

also wenn man die aus der ersten Versuchsreihe von mir gefundenen Zahlen zugrunde legt

für Schwefel	2,06
für Hartgummi	2,39
für Paraffin	3,28
für Kolophonium	2,93 .

Die Zahl für Schwefel zeigt eine genügende Übereinstimmung; für denselben scheint also D innerhalb weiter Grenzen konstant zu sein. Hartgummi wird bereits merklich stärker angezogen; für denselben scheint also D , folglich auch ϵ mit wachsender Ladung zu wachsen. Noch weit mehr gilt dies vom Kolophonium und Paraffin, und zwar ist bei den beiden letzten D von der Zeit der Einwirkung abhängig. Je länger die elektrischen Kräfte wirken, desto bedeutender wird die dielektrische Polarisierung. Leider gestattete mein in Eile zusammengestellter Apparat in dieser Hinsicht keine sehr große Mannigfaltigkeit; auch konnte ich die Stärke der elektrisierenden Kraft nicht genügend variieren, um mit der Drehwaage allein die Abhängigkeit des D von derselben zu konstatieren. Ich glaube aber, daß meine Methode, die Anziehung isolierender Körper durch elektrische Kräfte zu prüfen, unter den verschiedensten Verhältnissen durchgeführt, imstande wäre, noch reichen Aufschluß über das bisher so wenig erforschte Verhalten der Isolatoren im elektrischen Felde zu liefern. Ich machte später Versuche, wobei der zu den fixen Kugeln führende Draht in der Weise isoliert an eine schwingende elektromagnetische Stimmgabel befestigt war, daß er in der Sekunde über 100 mal an die positive und ebensooft an die negative Elektrode der Influenzmaschine stieß, so daß auf die zu untersuchende Kugel rasch abwechselnd bald positive bald negative Elektrizität wirkte. Die Anziehung der dielektrischen Kugeln, die sich hierbei ergab, stimmte auch bei Hartgummi, Paraffin und Kolophonium mit der theoretisch berechneten.

Ich führte diese Arbeiten im Laboratorium des Hrn. Prof. Töppler zu Graz aus, dem ich für die Zuvorkommenheit, mit der er mir die Räumlichkeiten, Apparate usw. zur Verfügung stellte, den wärmsten Dank sage. Zu besonderem Dank bin ich auch noch Hrn. Dr. Albert v. Eттingshausen, Assistenten für Physik an der Grazer Universität, verpflichtet,

welcher mich sowohl bei der Zusammenstellung der Apparate, als auch bei den Ablesungen (da immer in zwei Fernröhren gleichzeitig abgelesen werden mußte) mit nicht geringen Opfern von Zeit und Mühe unterstützte.

Die hier mitgeteilten Zahlen gewinnen ein erhöhtes Interesse, wenn sie mit der Arbeit Maxwells „*A dynamical theory of the electromagnetic field*“, Transactions of the Royal Society of London 1865, Part. I, S. 459 verglichen werden. Dasselbst stellt nämlich Maxwell die Hypothese auf, daß Licht und Elektrizität verschiedene Bewegungsformen eines und desselben Mediums sind, die sich beide aus den Bewegungsgleichungen, die er für jenes Medium aufstellt, ableiten lassen.

Aus diesen Bewegungsgleichungen folgt zwischen der Dielektrizitätskonstante D und dem Brechungsindex i irgend einer Substanz die Relation

$$i = \sqrt{D\mu}$$

(siehe Maxwells Gleichung 80). μ ist der Koeffizient der magnetischen Induktion der betreffenden Substanz. Derselbe ist allerdings für keine der von mir untersuchten Substanzen bekannt. Doch läßt sich leicht zeigen, daß er unmöglich erheblich von dem der Luft verschieden sein kann; daß er also nahe gleich Eins ist, wenn man wieder den für Luft gleich Eins setzt.

Man findet leicht, daß eine Kugel von unendlicher Magnetisierungskonstante im nahe homogenen Felde $(\mu + 2)/(\mu - 1)$ mal so stark angezogen wird, als eine gleich große von der Magnetisierungskonstante μ . Nun wird aber eine Eisenkugel nach allen Beobachtungen viel stärker als 10000 mal so stark angezogen, als eine gleich große Wismutkugel abgestoßen wird. Da zudem die Magnetisierungskonstante des Eisens jedenfalls nicht unendlich ist, so folgt, daß für Wismut jedenfalls

$$\frac{\mu + 2}{1 - \mu} > 10000,$$

folglich μ um weniger als 0,0003 von der Einheit verschieden ist.

Da wir hier alle Verhältnisse viel zu ungünstig annahmen und $\pm(\mu - 1)$ für meine Substanzen jedenfalls noch viel kleiner als für Wismut ist, so kann wohl über die verschwindende Kleinheit dieser Größe kein Zweifel obwalten. Es ist also für

die von mir untersuchten Substanzen $\mu = 1$ zu setzen und es müßte nach der Maxwell'schen Ansicht über das Wesen des Lichtes und der Elektrizität der Brechungsexponent einfach die Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante sein. Um diese Konsequenz aus meinen Versuchen zu prüfen, stelle ich in der folgenden Tabelle die Quadratwurzeln von D mit den Brechungsexponenten i der betreffenden Substanzen zusammen:

	\sqrt{D}	i
für Schwefel	1,960	2,040
für Kolophonium . . .	1,597	1,543
für Paraffin	1,522	1,538, 1,516
für Hartgummi	1,778	—

Der von mir nach der Wollastonschen Methode bestimmte Brechungsexponent des wahrscheinlich doppeltbrechenden Paraffin fiel merkwürdigerweise verschieden aus, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Reflexionsebene polarisiert war. Ersterem gehört der größere, letzterem der kleinere der angeführten Brechungsexponenten an. Ich glaube, daß die Differenzen dieser Zahlen nicht so groß sind, daß sie nicht aus den bei Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten unvermeidlichen Fehlern erklärt werden könnten, besonders da D für eine und dieselbe Substanz jedenfalls nicht absolut konstant ist. Daß ich die Dielektrizitätskonstante für den Schwefel etwas zu klein fand, ließe sich ganz gut aus den Hohlräumen erklären, die sich in meinen Schwefelplatten tatsächlich fanden. Auch von der Dielektrizitätskonstante des Kolophoniums kann wegen der großen Schwierigkeit, gleich dicke Kolophoniumplatten mit erträglich ebener Oberfläche zu erzeugen, keine allzu große Genauigkeit erwartet werden. Durch die auseinandergesetzte Methode wurde ich instand gesetzt, auch solche Substanzen auf ihre Dielektrizitätskonstante zu untersuchen, welche nicht in Form großer Platten erhalten werden können. Dadurch gelang es mir, der elektromagnetischen Lichttheorie eine neue Bestätigung zu verschaffen. Nach dieser Theorie muß nämlich die Konstante anisotroper kristallisierter Körper verschieden ausfallen, je nachdem die elektrischen Kräfte in verschiedenen Richtungen darauf wirken und zwar in einer Weise, welche sich aus den optischen Eigenschaften genau vorherbestimmen läßt. Unter allen doppeltbrechenden Kristallen

fand ich bisher nur einen, den Schwefel, welcher so vollkommen isoliert und so wenig dielektrische Nachwirkung zeigt, daß er sich zur Untersuchung eignet. Der Geschicklichkeit des Optikus Hrn. Steeg in Homburg verdanke ich zwei aus natürlichen Schwefelkristallen geschliffene Kugeln, die mich vollkommen befriedigten. Die Bestimmung der Lage der optischen Achsen in denselben verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. v. Lang. Ich untersuchte beide Kugeln, indem ich die Elektrizität bald in der Richtung der Halbierungslinie des spitzen Winkels der optischen Achsen, bald in der des stumpfen und bald senkrecht auf beiden wirken ließ; ich will diese Richtungen der Reihe nach kurz als die Richtungen *A*, *C* und *B* bezeichnen. Die Mittelwerte der von mir mit *E* bezeichneten Größe, welche sich nach den verschiedenen Richtungen ergaben, sind in der folgenden Tabelle mit den aus der Maxwell'schen Theorie folgenden zusammengestellt. Wo mehrere Versuchsreihen gemacht wurden, sind den Mittelwerten in Klammern die extremsten beigefügt.

	theoretisch	experimentell	
		1. Kugel	2. Kugel
Richtung <i>A</i>	1,82	1,79 (1,73, 1,82)	1,805 (1,80, 1,81)
Richtung <i>B</i>	2,04	2,02	2,00
Richtung <i>C</i>	2,16	2,06 (2,04, 2,07)	2,07 (2,03, 2,10)

Der theoretischen Berechnung wurden die von Prof. Schrauf bestimmten Brechungsquotienten kristallisierten Schwefels zugrunde gelegt. Um eine größere Übereinstimmung zu erzielen, müßte die Kugel mit größerer Sorgfalt richtig eingehängt werden: am besten würde man die Lage der optischen Achsen gegen die Wirkungsrichtung erst während sie hängt bestimmen. Es wurde mit großer Sorgfalt konstatiert, daß die beobachtete Asymmetrie nicht in zufälligen äußeren Ursachen ihren Grund hat, worüber ich jedoch auf die ausführliche Abhandlung verweisen muß. Ich bemerke noch, daß hiermit auch definitiv

entschieden ist, daß das Licht senkrecht zur Polarisations-ebene schwingt.

Ich stellte außerdem nach derselben Methode noch einige Versuche mit Paraffinkugeln an. Auch die Größe der Paraffinkugeln war dieselbe. Doch war mit besonderer Sorgfalt darauf gesehen, daß dieselben möglichst genau die Kugelgestalt hatten. Die Abweichungen der Längen der verschiedenen Durchmesser wurden mit einem Mikroskope mit Okularmikrometer gemessen und die Rechnung ergab, daß, wenn die Kugel ein Ellipsoid gewesen wäre, dessen verschiedene Durchmesser dieselben Abweichungen gehabt hätten und dies Ellipsoid bei Berechnung der dielektrischen Fernwirkung als Kugel von gleichem Volumen in Rechnung gezogen worden wäre, dies keinen bemerkbaren Fehler veranlaßt hätte. Die beiden wirkenden Kugeln wurden alternierend geladen, wobei sie aber mit zwei Quadranten eines Kirchhoffschen Elektrometers verbunden waren; der bewegliche Teil (Wagbalken) dieses Elektrometers war nicht aus Aluminiumdraht, sondern aus einer halbleitenden Substanz (Pappe), so daß die alternierende Ladung auf ihn nicht wirkte, wohl aber mußte er durch den etwaigen Überschuß einer Elektrizität abgelenkt werden. Mittels dieser Vorrichtung wurde konstatiert, daß auch jener Überschuß keinen schädlichen Einfluß auf das Resultat haben konnte. Drei Versuchsreihen ergaben für die in der zitierten Abhandlung mit E bezeichnete Größe die Werte: 3,267, 3,213, 3,220, Mittel 3,233, woraus sich die Dielektrizitätskonstante des Paraffins gleich 2,343 ergibt.

Außerdem untersuchten die Herren Romich, Novak und Faydiga, studd. phil. an der Grazer Universität, die dielektrische Anziehung von Schwefelkugeln, die mit einer dünnen Harz- oder Paraffinschicht überzogen waren und von Paraffinkugeln, die mit einer Harzschicht bekleidet waren. Wenn die Schicht nicht zu dick war, so war die dielektrische Anziehung dieselbe, als ob jene Schicht nicht vorhanden gewesen wäre. Endlich untersuchten die genannten Herren noch vier Kugeln aus Kalkspat, Glas, Flußspat und Quarz und Selen. Die Dielektrizitätskonstanten dieser Substanzen stimmten nicht mit der Maxwell'schen Theorie, sondern waren durchaus größer. Bei allen diesen Substanzen zeigte sich jedoch eine Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Zeit der Einwirkung,

also dielektrische Nachwirkung. Da diese nun bei den dielektrischen Versuchen nicht unter $\frac{1}{500}$ Sekunde lag, bei den Lichtschwingungen aber viel kleiner als ein Billionstel Sekunde ist, so wird hieraus die Nichtübereinstimmung begrifflich.

Ich stelle zum Schlusse die Mittelwerte der Dielektrizitätskonstanten zusammen, wie sie sich erstens aus meinen nach Faradays Methode mittels eines Kondensators angestellten Versuchen, zweitens aus meinen Versuchen über dielektrische Fernwirkung auf kleine Kugeln, drittens aus der elektromagnetischen Lichttheorie ergeben:

	aus den Kondensator- versuchen	aus der di- elektrischen Fernwirkung	aus d. elektro- magnetischen Lichttheorie
Schwefel	3,84	3,94	4,06
Paraffin	2,32	2,32	2,33
Kolophonium . . .	2,55	2,48	2,38
Hartgummi	3,15	3,48	—

Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.¹⁾

(Wien. Ber. 70. S. 275—306. 1874 und Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. S. 624. 1876.²⁾)

I. Aufsuchung des mathematischen Ausdrucks für die elastische Nachwirkung.

Schon Weber und Kohlrausch, welche zuerst die elastische Nachwirkung untersuchten (Pogg. Ann. 54, S. 119 und 128), waren bemüht, eine allgemeine, und zwar sogar eine auf Betrachtungen über die Molekularkonstitution der Körper gegründete Formel für die Gesetze derselben aufzustellen. Ihre Formeln sind jedoch nur auf die speziellen von ihnen untersuchten Fälle anwendbar. Sie lösen das Problem nicht vollkommen allgemein, d. h. sie sind nicht imstande, folgende Frage zu beantworten: wie groß ist die elastische Nachwirkung, wenn die vorangegangene Deformation des Körpers eine ganz beliebige Funktion der Zeit ist? Später wurde meines Wissens nur noch eine Theorie der elastischen Nachwirkung aufgestellt, und zwar von Herrn Oskar Emil Meyer (Pogg. Ann. 131. S. 108). Dieselbe sucht allerdings das Problem in dieser Allgemeinheit zu lösen; allein die Gleichungen Herrn Meyers sind so beschaffen, daß man sich unschwer überzeugen kann, daß sie die charakteristischen Eigentümlichkeiten der elastischen Nachwirkung auch nicht qualitativ wiederzugeben imstande sind. Dieselben enthalten nämlich nur Differentialquotienten der Ver-

¹⁾ Vorläufiger Bericht über diese Arbeit Wien. Anz. 11. S. 172. 8. Oktober 1874.

²⁾ Der letztgenannte Abdruck hat mit Bezug auf den ersten die Fußnote: „Es ist dies der Aufsatz von welchem Herr O. E. Meyer (Pogg. Ann. 154. S. 360) behauptet, daß die daselbst aufgestellten Gleichungen mit den seinigen vollständig übereinstimmen“.

schiebungen nach den Koordinaten und nach der Zeit, woraus folgt, daß die auf eine Deformation folgende elastische Nachwirkung wesentlich von der Art und Weise abhängt, wie der Körper aus der Deformation wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Sie müßte ganz verschwinden, wenn jedes Element des Körpers nach einer beliebigen Deformation desselben auch nur sehr kurze Zeit durch entsprechende Kräfte in seiner ursprünglichen Lage ruhend erhalten würde, und sie müßte außerordentlich klein werden, wenn man den Körper langsam in seine Ruhelage zurückkehren ließe. Natürlich kann auch die Anwendung der Meyerschen Formeln auf spezielle Fälle nicht mit der Erfahrung stimmen. In den beiden Fällen, die Herr Meyer der Betrachtung unterzieht, dem der Dehnung und dem der Torsion eines Drahtes, findet er allerdings elastische Nachwirkung, allein dieselbe rührt bloß daher, daß die hohen Obertöne in gewissen Fällen schwächer als der Grundton gedämpft werden.

Ein infolge der elastischen Nachwirkung gedehnter Draht müßte also keineswegs gleichförmig gedehnt sein; in demselben wäre vielmehr das untere Ende am stärksten nach abwärts verschoben. Dann würden solche Stellen kommen, welche fast gar nicht nach abwärts, vielleicht sogar nach aufwärts verschoben wären, dann wieder solche, die stärker nach abwärts verschoben wären usw. Ähnlich verhielte sich ein tordierter Draht. Außerdem würde der von Herrn Meyer hervorgehobene Fall, daß die elastische Nachwirkung länger dauert, als die (nicht von außen gedämpften) Schwingungen, nur dann eintreten, wenn die Bewegung des Drahtes bereits bei $\sqrt{2}$ mal kleinerer Länge desselben aperiodisch würde. Doch dies alles ist noch nicht die Hauptsache. Herr Meyer hat sich nämlich die Integration dadurch sehr erschwert, daß er einen Fall der Rechnung unterzog, der von den bisher experimentell geprüften und leicht zu prüfenden total verschieden ist, indem er das dehnende (bzw. tordierende) Gewicht als massenlos betrachtet. Das Gewicht spielt bei Herrn Meyer keine andere Rolle, als daß zu den Schwingungen eine konstante Dehnung (bzw. Torsion) des Fadens hinzukommt, welcher sonst ganz so schwingt, als ob sein unteres Ende vollkommen frei wäre, und er unter entsprechender Anregung schwänge. Legt man dem an-

gehängten Gewichte eine Masse bei, so verwandelt sich die für das freie Ende geltende Bedingung in folgende:

$$(1) \quad A - B \frac{d^2 u}{dt^2} = a \frac{du}{dx} + 2b \frac{d^2 u}{dx dt},$$

wobei für den Fall der Dehnung

$$A = \frac{P}{\varepsilon Q}, \quad B = \frac{M}{\varepsilon Q},$$

für den der Torsion

$$A = \frac{2D}{\pi R^4 \varepsilon}, \quad B = \frac{2K}{\pi R^4 \varepsilon}$$

ist. M ist die Masse, K das Trägheitsmoment des dehnenden Gewichtes. Im übrigen sind die Bezeichnungen die Meyerschen. Setzt man

$$u = \frac{A}{a} x + \omega$$

und

$$\omega = \sum C e^{-\alpha t} \sin \gamma x,$$

so muß γ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$(2) \quad \gamma \operatorname{tg} \gamma \lambda = \frac{1}{B}$$

sein; das dazu gehörige α ist durch die Gleichung:

$$\alpha^2 + a \gamma^2 - 2b \alpha \gamma^2 = 0$$

bestimmt. B ist die Länge, welche man dem Drahte, ohne dessen Dichte und Querschnitt zu ändern, geben müßte, damit er im Falle von Longitudinalschwingungen dieselbe Masse, im Falle von Torsionsschwingungen bezüglich seiner Mittellinie dasselbe Trägheitsmoment, wie das angehängte Gewicht hätte. Dieselbe ist bei den Beobachtungen meist sehr groß gegen die wirkliche Länge des Drahtes. Dann ist eine Wurzel der Gleichung (2) nahe gleich $1/\sqrt{B\lambda}$, die übrige nahe gleich $k\pi/\lambda$, wobei k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die erste Wurzel entspricht einer einfachen Pendelschwingung, die unverhältnismäßig langsam gegen alle übrigen geschieht, und welche allein der Beobachtung unterzogen zu werden pflegt.

Ihre Schwingungsdauer sei τ_1 .

Alle anderen Wurzeln entsprechen sehr raschen Pendelschwingungen, welche fast so vor sich gehen, als ob das untere Ende des Drahtes ebenfalls fix wäre.

Bezeichnen wir den reellen (positiven) Teil von α als den Extinktionskoeffizienten. Dann ist der Extinktionskoeffizient ε_1 der langsamsten Pendelschwingungen $= b/B\lambda$, der kleinste Extinktionskoeffizient ε_2 jener raschen Schwingungen, denen Herr Meyer die elastische Nachwirkung zuschreibt, aber ist $= a/2b$. Das Verhältnis $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ ist also nahe gleich $(1/2\pi^2)\varepsilon_1^2\tau_1^2$. Denn für die Schwingungsdauer τ_1^2 der langsamsten Schwingungen findet man den Wert

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a}{B\lambda} - \frac{b^2}{B^2\lambda^2}}}, \text{ also nahezu } 2\pi\sqrt{\frac{B\lambda}{a}}.$$

$\varepsilon_1\tau_1$ ist die Größe, welche man gewöhnlich als das logarithmische Dekrement bezeichnet. Dieselbe war sowohl bei den Versuchen Warburgs (Berl. Monatsb. Juli 1869) als auch bei denen Streintz' (Wiener Sitzungsber. 69), die sich auf gewöhnliche Temperaturen bezogen, kleiner als 0,01. Es folgt daraus, daß die langsamsten Schwingungen unter den Verhältnissen, wie sie bei den bisher untersuchten Fällen statthatten, nach den Meyerschen Gleichungen weitaus den kleinsten Extinktionskoeffizienten haben, und daher die Formeln Meyers keine Spur elastischer Nachwirkung liefern, nicht einmal dann, wenn die langsamsten Schwingungen durch äußere Einflüsse hunderttausendmal so rasch beruhigt würden. Wenn man das dehnende Gewicht mittels der Hand langsam in seine ursprüngliche Lage zurückkehren läßt, so werden übrigens dadurch nicht bloß die langsamsten, sondern auch die raschen Schwingungen aufgehalten.

Bei dieser Sachlage dürfte es kaum überflüssig sein, wenn ich hier einige Formeln mitteile, welche ebenfalls eine allgemeine Auflösung des oben angeführten Problems der elastischen Nachwirkung in seiner größten Allgemeinheit geben, und welche jedenfalls qualitativ die Phänomene der elastischen Nachwirkung richtig liefern dürften; ob auch quantitativ, wird erst entschieden werden können, wenn mannigfaltigere experimentelle Daten vorliegen. Doch habe ich wenigstens in den wichtigsten Fällen die Rechnung so weit durchgeführt, daß eine unmittelbare Vergleichung mit dem Experimente ohne alle Schwierigkeit möglich ist. Daß behufs einer unbedingten Übereinstimmung mit der Erfahrung meine Formeln noch einer Kor-

reaktion bedürfen werden, darauf deutet schon der von Weber und Kohlrausch beobachtete Umstand hin, daß dauernde Deformationen (unvollkommene Elastizität) eintritt, wenn der Draht nicht vorher einigemal hin und her tordiert wurde, sowie auch der von Streintz gefundene Einfluß vorangegangener Deformationen auf das logarithmische Dekrement. Trotzdem dürften meine Formeln den Experimentatoren vielleicht willkommene Anhaltspunkte geben.

Die Grundvorstellung, welche meinen Formeln zugrunde liegt, ist folgende. Denken wir uns einen elastischen parallel-epipedischen Körper, dessen Kanten parallel den Koordinatenachsen sind. Derselbe sei in der Richtung jeder der Koordinatenachsen gleichförmig gedehnt. Die Dehnung der Längeneinheit sei α in der Richtung der x -Achse, β in der Richtung der y -Achse, γ in der Richtung der z -Achse. Dann müßten auf die Begrenzungsfläche des Körpers lauter konstante normale Zugkräfte wirken, und zwar auf die beiden Flächen, welche senkrecht zur x -Achse stehen, muß auf die Flächeneinheit eine Zugkraft von der Intensität

$$(3) \quad N_1 = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha$$

wirken. Analoges gilt von der y - und z -Achse. λ und μ sind die bekannten von Lamé in seiner Elastizitätslehre gebrauchten Konstanten. Aus dieser Tatsache lassen sich die allgemeinen Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen für den als isotrop vorausgesetzten Körper ableiten, sobald man nur die Voraussetzung hinzunimmt, daß auch bei ungleichförmiger Dehnung sehr kleine Parallelepipede als gleichförmig gedehnt betrachtet werden können. (Vgl. die Elastizitätstheorie von Clebsch.) Von denselben Prinzipien gehe auch ich aus; nur nehme ich an, daß die Kräfte, die auf die Begrenzungsflächen des Parallelepipedes zu einer bestimmten Zeit wirken, nicht bloß abhängen von den Dehnungen des Parallelepipedes zu jener Zeit, sondern auch von den vorhergegangenen Dehnungen desselben, wobei jedoch eine Dehnung einen um so geringeren Einfluß hat, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar ist die Kraft welche zur Erzeugung einer bestimmten Dehnung erforderlich ist, geringer, wenn schon früher eine Deformation im gleichen Sinne statthatte. Ich will diese Tatsache, daß eine früher

vorhandene Dehnung die Kraft, welche zur Erzeugung einer Dehnung im gleichen Sinne notwendig ist, vermindert, „die durch jene frühere Dehnung erzeugte Kraftverminderung“ nennen. Wenn zu irgend einer Zeit τ während des Zeitdifferentials $d\tau$ der Körper die Dehnung $\alpha(\tau)$ hatte, so nehme ich an, daß die Kraftverminderung, welche diese Dehnung auf die zur Zeit t wirkende Kraft ausübt, proportional $d\tau$, $\alpha(\tau)$ und einer Funktion der Zeit $t - \tau$ ist, vor welcher die Dehnung statthatte.

Hierzu braucht man nur noch die Annahme hinzuzufügen, daß sich der Einfluß der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Deformationen superponiert, d. h. daß die Kraftverminderung, welche eine bestimmte vor einer bestimmten Zeit stattgefundene Dehnung erzeugt, nicht abhängt von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat,¹⁾ um sofort bis auf zwei Funktionen der Zeit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, welche angeben, in welcher Weise die kräftevermindernde Eigenschaft vorangegangener Deformationen von der Zeit abhängt, die Bewegungsgleichungen für isotrope Körper mit elastischer Nachwirkung aufstellen zu können. Wir betrachten zunächst wieder ein Parallelepipèd der Substanz. Die drei Dehnungen α , β , γ der Längeneinheit der drei Seiten seien zu jeder Zeit gleichförmig, aber zu verschiedenen Zeiten verschieden gewesen. Sie werden also Funktionen der Zeit t sein, weshalb wir sie mit $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ bezeichnen wollen.

Aus meinen Voraussetzungen ergibt sich dann, wenn man $t - \tau = \omega$ setzt und auch $d\omega$ für $d\tau$ einführt, statt der Formel (3) folgende:

$$N_1 = \lambda [\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)] + 2\mu \alpha(t) - \int_0^\infty d\omega \cdot \varphi(\omega) \cdot [\alpha(t - \omega) + \beta(t - \omega) + \gamma(t - \omega)] - 2 \int_0^\infty d\omega \psi(\omega) \cdot \alpha(t - \omega).$$

Hieraus findet man, wenn man genau so verfährt, wie es Clebsch an der zitierten Stelle tut, folgende allgemeine Gleichungen

¹⁾ Dieses Prinzip der Superposition ist für nicht allzu große Deformationen ziemlich plausibel, während es für sehr starke vielleicht nicht mehr anwendbar ist, für welche dann natürlich auch meine später entwickelten Formeln nicht mehr gelten würden.

$$(4) \quad \begin{cases} N_1 = \lambda(t) + 2\mu \frac{du(t)}{dx} - \int_0^\infty d\omega \left[\varphi(\omega) \cdot \theta(t-\omega) + 2\psi(\omega) \frac{du(t-\omega)}{dx} \right] \\ T_1 = \mu \left(\frac{dv(t)}{dx} + \frac{dw(t)}{dy} \right) - \int_0^\infty d\omega \psi(\omega) \left[\frac{dv(t-\omega)}{dx} + \frac{dw(t-\omega)}{dy} \right]. \end{cases}$$

Die Gleichungen für die übrigen Kräfte können nach Analogie gebildet werden. Die Bezeichnungen sind ganz die Lamés; $\theta(s)$, $u(s)$... sind die Werte dieser Größen zur Zeit s ; die Bewegungsgleichungen (Lamé, Leçons sur la théorie de l'élasticité. S. 66, équations [4]) bleiben vollständig unverändert.¹⁾

Die Funktion ψ wird durch Torsionsversuche bestimmt.

Werde ein Draht, der die Gestalt eines Zylinders von der Länge l und dem Radius R hat, tordiert; die Zylinderachse sei die x -Achse, für den obersten fixen Querschnitt sei $x = 0$.

Wir könnten die langsamsten Schwingungen, sowie sämtliche Obertöne genau nach der Methode berechnen, von der wir sahen, daß sie bei Lösung der Meyerschen Gleichungen angewendet werden muß. Da wir jedoch annehmen, das Trägheitsmoment des Gewichtes, mit dem der Draht beschwert ist, sei sehr groß, so erzielen wir sicher eine genügende Genauigkeit, wenn wir annehmen, daß der Draht in jedem Augenblicke gleichförmig tordiert ist. Wir haben dann zu setzen

$$u = 0, \quad v = -\frac{xz\vartheta(t)}{l}, \quad w = \frac{xy\vartheta(t)}{l}$$

und erhalten, indem wir nach Berechnung des Momentes sämtlicher elastischer Kräfte, die auf den untersten Querschnitt des Drahtes wirken, die Bewegungsgleichung für das angehängte Gewicht aufstellen

$$(5) \quad D - K \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l} \left[\mu \vartheta(t) - \int_0^\infty d\omega \psi(\omega) \vartheta(t-\omega) \right].$$

Dabei ist $\vartheta(t)$ der Winkel, um den infolge der Torsion der unterste Querschnitt des Drahtes zur Zeit t verdreht ist;

¹⁾ In der Ausgabe in den Pogg. Ann. findet sich folgende Bemerkung: „Ähnliche Gleichungen lassen sich aus der von mir [Borchards Journal 81 (diese Sammlung 35)] erwähnten Hypothese ableiten, wurden aber von Hrn. Meyer meines Wissens niemals daraus abgeleitet.“

D das auf denselben zur selben Zeit von außen wirkende Drehungsmoment.

Die Funktion ψ kann durch verschiedene Versuche bestimmt werden.

1. Der Draht sei anfangs vollkommen untordiert; dann werde er um einen gewissen Winkel c tordiert und diese Torsion konstant erhalten. (Ich sage immer, der Draht sei um einen gewissen Winkel tordiert, wenn sein unterster Querschnitt um diesen Winkel gedreht ist, sowie ich sage, ein Drehungsmoment wirkt auf den Draht, statt auf dessen untersten Querschnitt.) Sieht man von den jedenfalls rasch wieder verschwindenden, durch die Torsion erzeugten Schwingungen ab, so ist also zu setzen: von $t = -\infty$ bis $t = 0$, $\mathcal{D}(t) = 0$; für alle späteren t aber $\mathcal{D}(t) = c$, und man erhält

$$(6) \quad D = \frac{\pi R^4 c}{2l} \left[\mu - \int_0^t d\omega \psi(\omega) \right],$$

folglich

$$(7) \quad \psi(t) = -\frac{2l}{\pi R^4 c} \cdot \frac{dD}{dt}.$$

Bezeichnet man das Drehungsmoment, welches gleich nach der Torsion wirkte, mit D_0 , so ist

$$(8) \quad D_0 = \frac{\pi R^4 c \mu}{2l},$$

daher

$$(9) \quad \psi(t) = \frac{\mu}{D_0} \frac{dD}{dt}.$$

Führt man lieber die übrigens nur um eine Größe von der Ordnung der elastischen Nachwirkung von D_0 verschiedene Grenze D_∞ ein, der sich das Drehungsmoment nach sehr langer Zeit nähert, und bezeichnet mit μ' die Konstante

$$\mu - \int_0^\infty d\omega \psi(\omega),$$

so ist

$$(10) \quad \psi(t) = \frac{\mu'}{D_\infty} \frac{dD}{dt}.$$

Die Funktion $\psi(t)$ kann also bestimmt werden, wenn man D als Funktion der Zeit bestimmt hat. μ' ist der Wert der

Laméschen Konstante μ , den man erhält, wenn man die elastischen Kräfte durch jene Verschiebungen ausdrückt, die nach sehr langer Zeit unter deren Einfluß entstehen.

2. Man erteilt dem Drahte nur während kurzer Zeit (von $t = -\tau/2$ bis $t = +\tau/2$) eine konstante Torsion um den Winkel γ . Er würde dann, wenn nach der Zeit $+\tau/2$ auf sein unteres Ende keine Kraft mehr wirken würde, infolge der Nachwirkung noch längere Zeit ein wenig in demselben Sinne tordiert bleiben. Man bestimmt das Moment, welches zu irgend einer Zeit $t > +\tau/2$ auf das untere Ende wirken muß, um dasselbe fortwährend in jener Lage zu erhalten, welche es vor aller Torsion inne hatte. In diesem Falle ist $\vartheta(t)$ immer gleich Null, nur von $t = -\tau/2$ bis $t = +\tau/2$ ist es gleich γ .

Man hat also

$$(11) \quad D = -\frac{\pi R^4 \gamma}{2l} \int_{t - \frac{\tau}{2}}^{t + \frac{\tau}{2}} d\omega \psi(\omega),$$

und weil τ klein ist, nahe

$$(12) \quad \begin{cases} D = -\frac{\pi R^4 \gamma \tau}{2l} \psi(t) \\ \psi(t) = -\frac{2l D}{\pi R^4 \gamma \tau}, \end{cases}$$

oder wenn μ' dieselbe Bedeutung wie früher hat, Δ_0 , Δ_∞ aber die Werte sind, die aus den früher mit D_0 , D_∞ bezeichneten Größen entstehen, wenn man darin γ für c substituiert

$$(13) \quad \psi(t) = -\frac{\mu}{\tau} \frac{D}{\Delta_0} = -\frac{\mu'}{\tau} \frac{D}{\Delta_\infty}.$$

Wir haben bisher während der Zeit, während welcher die Nachwirkung beobachtet wird, die Torsion auf einem konstanten Werte c erhalten, und die Art und Weise studiert, wie sich das hierzu notwendige Drehungsmoment D verändert; wir wollen diesen Fall immer den der Kraftnachwirkung nennen. Unter „Verschiebungsnachwirkung“ dagegen wollen wir den Fall verstehen, wo das auf das freie Ende wirkende Drehungsmoment auf einem konstanten Werte D' erhalten wird, und die Verdrehung ϑ des unteren Querschnittes beobachtet wird. Es wäre daher bei der Verschiebungsnachwirkung in jedem Momente $D-D'$ dasjenige Drehungsmoment, welches

zu dem schon vorhandenen D hinzugefügt werden müßte, um die Torsion auf c zu bringen, also um $c - \vartheta$ zu vermehren. Weil die Nachwirkung immer klein ist, so kann man sie bei Aufstellung der Relation zwischen dem Momente $D - D'$ und der dadurch erzeugten Torsion $c - \vartheta$ vernachlässigen, wodurch man erhält

$$(14) \quad c - \vartheta = \frac{2l(D - D')}{\pi R^4 \mu}.$$

Aus dem sub 1 betrachteten Falle wird dadurch folgender:

3. Von $t = -\infty$ bis $t = 0$ war der Draht untordiert, für die folgenden Zeiten wirke auf ihn das konstante Drehungsmoment D' . Im ersten Momente der Wirksamkeit des Drehungsmomentes D' verhält sich der Draht dann ganz, wie in dem sub 1 betrachteten Falle, weshalb c und D' durch dieselbe Gleichung wie dort c und D_0 verbunden sind, also durch die Gleichung (8). Man hat also

$$D' = \frac{\pi R^4 c \mu}{2l}.$$

Die Torsion ϑ des Drahtes zur Zeit t findet man, indem man den durch Formel (6) gegebenen Wert von D in die Formel (14) substituiert und daraus ϑ berechnet, wodurch sich ergibt:

$$(15) \quad \vartheta = c + \frac{c}{\mu_0} \int_0^t d\omega \psi(\omega),$$

oder wenn man die Größe D' einführt:

$$(16) \quad \vartheta = \frac{2lD'}{\pi R^4 \mu} \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \int_0^t d\omega \psi(\omega) \right].$$

Die nach sehr langer Zeit eintretende Verdrehung c_∞ ist

$$c + \frac{c}{\mu_0} \int_0^\infty d\omega \psi(\omega).$$

4. Vergleichen wir hiermit noch folgenden Fall. Von $t = -\infty$ bis $t = 0$ sei der Draht um einen gewissen Winkel c_∞ verdreht gewesen, für alle folgenden Zeiten wirke keine Kraft auf denselben, infolge der Nachwirkung sei er zur Zeit t noch

um den Winkel ϑ' gedreht. Dann ist $\vartheta' = c_\infty - \vartheta$, wobei ϑ die durch Formel (15) gegebene Größe ist. Man hat also

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta' = \frac{c_\infty}{\mu} \int_t^\infty d\omega \psi(\omega), \\ \psi(t) = -\frac{\mu}{c_\infty} \frac{d\vartheta}{dt}. \end{array} \right.$$

Beobachtet man bei dem sub 2 betrachteten Falle die Verschiebungsnachwirkung, so hat man in Formel (14) $c = 0$, $D' = 0$, für D aber dessen Wert aus Gleichung (12) zu setzen, und erhält folgenden Fall:

5. Sei der Draht von $t = -\infty$ bis $t = -\tau/2$ untordiert, von $t = -\tau/2$ bis $t = +\tau/2$ um den Winkel γ tordiert gewesen, worauf auf den unteren Querschnitt keine Kraft mehr wirke, dann ist er infolge der Nachwirkung zur Zeit t noch um den Winkel

$$(18) \quad \vartheta = \frac{\gamma\tau}{\mu} \psi(t)$$

tordiert. Sucht man aus derartigen Versuchen ψ , so ist also

$$(19) \quad \psi(t) = \frac{\pi}{\gamma\tau} \vartheta.$$

6. Wir hängen an ein und denselben Draht Gewichte von verschiedenem Trägheitsmomente K an und bestimmen das logarithmische Dekrement $\varepsilon\tau$ oder den Extinktionskoeffizienten ε als Funktion der Schwingungsdauer τ , wenn während der Schwingungen auf den Draht und das angehängte Gewicht keine anderen als die elastischen Kräfte wirken. Dann ist in Formel (5) $D = 0$ zu setzen.

Setzen wir jetzt

$$\vartheta(t) = C e^{-\varepsilon t} \sin(n + \alpha)t,$$

wobei

$$n = \sqrt{\frac{\pi R^4 \mu}{2lK}},$$

so werden ε und α sehr klein sein; man kann daher in dem bestimmten Integrale der Gleichung (5), welches ebenfalls klein ist, $\varepsilon = \alpha = 0$ setzen und erhält

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{n}{2\mu} \int_0^{\infty} \sin(n\omega) \psi(\omega) d\omega \\ \alpha = -\frac{n}{2\mu} \int_0^{\infty} \cos(n\omega) \psi(\omega) d\omega. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man ε als Funktion von n mit $\varepsilon(n)$, so erhält man aus der ersten der Gleichungen (20) leicht $\psi(t)$ mittels des Fourierschen Satzes.

Es ist nämlich:

$$(21) \quad \psi(t) = \frac{4\mu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{n} \sin(nt) dn.$$

Das logarithmische Dekrement L ist $\varepsilon\tau$, τ aber ist $2\pi/n$. Sei $L = \chi(\tau)$, so ist also

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau} \chi(\tau) = \frac{n}{2\pi} \chi\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

woraus man findet

$$(22) \quad \psi(t) = 2\mu \int_0^{\infty} \chi\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sin(nt) dn.$$

Dies ist die Formel, nach welcher die Funktion $\psi(t)$ aus dem Schwingungsversuche berechnet werden kann. Wirkt auch eine äußere ϑ proportionale Kraft auf den Draht, so vereinigt sie sich mit μ , was aber dann eventuell unter dem Integralzeichen stehen muß.

Die Funktion φ kann in ganz analoger Weise aus Drehungsversuchen bestimmt werden. Da jedoch die meisten Nachwirkungsversuche bisher die Torsion zum Gegenstande hatten, und da zudem höchstwahrscheinlich φ dieselbe Form wie ψ hat, so will ich mich hierauf vorläufig nicht weiter einlassen.

Mittels der Formeln (7) und (19) könnte man leicht aus den verschiedenen Beobachtungen Kohlrauschs (l. c.) die Funktion ψ bestimmen, wobei nur noch ein für sehr große t verschwindender Faktor hinzuzufügen wäre, um das Unendlichwerden von $\int_0^{\infty} \psi(\omega) d\omega$ zu verhindern. Doch erhält man in dieser Weise nur wenig übereinstimmende Werte von ψ , weil

Kohlrauschs Zahlen dem Prinzip der Superposition nur sehr unvollkommen genügen.

Aus Neesens Versuchen (Berl. Monatsber. Febr. 1874) würde $\psi(t) = a\mu e^{-bt}$ folgen, wobei a und b zu bestimmende Konstanten sind. Es ginge also die Formel (6) über in

$$(23) \quad \begin{cases} D = \frac{\pi R^4 c}{2l} \left(\mu + \frac{a\mu}{b} c^{-bt} \right) = D_0 \left(1 + \frac{a}{b} e^{-bt} \right) \\ \quad = D_\infty \left[1 - \frac{a}{b} (1 - e^{-bt}) \right], \end{cases}$$

die Formel (18) in

$$(24) \quad \mathcal{D}(t) = \gamma \tau a e^{-bt},$$

die Formel (20) in

$$(25) \quad \varepsilon = \frac{a n^2}{2(n^2 + b^2)} = \frac{a}{2 \left(1 + \frac{\tau^2 b^2}{4\pi^2} \right)}, \quad \alpha = - \frac{a b n}{2(n^2 + b^2)}.$$

Hat man also die auf eine kurze Torsion γ während der Zeit τ folgende Nachwirkung $\mathcal{D}(t)$ beobachtet und in der Form (24) dargestellt, so läßt sich aus den Konstanten a und b der Extinktionskoeffizient ε berechnen und mit der Erfahrung vergleichen. Ebenso, wenn die auf eine sehr lange Deformation folgende Nachwirkung beobachtet worden wäre. Sei von $t = \infty$ bis $t = 0$ der unterste Querschnitt um den Winkel c gedreht gewesen, dann ist nämlich die Drehung \mathcal{D} , welche zur Zeit t infolge der elastischen Nachwirkung noch vorhanden ist, nach Formel (17)

$$(26) \quad \mathcal{D}' = \frac{c a}{b} e^{-bt}.$$

Schwingungsversuche, aus denen die Funktion $\psi(t)$ nach Formel (21) bestimmt werden kann, wurden von Streintz angestellt.

Derselbe fand das logarithmische Dekrement von der Schwingungsdauer unabhängig, also $\chi \left(\frac{2\pi}{n} \right)$ in Formel (22) konstant. Die Formel (22) wird dann unbestimmt. Man kann aber diesem Übelstande abhelfen, indem man annimmt, daß $\chi(\tau)$ für mäßige τ konstant ist, wenn aber τ außerordentlich klein wird, kontinuierlich abnimmt, was den Beobachtungen Streintz' jedenfalls nicht widerspricht. Dann liefert die Formel (22)

$$\psi(t) = \frac{B}{t},$$

wobei B eine Konstante ist. Dieser Wert von ψ kann noch nicht unmittelbar in die Formeln eingesetzt werden, weil sowohl

$$\int_t^\infty \psi(t) dt \quad \text{als auch} \quad \int_0^t \psi(t) dt$$

unendlich wird. Dem ersten Übelstande hilft man ab, indem man im Zähler von $\psi(t)$ statt der Konstanten B eine Funktion $f(t)$ substituiert, die für mäßige t fast konstant ist, und erst für große t immer kleiner wird, z. B. die Funktion Ae^{-kt} oder A/t^k , wobei k sehr klein ist.

Dem zweiten Übelstande kann man dadurch abhelfen, daß man

$$\mu = \int_0^\infty \frac{f(\omega) d\omega}{\omega}$$

setzt, und dann beide Glieder der Formel (5) in eins zusammenzieht.

II. Aufstellung und Diskussion

jener Formeln für die elastische Nachwirkung, welche mir als die wahrscheinlichsten erscheinen.

Wir wollen voraussetzen, daß die Funktion φ denselben Bau wie Funktion ψ besitzt.

Dann können wir die allgemeinen Gleichungen für die elastischen Kräfte so schreiben:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \lambda \theta(t) + \int_0^\infty [\theta(t) - \theta(t-\omega)] F(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \\ \quad + 2 \int_0^\infty \left[\frac{du(t)}{dx} - \frac{du(t-\omega)}{dx} \right] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \\ T_1 = \int_0^\infty \left[\frac{dv(t)}{dx} + \frac{dw(t)}{dy} - \frac{dv(t-\omega)}{dx} - \frac{dv(t-\omega)}{dy} \right] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \end{array} \right.$$

Von den beiden Funktionen $F(\omega)$ und $f(\omega)$ genügt es, zu wissen, daß sie für mäßige ω konstante Werte haben, für sehr große ω aber sich so der Grenze Null nähern, daß

$$\int_1^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} F(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

konvergieren. Dabei sind $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ die Verschiebungen des Punktes mit den Koordinaten x , y , z parallel den Koordinatenachsen, $\theta(t)$ ist gleich

$$\frac{du(t)}{dx} + \frac{dv(t)}{dy} + \frac{dw(t)}{dz}.$$

Auf ein Flächenelement vom Flächeninhalt df , welches senkrecht auf der x -Achse steht, wirken die Kräfte $N_1 df$, $T_3 df$, $T_2 df$ parallel der x -, y - und z -Achse. Die Ausdrücke für die übrigen Kräfte können nach Analogie gebildet werden. Dazu kommen noch dieselben Bewegungsgleichungen, welche Lamé (l. c.) aufstellt, nämlich:

$$(28) \quad \begin{cases} \rho \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X, \\ \rho \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + Y, \\ \rho \frac{d^2 w(t)}{dt^2} = \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + Z. \end{cases}$$

Dabei ist ρ die Dichte, X , Y , Z sind die beschleunigenden Kräfte, die auf das Innere des Körpers wirken. Ich will diese Formeln wieder vorläufig nur auf denjenigen Fall anwenden, welcher am leichtesten zu untersuchen ist, nämlich auf den der Torsion.

Der vertikal herabhängende Draht sei genau wie früher ein gerader Kreisylinder von der Länge l und dem Radius R . Das Zentrum seiner oberen fixen Endfläche sei der Koordinatenanfangspunkt, seine Achse die Abszissenachse, sein unteres Ende mit einem Gewichte belastet, dessen Trägheitsmoment K sehr groß ist gegenüber dem des Drahtes (alles bezogen auf die gemeinsame Drehungsachse). Dann werden, wenn wir von der durch die Schwere des Gewichtes erzeugten Dehnung abstrahieren, die sich nur zur Schwingungsbewegung superponiert, die Verschiebungen u , v , w folgende Werte besitzen:

$$u = 0, \quad v = \frac{-zx\vartheta(t)}{l}, \quad w = \frac{yx\vartheta(t)}{l},$$

wobei $\vartheta(t)$ der Winkel ist, um welchen zur Zeit t der unterste Querschnitt verdreht ist, und wenn D das Moment ist, mit

welchem zur Zeit t der unterste Querschnitt gedreht wird, so hat man

$$(29) \quad D - K \frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l} \int_0^{\infty} [\vartheta(t) - \vartheta(t - \omega)] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}.$$

Wir wollen nun wieder diese Formel auf die wichtigsten in der Praxis vorkommenden Fälle anwenden.

Sei zunächst die Bewegung des Drahtes so gering, daß man seine Beschleunigung vernachlässigen, also

$$\frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} = 0$$

setzen darf; bis zu einer gewissen Zeit T sei der Draht untordiert gewesen; erst wenn t größer als T ist, sei $\vartheta(t)$ von Null verschieden. Die Gleichung (29) verwandelt sich dann in folgende:

$$D = \frac{\pi R^4}{2l} \vartheta(t) \int_{t-T}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} + \frac{\pi R^4}{2l} \int_0^{t-T} [\vartheta(t) - \vartheta(t - \omega)] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}.$$

Wir bezeichnen nun mit ϱ irgend eine beliebige Konstante; so können wir das erste Integral rechts in zwei, eines von $t-T$ bis ϱ , das andere von ϱ bis Unendlich zerlegen und erhalten so

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \frac{\pi R^4}{2l} \vartheta(t) \int_{\varrho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} + \frac{\pi R^4}{2l} \vartheta(t) \int_{t-T}^{\varrho} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \\ &+ \frac{\pi R^4}{2l} \int_0^{t-T} [\vartheta(t) - \vartheta(t - \omega)] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \right.$$

Das erste bestimmte Integral ist konstant, wir wollen es z. B. mit A bezeichnen, so daß

$$(31) \quad A = \int_{\varrho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega};$$

in dem zweiten bestimmten Integral durchläuft ω nur endliche Werte, so daß $f(\omega)$ unserer Annahme gemäß einen nahezu konstanten Wert B hat, ebenso im dritten. Wir können daher, wenn wir noch setzen

$$(32) \quad \begin{cases} a = \frac{\pi R^4}{2l} \cdot A = \frac{\pi R^4}{2l} \int_0^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \\ b = \frac{\pi R^4}{2l} \cdot B = \frac{\pi R^4}{2l} f(0), \end{cases}$$

die Gleichung (30) so schreiben:

$$(33) \quad \begin{cases} D = a \vartheta(t) - b \vartheta(t) \operatorname{lognat} \left(\frac{t-T}{\varrho} \right) \\ + b \int_0^{t-T} [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)] \frac{d\omega}{\omega}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Formel zuerst zur Diskussion folgender Fälle anwenden:

1. Der Draht sei bis zur Zeit Null untordiert gewesen; dann werde seine Torsion konstant gleich c erhalten (d. h. wieder sein unterster Querschnitt werde um den Winkel c verdreht). Wir fragen nach der Kraftnachwirkung, d. h. welches Drehungsmoment D zu irgend einer Zeit t auf den Draht (also wieder auf seinen untersten Querschnitt) wirken muß, um jene konstante Torsion zu erhalten. Wir haben in diesem Falle in Formel (33) $T = 0$, $\vartheta(t) = \vartheta(t - \omega) = c$ zu setzen, und erhalten

$$(34) \quad D = c \left[a - b \operatorname{lognat} \left(\frac{t}{\varrho} \right) \right].$$

Diese Formel enthält scheinbar drei zu bestimmende Konstanten a , b und ϱ , in Wirklichkeit aber nur zwei, da sich die Konstante $\operatorname{lognat} \varrho$ zur Konstante a addiert. Es ist also ϱ ganz willkürlich und kann z. B. gleich einer Sekunde gesetzt werden. Die Formel (34) gilt natürlich nicht für sehr kleine und auch nicht für sehr große t . Die Schuld davon liegt jedoch nicht an der Gleichung (33), sondern daran, daß in diesen Fällen die Vernachlässigungen unerlaubt werden, die wir uns bei ihrer Integration gestatteten. Für mäßige t ist die Nachwirkung klein, daher nahe

$$(35) \quad D = c a;$$

a ist also das Drehungsmoment, welches die Torsion um den Winkel 1 erzeugen würde, und welches wir etwa als den Torsionsmodul bezeichnen wollen.

2. Der Draht sei bis zur Zeit $-\tau/2$ untordiert, von $-\tau/2$ bis $+\tau/2$ um den konstanten Winkel γ tordiert ge-

wesen; man fragt nach dem Momente D , welches in den folgenden Zeiten auf ihn wirken muß, um der Nachwirkung das Gleichgewicht zu halten, also um den untersten Querschnitt in die Lage zu bringen und daselbst zu erhalten, die er vor der Zeit $-\tau/2$ hatte. Bei diesem Problem ist in Formel (33) $T = -\frac{\tau}{2}$, $\vartheta(t) = 0$, $\vartheta(t - \omega) = \gamma$ von $t - \omega = -\frac{\tau}{2}$ bis $+\frac{\tau}{2}$ sonst gleich Null zu setzen, und man erhält, wenn man das bestimmte Integral angenähert ausrechnet

$$(36) \quad D = -\frac{b\gamma\tau}{t} \cdot 1)$$

Fragt man in diesen beiden Fällen nach der Verschiebungsnachwirkung ϑ bei konstantem Drehungsmoment D' , so ist wieder nahe

$$(37) \quad c - \vartheta = \frac{1}{a}(D - D')$$

zu setzen; aus dem sub 1 betrachteten Falle wird der folgende:

3. Der Draht war untordiert; plötzlich wirkt auf denselben das konstante Drehmoment D' .

Nach Verlauf der Zeit t wird dann sein unteres Ende um den Winkel

$$(38) \quad \vartheta = \frac{D'}{a} \left[1 + \frac{b}{a} \operatorname{lognat} \left(\frac{t}{q} \right) \right]$$

verdreht erscheinen. Auf diesen Fall kann man leicht folgenden reduzieren:

4. Habe durch eine sehr lange Zeit auf den Draht das Drehungsmoment D' gewirkt; plötzlich werde dasselbe aufgehoben. Nach Verlauf der Zeit t sei der untere Querschnitt des Drahtes um den Winkel ϑ gegen die Position verdreht, die er im Moment des Aufhörens des Drehungsmomentes D' hatte; dann ist ϑ wieder durch die Formel (38) gegeben. Dieselbe Formel gilt auch angenähert, wenn der Draht lange Zeit um einen konstanten Winkel c tordiert war, und im letzten Moment dieser Drehung das Drehungsmoment D' auf denselben wirkte.

¹⁾ Wenn man bei Berechnung des Integrals τ nicht als sehr klein voraussetzt, ergibt sich

$$(36a) \quad D = -b\gamma \operatorname{lognat} \left(\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}} \right).$$

Die Torsion c darf aber nicht unendlich lange Zeit gedauert haben, weil sonst nach den Formeln dieses Abschnittes keine Rückkehr in die alte Position stattfände.

5. Der sub 2 betrachtete Fall aber geht, wenn man nach der Verschiebungsnachwirkung fragt, in folgenden über: der anfangs untordierte Draht wurde während der Zeit τ um einen konstanten Winkel γ tordiert erhalten, und dann wieder sich selbst überlassen. Infolge der elastischen Nachwirkung wird er später noch eine kleine Torsion zeigen, und zwar sei dieselbe nach Verlauf der Zeit t gleich ϑ . (Die Zeit t werde von demjenigen Zeitpunkte an gezählt, der in der Mitte zwischen Anfang und Ende der Torsion γ liegt.) Dann hat man

$$(39) \quad \vartheta = \frac{b \gamma \tau}{a t}.$$

Wenn eine dauernde Deformation eintritt, superponiert sich dieselbe wahrscheinlich mit der Nachwirkung; dann ist also ϑ aus der Formel

$$(40) \quad \vartheta = \frac{b \gamma \tau}{a t} + c^1)$$

zu berechnen, wobei c eine neue zu bestimmende Konstante ist, die kein t , wohl aber γ und τ enthält.

Aus den sub 1, 3 oder 4 angeführten Beobachtungen können beide Konstanten a und b bestimmt werden. ρ ist ganz willkürlich und kann gleich einer Sekunde gesetzt werden.

Aus den sub 2 oder 5 angeführten kann nur aus den ersteren b , aus den letzteren b/a bestimmt werden. Um a und b einzeln zu bestimmen, muß noch die durch ein bestimmtes Drehmoment hervorgerufene Torsion und daraus nach Formel (35) der Torsionsmodul a gerechnet werden.

6. Wir wollen endlich noch das Schwingungsproblem der Betrachtung unterziehen, d. h. wir nehmen an, zur Zeit Null sei das am Drahte hängende Gewicht irgendwie in Bewegung versetzt worden; Draht und Gewicht schwinde nun, ohne daß andere als die elastischen Kräfte darauf einwirken; dann ist

¹⁾ Ist τ nicht klein, so tritt an die Stelle dieser Formel folgende:

$$\vartheta = \frac{b \gamma}{a} \operatorname{lognat} \left(\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}} \right) + c.$$

$D = 0$, für negative t ist $\mathcal{D}(t) = 0$, für positive dagegen ist jedenfalls nahezu

$$\omega(t) = C e^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Behufs Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (29) zur Bestimmung der Konstanten ε und τ finden wir zunächst:

$$\frac{d^2 \mathcal{D}}{dt^2} = - \left(\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \varepsilon^2 \right) C e^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi\varepsilon}{\tau} C e^{-\varepsilon t} \cos \frac{2\pi t}{\tau},$$

ferner

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}(t - \omega)] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \\ &= C e^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi\varepsilon}{\tau} \left[\int_0^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \cos \frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \right] \\ & \quad + C e^{-\varepsilon t} \cos \frac{2\pi t}{\tau} \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \sin \frac{2\pi t}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte in Gleichung (29) und setzt die mit $\sin(2\pi t/\tau)$ multiplizierten Glieder, sowie auch die mit $\cos(2\pi t/\tau)$ multiplizierten separat einander gleich, so erhält man

$$(41) \quad K \left(\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \varepsilon^2 \right) = \frac{\pi R^4}{2l} \left[\int_0^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \cos \frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \right].$$

$$(42) \quad K \frac{4\pi\varepsilon}{\tau} = \frac{\pi R^4}{2l} \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \sin \frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß ε und τ nicht exakt konstant sind; doch sind sie es nahezu, wie aus folgenden Betrachtungen ersichtlich ist. Auf den Wert des Integrals der Formel (42) haben diejenigen Werte des ω , welche zwischen Null und mäßigen ganzen Vielfachen von τ liegen, weitaus den größten Einfluß. Für diese Werte des ω kann aber, weil ε klein ist,

$$e^{\varepsilon\omega} = 1, \quad \frac{\pi R^4}{2l} f(\omega) = b$$

gesetzt werden; es ist also nahezu:

$$\frac{\pi R^4}{2l} \int_0^t e^{\varepsilon \omega} \sin \frac{2\pi \omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = b \int_0^{\infty} \sin \frac{2\pi \omega}{\tau} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = \frac{b\pi}{2}.$$

Das Integral

$$\int f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

hat wegen der anfangs außerordentlich langsamen Abnahme von $f(\omega)$, wenn man es von einem endlichen Werte bis Unendlich erstreckt, einen sehr großen Wert; von Null bis zu einer endlichen Grenze erstreckt, würde es unendlich. Dies Unendlichwerden ist aber in Formel (42) durch Subtraktion des zweiten Integrals kompensiert.

Das gesamte Aggregat

$$\int_0^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\varepsilon \omega} \cos \frac{2\pi \omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

ist also jedenfalls gleich

$$\int_{\rho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega},$$

wobei ρ eine endliche Größe ist, die nicht weit verschieden von der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$\int_{\rho}^{\infty} \cos \frac{2\pi \omega}{\tau} \frac{d\omega}{\omega} = 0,$$

also wohl auch nicht weit verschieden von $\tau/4$ ist. Wir werden sogleich sehen, daß der Wert des Integrals

$$\int_{\rho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

sich nur äußerst wenig verändert, selbst wenn die untere Grenze ρ bedeutende Änderungen erfährt; wir können also ohne merklichen Fehler ρ mit der in Formel (31) so bezeichneten Größe identifizieren, wodurch wir erhalten:

$$\frac{\pi R^4}{2l} \int_e^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = a.$$

Die Bestimmungsgleichungen (41) und (42) für die Schwingungsdauer τ und den Extinktionskoeffizienten ε liefern also jetzt folgende sehr einfache Werte:

$$(43) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{8\pi l K}{R^4 A}},$$

$$(44) \quad \varepsilon = \frac{b\tau}{8K} = \frac{\pi b}{4\sqrt{aK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32lKA}}.$$

Da wir bereits a als Torsionsmodul kennen gelernt haben, so war der Ausdruck für τ zu erwarten. Das logarithmische Dekrement aber ist

$$(45) \quad L = \varepsilon\tau = \frac{\pi^2 b}{2a} = \frac{\pi^2 B}{2A},$$

wobei A und B bloß von dem Materiale des Drahtes abhängige Konstanten sind. Das logarithmische Dekrement ist also außer von dem Materiale des Drahtes (natürlich auch dessen Zustand, wie Härtung, Temperatur) von nichts anderem abhängig, welches Gesetz zuerst Streintz auf experimentellem Wege auffand.

Wir können jetzt zeigen, inwieweit das Integral

$$\int_e^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

von ϱ abhängt. Wir haben nämlich

$$\frac{\pi^2}{2L} = \frac{A}{B} = \frac{1}{B} \int_e^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}.$$

Bei den Versuchen Warburgs und sämtlicher von Streintz bei gewöhnlicher Temperatur angestellten war $L < 0,01$, daher

$$\int_e^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} > 500 B.$$

Setzt man statt ϱ einen anderen Wert ϱ' , so erhält man

$$\int_{\varrho'}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \int_{\varrho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} + \int_{\varrho}^{\varrho'} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}.$$

Hier ist das erste Glied der rechten Seite $> 500 B$, das zweite aber jedenfalls kleiner als

$$B \log \text{nat.} \left(\frac{\varrho}{\varrho'} \right),$$

weil $f(\omega)$ für mäßige ω nahe gleich B , sonst aber kleiner als B ist.

Vergleichen wir also z. B. die beiden Werte des Integrals

$$\int_{\varrho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega},$$

wo die untere Grenze einmal eine Sekunde, das andere Mal ein Tag ist, so ist ϱ gleich ein Tag, ϱ' gleich eine Sekunde zu setzen, dann wird

$$\log \text{nat} \left(\frac{\varrho}{\varrho'} \right) = 11,4.$$

Selbst bei dieser enormen Verschiedenheit der unteren Grenzen ändert sich daher das bestimmte Integral nicht einmal um drei Prozent seines Betrages, was, da wir nur Annäherungsformeln geben, zu vernachlässigen sein dürfte.

Wir können nun aus Beobachtungen, auf welche die Formeln (34) bis (39) anwendbar sind, und welche ich Versuche mit statischer elastischer Nachwirkung nennen will, weil dabei Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vernachlässigt werden können, die beiden Konstanten a und b oder A und B berechnen und mittels derselben Schwingungsdauer und Dekrement ausrechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Wir können aber auch umgekehrt aus Schwingungsbeobachtungen a und b oder A und B ausrechnen, und dann daraus die statische elastische Nachwirkung in den verschiedenen Fällen berechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Ich bemerke, daß es sich dabei empfiehlt, in jenen Formeln, in denen ϱ vorkommt, ϱ nicht viel verschieden von $\tau/4$, also von dem vierten Teile der bei den Schwingungsbeobachtungen angewendeten ganzen Schwingungsdauer zu wählen, ohne daß aber selbst enorm verschiedene Werte des ϱ ein bemerkbar anderes Resultat liefern würden.

Freilich stimmen weder die Beobachtungen Kohlrauschs, noch die Neesens über statische elastische Nachwirkung mit den hier entwickelten Formeln, doch zeigt schon die gänzliche Verschiedenheit der von diesen beiden Beobachtern gefundenen Resultate an, daß man noch einwurfsfreiere Beobachtungen wird abwarten müssen, oder daß vielleicht verschiedene Substanzen sich verschieden verhalten.

Sehr einfach wird die Formel (40), welche dann die Relation zwischen dem logarithmischen Dekremente L und der auf eine kurze Torsion folgenden statischen elastischen Nachwirkung gibt. Sei ein Draht während einer kurzen Zeit τ um einen konstanten Winkel γ tordiert gewesen und werde dann sich selbst überlassen. Dann ist die Torsion ϑ , welche nach einer gewissen Zeit t infolge der elastischen Nachwirkung noch übrig ist, durch die Formel

$$(46) \quad \vartheta = \frac{2\tau L}{\pi^2 t} + c$$

oder, wenn τ nicht sehr klein ist:

$$\vartheta = \frac{2L\gamma}{\pi^2} \operatorname{lognat} \left(\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}} \right) + c$$

gegeben. Diese Relation, welche experimentell noch nicht geprüft worden ist, würde den einfachsten Prüfstein für die Brauchbarkeit meiner Formeln liefern, wobei es natürlich wünschenswert ist, daß die Zeit t , nach welcher die statische elastische Nachwirkung beobachtet wird, von derselben Größenordnung, wie die Schwingungsdauer ist. Ich bemerke noch, daß die Formeln alle nur Annäherungsformeln sind. Eine weiter getriebene Annäherung, wodurch jedoch größere Weiteiläufigkeit erzeugt würde, wäre leicht erzielbar; ich halte sie jedoch vorläufig für vollkommen überflüssig.

Sollten sich diese Formeln in ihren allgemeinen Umrissen bestätigen, so wäre es auch interessant, die Grenzen festzustellen, wo ihre Gültigkeit aufhört, da es nur Annäherungsformeln sind; vielleicht könnte daraus auch eine nähere Bestimmung der bisher ganz unbestimmt gelassenen Funktion $f(\omega)$ gewonnen werden, was aber nur aus Beobachtungen, die ein sehr großes Zeitintervall umfassen, möglich wäre.

Nachtrag.¹⁾

Experimentelles.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß eine eingehende experimentelle Prüfung der elastischen Nachwirkung einen Aufwand von freier Zeit erfordern würde, welcher mir jetzt keineswegs zur Verfügung steht. Die wenigen Versuche, welche ich hierüber anstellte, und deren Beschreibung ich hier folgen lasse, hatten also nur den Zweck, die Brauchbarkeit meiner Formeln, namentlich des Superpositionsprinzips, wenigstens in einigen Fällen nachzuweisen. Sie wurden an einem etwa 5' langen ausgezogenen Glasfaden angestellt, dessen oberes Ende festgemacht, an dessen unteres aber mit Klebwachs der zur Spiegelablesung dienende Spiegel angeklebt war. Die Skala war in Millimeter geteilt, der Spiegel hatte die Distanz 1380 mm vom Fernrohre. Die Elastizitätsgrenze des Glasfadens wurde vor Beginn der Versuche durch öfteres Hin- und Herdrehen des unteren Endes um etwa 540° erweitert und längere Zeit darauf das Fernrohr so gestellt, daß sein Fadenkreuz genau auf den Nullpunkt der Skala einspielte. Jede der hierauf angestellten Versuchsreihen bestand aus folgenden Operationen. Das untere Ende des Glasfadens wurde zuerst um 360° gedreht, was ich den Prozeß des Aufwindens nenne; er dauerte etwa 3 Sekunden. Daß die Drehung genau 360° betrug, wurde dadurch konstatiert, daß bei unverändertem Stande des Auges des Beobachters das Bild irgend eines Gegenstandes im Spiegel wieder an den Ort gelangt war, den es vor dem Drehen gehabt hatte. Dann wurde das untere Ende einige Zeit konstant gedreht erhalten, und schließlich ließ man es wieder mit mäßiger Geschwindigkeit in die alte Lage zurückkehren, jedoch so, daß möglichst geringe Schwingungen entstanden (Prozeß des Abwindens, wieder etwa 3 Sekunden). Nun wurde nach Verlauf verschiedener Zeiten t der Skalenteil ϑ beobachtet, welcher mit dem Fadenkreuze koinzidierte. Nach Verlauf einer langen Zeit koinzidierte immer der Teilstrich Null; dauernde Deformation war also nicht zu bemerken. Mit τ bezeichne ich die Zeit, welche von der Mitte des Vorganges des Aufwindens bis

¹⁾ Voranzeige Wien. Anz. **11**. S. 186. 15. Oktober 1874.

zur Mitte des Vorganges des Abwindens verstrich. Die Zeit t zähle ich von der Mitte der Zeit τ an. Die Zeiten sind durchweg in Minuten gemessen. Jeder Beobachtung ist der Wert $\vartheta t/\tau$ beigelegt, der nach Formel (39) konstant für alle Beobachtungen sein soll, und es auch in der Tat mit genügender Annäherung ist.

t	$\tau = \frac{1}{4}'$		$\tau = \frac{1}{2}'$		$\tau = 1'$		$\tau = 2'$	
	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$
2'	5,5	44	11	44	21	42	43	43
3'	3,6	43,2	7,5	45	14	42	28	42
4'	2,8	44,8	5,7	45,6	10,3	41,2	21	42
6'	1,8	43,2	3,9	46,8	7	42	14,2	42,6
8'	1,4	44,8	2,8	44,8	5,3	42,4	10,9	43,6
12'	0,9	43,2	1,9	45,6	3,6	43,2	7,5	45,0
16'	0,7	44,8	1,4	44,8	2,6	41,6	6	48
24'					1,8	43,3	3,7	44,4
32'					1,3	41,6	2,8	44,8

Das Mittel der verschiedenen Werte von $\vartheta t/\tau$ ist etwa 44.

Um ein Urteil über die Anwendbarkeit der Formel (39) zu geben, habe ich in derselben $b\gamma/a = 44$ gesetzt, und die daraus berechneten Werte des s mit den beobachteten in folgender Tabelle zusammengestellt:

t	$\tau = \frac{1}{4}'$		$\tau = \frac{1}{2}'$		$\tau = 1'$		$\tau = 2'$	
	ϑ beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
2'	5,5	5,5	11	11	21	22	43	44
3'	3,6	3,7	7,5	7,3	14	14,7	28	29,3
4'	2,8	2,8	5,7	5,5	10,3	11	21	22
6'	1,8	1,9	3,9	3,7	7	7,3	14,2	14,7
8'	1,4	1,4	2,8	2,8	5,3	5,5	10,9	11
12'	0,9	1,9	1,9	1,9	3,6	3,7	7,5	7,3
16'	0,7	0,7	1,4	1,4	2,6	2,8	6	5,5
24'					1,8	1,8	3,7	3,7
32'					1,3	1,4	2,8	2,8

Die Größe $\vartheta t/\tau = 44$ Skalenteilen ist nach Formel (39) gleich $b\gamma/a$; γ , die Verdrehung des untersten Fadendes

während der Zeit τ , war bei meinen Versuchen $2\pi \cdot 44$ Skalenteile entsprechen einer Verdrehung um den Winkel $44/2 \times 1380$ in Bogenmaß, und weil diese Größe gleich

$$\frac{\gamma b}{a} = \frac{2\pi b}{a}$$

sein muß, so folgt

$$\frac{b}{a} = \frac{44}{4\pi \times 1380}$$

Das nach Formel (45) berechnete logarithmische Dekrement würde also den Wert

$$\frac{44\pi}{8 \times 1380} = 0,0013^1)$$

annehmen. Um auch diese Formel mit der Erfahrung zu vergleichen, ließ ich den Glasfaden Torsionsschwingungen ausführen, wobei jedoch, um die Schwingungen zu verlangsamen, unten ein Gewicht von bedeutendem Trägheitsmomente angehängt werden mußte, auf welches aber außer der Torsion des Fadens keine andere Kraft wirkte. Bei den früheren Versuchen hing unten nur der Spiegel und ein Rest der Glasröhre, aus der der Faden ausgezogen worden war. Die doppelten Amplituden der Torsionsschwingungen waren: 336, 308, 275, 250, 230, 209, 193, 176, 160,3 145, wobei zwischen je zwei Amplituden immer 10 Halbschwingungen lagen. Das logarithmische Dekrement hieraus berechnet, ergibt sich gleich: 0,00207, 0,00184, 0,00180, 0,00167, 0,00181, 0,00159, 0,00184, 0,00187, 0,00200.¹⁾ Die Übereinstimmung ist nur gering, da die Beobachtungen nur in roher Weise ausgeführt wurden, namentlich war der Apparat nicht genügend vor Luftströmungen geschützt. Eine andere als beiläufige Übereinstimmung konnte ja ohnedies nicht erwartet werden, da der Luftwiderstand nicht eliminiert wurde. Doch stimmt der Wert wenigstens ungefähr mit dem theoretisch berechneten Werte des logarithmischen Dekrements. Um zu konstatieren, daß das angehängte Gewicht die Elastizitätsverhältnisse des Fadens nicht wesentlich verändert hatte, machte ich noch eine Reihe von Nachwirkungsversuchen, wobei das Gewicht angehängt und $\tau = 1'$ war. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

¹⁾ Diese Zahlen sind mit 10 zu multiplizieren; vgl. diese Sammlung Bd. II. Nr. 43.

t	ϑ beob.	ϑ ber.	$\frac{\vartheta t}{\tau}$
2'	22,3	22	44,6
3'	13,8	14,7	41,4
4'	10,5	11	42,5
6'	7,4	7,3	44,4
8'	5,6	5,5	44,8
12'	3,9	3,6	46,8

Es scheint demnach, daß bei Substanzen, bei denen keine dauernde Deformation auftritt, meine Formeln jedenfalls einige Annäherung an die wirklichen Vorgänge bieten. Das Verhalten anderer Substanzen müßte erst näher untersucht werden.

Ich lasse hier noch einige allgemeine Formeln nachfolgen.

Bei der früher für das logarithmische Dekrement aufgestellten Formel setzte ich voraus, daß auf das Gewicht, mit dem der Draht belastet ist, keine Kraft außer der Torsion wirkt.

Wenn auf dieses Gewicht außerdem noch eine dem Torsionswinkel proportionale Kraft $H\eta$ wirkt, so geht die Bewegungsgleichung über in

$$-K\eta' = H\eta + \int_0^{\infty} [\eta(t) - \eta(t - \omega)] \frac{q(\omega) d\omega}{\omega},$$

woraus, wenn

$$\eta = Ae^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

gesetzt wird, folgt:

$$\frac{4\pi^2 K}{\tau} = a + H, \quad \varepsilon = \frac{b\tau}{8K}.$$

a und b sind dieselben Konstanten wie früher. Wenn man also, wie es Warburg (Berl. Monatsber. 8. Juli 1869) tat, das Trägheitsmoment K konstant läßt, und die Schwingungsdauer durch Veränderung der Kraft H abändert, so ist nach meinen Formeln der Extinktionskoeffizient ε der Schwingungsdauer proportional, was wenigstens qualitativ mit Warburgs Versuchen stimmt.

Ich bemerke endlich noch, daß die von mir für einen festen Körper mit elastischer Nachwirkung aufgestellten Gleichungen

chungen in die für eine Flüssigkeit mit Reibung geltenden übergehen, wenn wir nur annehmen, daß bei der Flüssigkeit die Funktionen $\varphi(\omega)$ und $\psi(\omega)$ für sehr kleine ω groß, für alle übrigen ω aber verschwindend klein sind. Dann reduziert sich nämlich

$$\int_0^{\infty} [u(t) - u(t - \omega)] \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega}$$

auf

$$c \frac{\partial u(t)}{\partial t},$$

wobei c eine Konstante ist, und die Formeln (27) gehen über in

$$N_1 = \lambda \theta + c \frac{\partial \theta}{\partial t} + 2c' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad T_1 = c' \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \dots,$$

was mit den Gleichungen für eine mit Reibung begabte Flüssigkeit stimmt, wenn man bedenkt, daß

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}$$

die Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen sind. Es wäre interessant, zu erforschen, ob nicht auch das Verhalten weicher oder zähflüssiger Körper durch die Gleichungen (27) gegeben ist, wobei dann das Verhalten der Funktionen φ und ψ in der Mitte stehen müßte, zwischen dem die elastische Nachwirkung und dem die innere Reibung charakterisierenden. Dasselbe könnte natürlich nur experimentell bestimmt werden. Es wäre auch nicht uninteressant, durch kombinierte Torsions- und Drehungsversuche das Verhältnis der Funktionen φ und ψ zu bestimmen. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß φ und c gleich Null sind, daß also für kubische Kompression keine Nachwirkung stattfindet.

Über den Zusammenhang zwischen der Drehung der Polarisationssebene und der Wellenlänge der verschiedenen Farben.

(Pogg. Ann. Jubelband. S. 128—134. 1874.)

Eine flüchtige Betrachtung des Phänomens der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes durch Quarz oder andere drehende Substanzen zeigt sogleich die auffallende Veränderlichkeit derselben für die verschiedenen Farben. Das Gesetz dieser Veränderlichkeit wurde bekanntlich zuerst von Biot aufgestellt (Mém. de l'acad. 2. S. 91), welcher zeigte, daß die Drehungswinkel der Polarisationssebene für die verschiedenen Farben nahezu den Quadraten ihrer Wellenlänge verkehrt proportional sind. Es zeigte sich jedoch, daß genauere von Broch (Rep. d. Phys. 7. S. 113) angestellte Messungen der Drehung der Polarisationssebene durch Quarz dieses Gesetz nicht vollkommen genau bestätigten. v. Lang war der erste, welcher das Biotsche Gesetz so zu ergänzen suchte, daß es mit den Brochschen Messungen vollständig übereinstimme. Bezeichnen wir mit φ den Winkel, um den ein Quarz von der Dicke eines Millimeters die Polarisationssebene irgend einer Farbe dreht und mit λ deren Wellenlänge, so sucht v. Lang den Winkel φ durch die Formel

$$(1) \quad A + \frac{B}{\lambda^2}$$

darzustellen, wobei A und B Konstanten sind. Daß dadurch eine größere Annäherung erzielt werden mußte als durch die Biotsche Formel, ist klar, da ja letztere nur eine einzige willkürliche Konstante enthält. Stefan zeigte nun zunächst (Wien. Ber. 50. S. 88), daß sich aus den Brochschen Messungen

noch kein sicherer Schluß darüber ziehen läßt, wie die Biotsche Formel zu ergänzen sei. Um die beiden Konstanten A und B der Formel (1) zu bestimmen, muß man natürlich immer zwei Messungen zu Hilfe nehmen. Es zeigte sich da nun, daß man sehr verschiedene Werte für die Konstanten A und B erhält, je nachdem man verschiedene Paare der Brochschen Messungen zur Berechnung der Konstanten A und B verwendet. Dagegen machte Stefan neue (und wie namentlich unsere späteren Betrachtungen zeigen werden, ohne Zweifel genauere) Messungen der Drehung der Polarisationssebene durch Quarz und zeigte, daß, wenn man verschiedene Paare seiner Messungen der Berechnung unterzieht, man für die Konstanten A und B der Formel (1) besser übereinstimmende Werte erhält, wonach also nicht mehr zweifelhaft ist, daß das Biotsche Gesetz in der Tat einer Ergänzung bedarf. Mir schien es nun zunächst aus theoretischen Gründen wahrscheinlich, daß die Drehungswinkel der Polarisationssebene besser durch eine Formel von der Gestalt

$$(2) \quad \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

als durch die Formel (1) dargestellt werden würden. Berechnet man nämlich die Wellenbewegung des Lichtäthers nach den gewöhnlichen Formeln, indem man die Distanz zweier Äthertheilchen als verschwindend klein voraussetzt, so findet man, daß eine Drehung der Polarisationssebene so wenig möglich ist, als eine Farbenzerstreuung durch Brechung. Die Drehung der Polarisationssebene kann daher wie die Farbenzerstreuung nur daher rühren, daß durch die Körpermoleküle im Äther periodische Dichtigkeitsänderungen erzeugt werden, deren Dimensionen nicht gegen die Wellenlänge verschwinden und zwar werden solche Dichtigkeitsänderungen eine Drehung der Polarisationssebene zur Folge haben, welche mit ihren Spiegelbildern nicht völlig kongruent, sondern nur symmetrisch sind, wie eine rechtslaufende Schraube mit ihrem Spiegelbilde (der linkslaufenden) bloß symmetrisch ist. Wenn auch hiermit noch nicht gesagt ist, wie derartige Dichtigkeitsänderungen der Rechnung zu unterziehen sind, worauf ich vielleicht einmal später in einer längeren Abhandlung zurückkommen werde, so ist doch so viel klar, daß die Drehung der Polarisationssebene

bloß daher rührt, daß die Wellenlänge nicht mehr sehr groß ist gegenüber den Dimensionen der Wirkungssphäre eines Moleküls. Daraus folgt, daß sie für große Wellenlängen verschwinden muß und dies ist der Grund, weshalb ich vermutete, daß sie durch den Ausdruck (2), welcher in der Tat für wachsende Wellenlängen sich immer mehr der Null nähert, besser dargestellt würde als durch den Ausdruck (1), der diese Eigenschaft nicht besitzt. Ich untersuchte nun, ob nicht die vorliegenden Messungen, namentlich die Stefans, eine Bestätigung meiner Vermutung lieferten. Jedesmal, wenn beobachtete Zahlen nach einer Formel berechnet werden, die dem Gesetze, nach dem sie gebaut sind, nicht ganz entspricht, müssen die Differenzen zwischen der nach jener Formel berechneten und den beobachteten Zahlen eine gewisse Regelmäßigkeit zeigen. Stefan fand nun in der Tat höchst merkwürdige Regelmäßigkeiten in den Differenzen zwischen den von ihm beobachteten Drehungswinkeln der Polarisationssebene und den nach der Formel (1) berechneten, und es ist interessant zu sehen, wie alle diese Regelmäßigkeiten darauf hinweisen, daß die Formel (2) den Beobachtungen besser als die Formel (1) entsprechen müsse. Man dürfte sich hiervon am leichtesten durch die graphische Darstellung überzeugen. Verzeichnen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem (siehe Figur), auf der Abszissenachse $O X$ tragen wir die reziproken Quadrate der Wellenlängen $1/\lambda^2$ auf. OM sei das reziproke Quadrat der Wellenlänge für die Fraunhofersche Linie B , ON das für die Fraunhofersche Linie H , so daß ON etwa dreimal so groß als OM ist. Als Ordinate tragen wir über jeder Abszisse den dazu gehörigen Drehungswinkel φ auf, welchen die betreffende Farbe durch einen Quarz von der Dicke eines Millimeters erfährt. Würden die Drehungswinkel das Biotsche Gesetz befolgen, so müßten wir hierdurch eine Gerade PQ erhalten, deren Verlängerung durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Nehmen wir nun an, das Biotsche Gesetz wäre nicht vollkommen genau erfüllt, aber es würden die Drehungswinkel genau durch die Formel (2) dargestellt, wobei B und C positive Konstanten sein sollen. Die Kurve, deren Abszissen die reziproken Quadrate der Wellenlängen und deren Ordinaten die dazu gehörigen Drehungswinkel der Polarisationssebene sind,

würde jetzt eine durch den Punkt O gehende krumme Linie (eine Parabel) sein, welche überall ihre konkave Seite nach aufwärts wendet. RS sei derjenige Teil derselben, welcher zwischen den Abszissen OM und ON liegt, welcher also den der Messung zugänglichen Wellenlängen entspricht. Das Problem, die Werte der Drehungswinkel φ möglichst genau durch die Formel (1) darzustellen, ist identisch mit dem Probleme, die Kurve RS möglichst genau durch eine Gerade zu ersetzen,

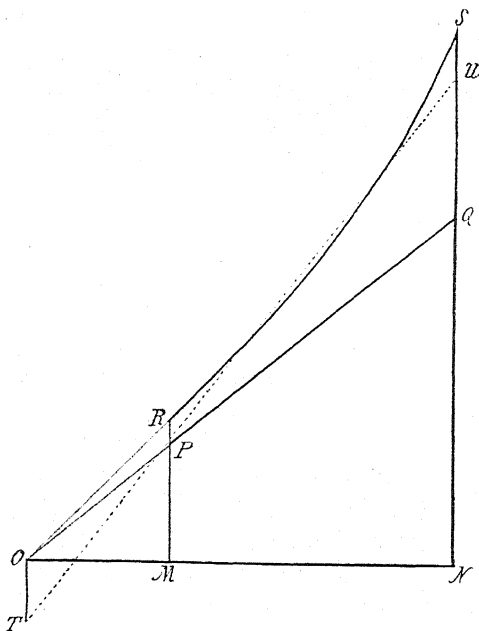


Fig. 1.

welche aber nicht durch den Koordinatenanfangspunkt zu gehen braucht und deren Gleichung $y = A + Bx$ ist. Eine gerade Linie, welche diesen Zweck erfüllt, wird etwa die Gerade TU sein. Man sieht sogleich aus der Zeichnung, daß diese Gerade die Abszissenachse ein kleines Stück vor dem Koordinatenanfangspunkte durchschneiden wird, daß also die Konstante A in ihrer Gleichung und folglich auch in der Formel (1) einen kleinen negativen Wert erhalten wird; und in der Tat fand Stefan in allen Fällen für die Konstante A einen kleinen

negativen Wert. Man sieht ferner, daß in der Nähe der Punkte M und N , also in der Nähe der Fraunhoferschen Linien B und H die Ordinaten der Geraden TU kleiner sind, als die der Kurve RS , während in der Mitte zwischen diesen beiden Fraunhoferschen Linien umgekehrt die Ordinaten der Geraden größer sind als die der Kurve. Wäre also der Drehungswinkel φ in Wirklichkeit durch die Formel (2) dargestellt und man würde versuchen, ihn möglichst genau nach der Formel (1) zu berechnen, so müßten an beiden Enden des Spektrums die berechneten Werte des φ kleiner sein als die beobachteten in der Mitte des Spektrums, dagegen müßten umgekehrt die berechneten Werte größer als die beobachteten sein. Auch diese Eigentümlichkeit hat Stefan in der Tat bei seinen Versuchen, die Drehungswinkel durch die Formel (1) darzustellen, bemerkt und zwar nicht bloß beim Quarz, sondern auch bei allen anderen Substanzen, welche die Polarisationssebene drehen (vgl. d. Abschn. IX s. Abh.). Endlich bemerkt Stefan noch, daß die beobachteten Drehungswinkel mit sehr großer Genauigkeit durch eine geradgebrochene Linie dargestellt wurden, deren erster dem Rot näher liegender Teil weniger, deren zweiter aber mehr gegen die Abszissenachse geneigt ist. Auch der Grund hiervon ist aus unserer Zeichnung unmittelbar ersichtlich, indem in der Tat die Kurve RS viel genauer durch zwei solche Gerade als durch eine einzige dargestellt werden kann. Man sieht also, daß alle merkwürdigen Eigentümlichkeiten, welche Stefan an den Differenzen der beobachteten und berechneten Werte fand, zugunsten der Formel (2) sprechen. Wird also durch diesen Umstand einerseits die Anwendbarkeit der Formel (2) sehr wahrscheinlich gemacht, so gibt derselbe andererseits auch Zeugnis für die große Genauigkeit der Stefanschen Beobachtungen am Quarze und der Wiedemannschen am Zitronen- und Terpentinöl, da sich aus den Zehnteln der Grade dieser Beobachtungen noch mit solcher Sicherheit Schlüsse ziehen lassen. Um übrigens einen direkten Vergleich zwischen der Annäherung, welche die Formel (1) und der, welche die Formel (2) bietet, zu ermöglichen, nahm ich mir die Mühe, die von Stefan für die Drehungswinkel φ der Polarisationssebene durch eine 1 mm dicke Quarzsäule gefundenen Zahlen mit Hilfe der Methode

der kleinsten Quadrate nach beiden Formeln zu berechnen. Da gegenwärtig bereits genauere Messungen der Wellenlängen als die ersten von Fraunhofer selbst ausgeführten existieren, so habe ich für die Wellenlängen λ lieber die von Ditscheiner gefundenen Werte benutzt (vgl. Wien. Ber. 50. [2] S. 296), die relativen Werte derselben stimmen übrigens mit den von Ångström und Mascart gefundenen so nahe überein, daß der Unterschied für unsere Zwecke ganz ohne Einfluß ist. Da es sich behufs Entscheidung der Frage, die uns beschäftigt, bloß um die Verhältnisse der Wellenlänge für die verschiedenen Fraunhoferschen Linien handelt, deren Absolutwerte verhältnismäßig viel unsicherer sind, so habe ich der Rechnung jene Zahlen Ditscheiners zugrunde gelegt, bei denen die Wellenlänge der *D*-Linie gleich 0,0005888 mm gesetzt ist. Wollte man aus meinen Formeln solche gewinnen, bei denen die Verhältnisse der Wellenlängen dieselben sind, aber die der *D*-Linie einen anderen Wert λ_D mm besitzt, so dürfte man nur die Konstante *A* unverändert lassen, die Konstante *B* mit der zweiten, die Konstante *C* aber mit der vierten Potenz von $0,0005888/\lambda_D$ multiplizieren. Ich stelle nun zunächst in der folgenden Tabelle für die verschiedenen Fraunhoferschen Linien die Werte der Drehungswinkel φ und der Wellenlängen λ zusammen, die ich den späteren Rechnungen zugrunde legte:

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
$\lambda = 0,00068706$ mm,	65595,	58880,	52686,	48,597,	43088,	39668	
$\varphi = 15,55^\circ$	17,22,	21,67,	27,46,	32,69,	42,37,	50,98	

Suchte ich die Werte des φ durch Formel (1) darzustellen und berechnete die Konstanten *A* und *B* nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhielt ich

$$(3) \quad \varphi = -2,303 + \frac{8,32777}{10^6 \lambda^2}.$$

Zieht man von den beobachteten Werten des φ die nach dieser Formel berechneten ab, so erhält man folgende Differenzen ε für die verschiedenen Fraunhoferschen Linien:

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	$\Sigma \varepsilon = 1,48$
$\varepsilon = 0,21,$	$0,17,$	$-0,05,$	$-0,24,$	$-0,27,$	$-0,18,$	$+0,36$	$\Sigma \varepsilon^2 = 0,3680$

$\Sigma \varepsilon$ ist hierbei die Summe aller Differenzen, jede mit positivem Zeichen genommen, $\Sigma \varepsilon^2$ ist die Summe der Quadrate der Differenzen. Berechnet man dagegen in der Formel (2) die Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man

$$(4) \quad \varphi = \frac{7,07018}{10^6 \lambda^2} + \frac{0,14983}{10^{12} \lambda^4}$$

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	$\Sigma \varepsilon = 0,32$
$\varepsilon = -0,10, -0,02, +0,03, +0,04, +0,07, -0,06, 0,00$							$\Sigma \varepsilon^2 = 0,0214$

ε , $\Sigma \varepsilon$ und $\Sigma \varepsilon^2$ haben dieselbe Bedeutung wie früher. Man sieht, daß sich die Formel (2), welche nicht mehr willkürliche Konstante, als die Formel (1) hat, den Beobachtungen viel besser anschließt, als die letztere. Ich habe endlich noch die Werte von φ nach der Formel

$$A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, wobei ich erhielt

$$\varphi = -0,3395 + \frac{7,24678}{10^6 \lambda^2} + \frac{0,12943}{10^{12} \lambda^4}$$

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	$\Sigma \varepsilon = 0,24$
$\varepsilon = -0,04, 0,02, 0,03, 0,01, 0,02, -0,08, 0,04$							$\Sigma \varepsilon^2 = 0,0114$

Man sieht, daß der Wert der Konstanten *A* fast 7 mal so klein ist als in der Formel (3), dagegen ist der des *C* nur unbedeutend kleiner, als in der Formel (4). Die Drehungswinkel anderer Substanzen habe ich nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, doch macht das Vorhergesagte wahrscheinlich, daß Terpentinöl, Zitronenöl und Rohrzuckerlösung sich ähnlich verhalten werden. Die Jaminschen Beobachtungen über Weinsäure (Jam. phys. III) verglich ich mit den Formeln (1) und (2), indem ich die Konstanten dieser Formeln aus zwei Beobachtungen berechnete. Es zeigte sich hier ebenfalls auf den ersten Blick, daß Formel (2) viel besser als Formel (1) stimmt; doch wird für eine Weinsäure die Konstante *C* der Formel (2) negativ. Unser Resultat ist also,

daß die Drehungswinkel der Polarisationssebene am besten durch die Formel

$$\frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{D}{\lambda^6} + \dots$$

dargestellt werden, daß dieselben also mit wachsendem λ sich der Null nähern. Die Drehung der Polarisationssebene gehört also in der Tat zu jenen Erscheinungen, welche bloß daher rühren, daß die Wellenlängen nicht mehr sehr groß gegen die Wirkungssphäre eines Moleküls sind.
